Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 893–898
COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des groupes/Systèmes dynamiques

Groupe de Cremona et dynamique complexe

Julie Déserti

IRMAR, UMR 6625 du CNRS, université de Rennes I, 35042 Rennes, France

Reçu le 9 avril 2006 ; accepté le 18 avril 2006

Disponible sur Internet le 15 mai 2006

Présenté par Étienne Ghys

Résumé

Nous nous intéressons ici aux représentations de certains réseaux de groupes de Lie dans le groupe de Cremona. ***Pour citer cet article : J. Déserti, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abstract

Cremona group and complex dynamic. We are interested in representations of some classical discrete groups in the Cremona group. ***To cite this article: J. Déserti, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abridged English version

Let $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ be the group of birational transformations of the complex projective plane also named Cremona group. In our study of this group we prove a result related to the Zimmer program [16]:

Theorem 0.1. *Let G be a simple algebraic subgroup over $\mathbf{Q}$ with $\mathbf{Q}$-$\operatorname{rank}(G) = r$. Let Γ be a subgroup of finite index in $G(\mathbf{Z})$ and $\rho : \Gamma \to \mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ a morphism. If ρ has infinite image, then $r \leqslant 2$.*

If $r = 2$ and ρ has infinite image, then the $\mathbf{Q}$-root system of G contains a root system of type A_2; in this case $\rho(\Gamma)$ is, up to conjugacy, a subgroup of $\mathsf{PGL}_3(\mathbf{C})$.

For our purpose the following observation, used by Witte in [15], is crucial: the $\mathbf{Q}$-root system of G contains a root system of type A_2 or B_2. So we only have to study morphisms from a subgroup of finite index in $\mathsf{SL}_3(\mathbf{Z})$ (resp. $\mathsf{SO}_{2,3}(\mathbf{Z})$) to $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$.

Theorem 0.2. *Let Γ be a subgroup of finite index in $\mathsf{SL}_3(\mathbf{Z})$ and ρ an embedding from Γ to $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Then, up to conjugacy, ρ is the canonical embedding or the involution $u \mapsto {}^t(u^{-1})$.*

We also obtain that *there is no embedding from a subgroup of finite index in $\mathsf{SO}_{2,3}(\mathbf{Z})$ into* $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$.

Adresse e-mail : julie.deserti@univ-rennes1.fr (J. Déserti).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2006.04.018

The proofs of the two last results are 'similar'. The main ingredients are the presence of Heisenberg subgroups in $\mathsf{SL}_3(\mathbf{Z})$ and $\mathsf{SO}_{2,3}(\mathbf{Z})$, we use this to prove that the first dynamical degree of the image of each 'standard generator' of Γ is equal to 1; so we can use the results of Diller and Favre [7], Cantat and Lamy [4].

1. Introduction

Les techniques de dynamique complexe permettent parfois d'établir des propriétés algébriques pour certains groupes de transformations, c'est le cas dans [3,4,8] et [12] ; il en va ainsi pour cette Note.

Afin de généraliser les travaux de Margulis sur les représentations linéaires des réseaux de groupes de Lie réels simples [13] aux représentations non linéaires, Zimmer propose d'étudier les actions des réseaux sur les variétés compactes [16]. L'une des conjectures principales de ce programme est la suivante : *soient G un groupe de Lie réel simple connexe et Γ un réseau de G* ; *s'il existe un morphisme d'image infinie de Γ dans le groupe des difféomorphismes d'une variété compacte M, le rang réel de G est inférieur ou égal à la dimension de M.*

Rappelons quelques résultats obtenus dans cette direction. En 1993, Ghys étudie les groupes engendrés par des difféomorphismes analytiques réels proches de l'identité sur une variété compacte ; il obtient en particulier que *tout sous-groupe nilpotent de* $\mathsf{Diff}^{\omega}(\mathbb{S}^2)$ *est métabélien* et que *si Γ est un sous-groupe d'indice fini de* $\mathsf{SL}_n(\mathbf{Z})$, *avec $n \geqslant 4$, alors tout morphisme de Γ dans* $\mathsf{Diff}^{\omega}(\mathbb{S}^2)$ *est d'image finie* [10]. Dans [15], Witte considère un $\mathbf{Q}$-groupe algébrique $\mathbf{Q}$-simple de $\mathbf{Q}$-rang supérieur ou égal à 2 et Γ un sous-groupe d'indice fini de $G(\mathbf{Z})$; il montre qu'*il n'existe pas de relation d'ordre total sur Γ préservée par la multiplication à droite*. Il en déduit que *toute action continue de Γ sur $\mathbb{S}^1$ ou sur la droite réelle est d'image finie*. Le théorème de Witte s'applique à une classe restreinte de réseaux, classe dont il est question ici, contrairement à l'énoncé qui suit dû à Ghys [11]. *Soit G un groupe de Lie semi-simple, connexe, de rang réel supérieur ou égal à* 2 *et n'ayant pas de facteur simple isomorphe à* $\mathsf{PSL}_2(\mathbf{R})$. *Si Γ est un réseau irréductible de G et ρ un morphisme de Γ dans le groupe des difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{S}^1$ qui préservent l'orientation, alors l'image de ρ est finie*. Un cas particulier de cet énoncé a été démontré par Burger et Monod lors de leur étude de la cohomologie bornée des réseaux [2].

Notons $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ le groupe des transformations birationnelles du plan projectif complexe encore appelé groupe de Cremona. Dans l'esprit des énoncés précédents, nous montrons le :

Théorème 1.1. *Soit G un $\mathbf{Q}$-groupe algébrique $\mathbf{Q}$-simple de $\mathbf{Q}$-rang r. Soient Γ un sous-groupe d'indice fini de $G(\mathbf{Z})$ et ρ un morphisme de Γ dans* $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. *Si ρ est d'image infinie, alors $r \leqslant 2$.*

De plus, si $r = 2$ et ρ est d'image infinie, alors G possède un système de $\mathbf{Q}$-racines de type A_2 *et l'image de ρ est, à conjugaison près, un sous-groupe de* $\mathsf{PGL}_3(\mathbf{C})$, *le groupe des automorphismes de* $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$.

Supposons $r \geqslant 3$. Reprenons un argument utilisé par Witte dans [15] ; puisque G est simple, son système de $\mathbf{Q}$-racines possède un sous-système irréductible de rang 3, *i.e.* un système de racines de type A_3, B_3 ou C_3 (voir [1], page 197, Théorème 3). Or C_3 (resp. B_3) possède un sous-système de type A_3 (resp. B_2) donc le système de $\mathbf{Q}$-racines de G possède un sous-système de type A_3 ou B_2. Commençons par supposer qu'il s'agit d'un sous-système de type A_3. Dans ce cas Γ contient un sous-groupe $\widetilde{\Gamma}$ isomorphe à un sous-groupe d'indice fini de $\mathsf{SL}_4(\mathbf{Z})$; si G possède un sous-système de type B_2, alors Γ contient un sous-groupe $\widetilde{\Gamma}$ isomorphe à un sous-groupe d'indice fini de $\mathsf{SO}_{2,3}(\mathbf{Z})$. Nous sommes ainsi ramenés à l'étude des morphismes d'un sous-groupe d'indice fini de $\mathsf{SL}_n(\mathbf{Z})$ et de $\mathsf{SO}_{2,3}(\mathbf{Z})$ dans $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$.

Théorème 1.2. *Soient Γ un sous-groupe d'indice fini de* $\mathsf{SL}_3(\mathbf{Z})$ *et ρ un morphisme injectif de Γ dans* $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. *Alors ρ coïncide, à conjugaison près, avec le plongement canonique ou la contragrédiente, i.e. l'involution $u \mapsto {}^t(u^{-1})$.*

Théorème 1.3. *Il n'existe pas de morphisme injectif d'un sous-groupe d'indice fini de* $\mathsf{SO}_{2,3}(\mathbf{Z})$ *dans le groupe de Cremona.*

Comme conséquence du Théorème 1.1 nous obtenons le :

Corollaire 1.4. *Soit G un* **Q**-*groupe algébrique* **Q**-*simple de* **Q**-*rang supérieur ou égal à* 3. *Soient Γ un sous-groupe d'indice fini de $G(\mathbf{Z})$ et S une surface kählerienne compacte. Tout morphisme de Γ dans le groupe des transformations birationnelles de S est d'image finie.*

Nous donnons ici une esquisse de preuve des Théorèmes 1.1 et 1.2, la démarche pour le Théorème 1.3 étant similaire à celle du Théorème 1.2. L'idée est la suivante : la présence de nombreux groupes de Heisenberg dans Γ, sur laquelle s'appuient aussi Franks et Handel dans [9], assure que tout « générateur standard » de Γ est distordu. Après avoir remarqué que le premier degré dynamique d'un élément distordu vaut 1, nous pouvons combiner les idées de [7] aux résultats de [4]. Les détails paraîtront ultérieurement.

Notations. Si M désigne une variété complexe alors $\mathsf{Aut}(M)$ est le groupe des automorphismes de M ; nous notons $\mathsf{Aut}[\mathbf{C}^2]$ le groupe des automorphismes polynomiaux du plan complexe.

2. Représentations des groupes de Heisenberg

Soit k un entier. Nous appellerons *k-groupe de Heisenberg* le groupe défini par la présentation : $\mathcal{H}_k = \langle \mathsf{f}, \mathsf{g}, \mathsf{h} \mid [\mathsf{f}, \mathsf{h}] = [\mathsf{g}, \mathsf{h}] = \mathsf{id},\ [\mathsf{f}, \mathsf{g}] = \mathsf{h}^k \rangle$. Par convention $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$; c'est le groupe de Heisenberg des matrices 3×3 à coefficients entiers. Remarquons que $\mathcal{H}_{k^2}$ est inclus dans $\mathcal{H}_k$ ... Soit X une surface complexe compacte. La transformation birationnelle $f : X \dashrightarrow X$ est dite *virtuellement isotope à l'identité* s'il existe une transformation birationnelle $\eta : X \dashrightarrow \widetilde{X}$ et un entier $n > 0$ tels que $\eta f^n \eta^{-1}$ soit un automorphisme de $\widetilde{X}$ isotope à l'identité.

A l'aide de techniques de dynamique complexe nous montrons la :

Proposition 2.1. *Soit ς une représentation de $\mathcal{H}_k$ dans le groupe de Cremona. Supposons que $\varsigma(\mathsf{f})$, $\varsigma(\mathsf{g})$ et $\varsigma(\mathsf{h})$ soient virtuellement isotopes à l'identité. Il existe $\mathcal{H}_{k'} \subset \mathcal{H}_k$, une surface $\widetilde{X}$ et une transformation birationnelle $\eta : \mathbb{P}^2(\mathbf{C}) \dashrightarrow \widetilde{X}$ tels que $\eta\varsigma(\mathcal{H}_{k'})\eta^{-1}$ soit un sous-groupe de $\mathsf{Aut}(\widetilde{X})$.*

Remarque 1. Un automorphisme f d'une surface S isotope à l'identité fixe chaque courbe d'auto-intersection négative ; pour toute suite de contractions ψ de S vers un modèle minimal $\widetilde{S}$ de S, l'élément $\psi f \psi^{-1}$ est donc un automorphisme de $\widetilde{S}$ isotope à l'identité.

Soient S une surface minimale et ς un morphisme injectif de $\mathcal{H}_k$ dans $\mathsf{Aut}(S)$. Trois cas sont possibles.

1. Si $S = \mathbb{P}^2(\mathbf{C})$, alors, à conjugaison linéaire près, nous avons
$$\varsigma(\mathsf{f}) = (x + \zeta y, y + \beta), \quad \varsigma(\mathsf{g}) = (x + \gamma y, y + \delta) \quad \text{et} \quad \varsigma(\mathsf{h}^k) = (x + k, y) \quad \text{avec } \zeta\delta - \beta\gamma = k.$$
2. Si S est une surface de Hirzebruch F_m, alors $\varsigma(\mathcal{H}_k)$ est birationnellement conjugué à un sous-groupe de $\mathsf{Aut}[\mathbf{C}^2]$. De plus, $\varsigma(\mathsf{h}^{2k})$ est de la forme $(x + P(y), y)$ avec P dans $\mathbf{C}[y]$.
3. Il n'existe pas de morphisme injectif de $\mathcal{H}_k$ dans $\mathsf{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C}))$.

3. Quasi-rigidité de $\mathsf{SL}_3(\mathbf{Z})$

3.1. Groupes de congruence et présentation de $\mathsf{SL}_3(\mathbf{Z})$ (voir [14])

Pour tout entier q introduisons le morphisme $\Theta_q : \mathsf{SL}_n(\mathbf{Z}) \to \mathsf{SL}_n(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})$ qui à une matrice à coefficients entiers associe sa réduite modulo q. Soient $\Gamma_n(q)$ le noyau de Θ_q et $\widetilde{\Gamma}_n(q)$ l'image réciproque du groupe diagonal de $\mathsf{SL}_n(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})$ par Θ_q ; les $\Gamma_n(q)$ sont des sous-groupes distingués appelés groupes de congruence. *Soient n un entier supérieur ou égal à* 3 *et Γ un sous-groupe de $\mathsf{SL}_n(\mathbf{Z})$. Si Γ est d'indice fini, il existe un entier q tel que Γ contienne un groupe $\Gamma_n(q)$ et soit contenu dans $\widetilde{\Gamma}_n(q)$. Si Γ est d'indice infini, alors Γ est central et, en particulier, fini* (voir [14]).

Notons δ_{ij} la matrice de Kronecker 3×3 et $e_{ij} = \mathsf{id} + \delta_{ij}$. *Le groupe $\mathsf{SL}_3(\mathbf{Z})$ a pour présentation*
$$\left\langle e_{ij},\ i \neq j \mid [e_{ij}, e_{kl}] = \mathsf{id} \text{ si } i \neq l \text{ et } j \neq k,\ e_{il} \text{ si } i \neq l \text{ et } j = k,\ e_{kj}^{-1} \text{ si } i = l \text{ et } j \neq k;\ \left(e_{12}e_{21}^{-1}e_{12}\right)^4 = \mathsf{id}\right\rangle.$$

Les e_{ij}^q engendrent $\Gamma_3(q)$ et vérifient des relations similaires aux e_{ij} (voir [14]) ; nous les appellerons *générateurs standards* de $\Gamma_3(q)$. Remarquons que chaque $e_{ij}^{q^2}$ s'écrit comme le commutateur de deux $e_{k\ell}^q$ avec lesquels il commute. Les $\Gamma_3(q)$ contiennent donc de nombreux k-groupes de Heisenberg ; par exemple le sous-groupe $\langle e_{12}^q, e_{13}^q, e_{23}^q\rangle$ de $\Gamma_3(q)$ en est un (pour $k=q$).

3.2. Dynamique de l'image d'un groupe de congruence

Soient G un groupe de type fini, $\{a_1,\ldots,a_n\}$ une partie génératrice de G et f un élément de G. La *longueur* de f, notée $\|f\|$, est le plus petit entier k pour lequel il existe une suite $(s_1,\ldots,s_k)$ d'éléments de $\{a_1,\ldots,a_n,a_1^{-1},\ldots,a_n^{-1}\}$ telle que $f=s_1\cdots s_k$. Un élément f de G est *distordu* s'il est d'ordre infini et si la quantité $\lim_{k\to\infty}\frac{\|f^k\|}{k}$ est nulle. Remarquons que la puissance k-ième du générateur standard h d'un k-groupe de Heisenberg $\mathcal{H}_k$ est distordue. En particulier les générateurs standards de tout sous-groupe de congruence de $\mathsf{SL}_n(\mathbf{Z})$ sont distordus.

Le *premier degré dynamique* d'une application birationnelle $g:X\dashrightarrow X$ est défini par

$$\lambda(g)=\limsup_{n\to+\infty}\left|\left(g^n\right)^*\right|^{1/n}$$

où $|\cdot|$ désigne une norme sur $\mathsf{End}(\mathsf{H}^{1,1}(X,\mathbf{R}))$ (voir [5]).

Lemme 3.1. *Soient f un élément d'un groupe de type fini G et ς un morphisme de G dans* $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. *Si f est distordu, le degré dynamique de $\varsigma(f)$ vaut* 1.

Démonstration. Notons $\deg g$ le degré algébrique d'une transformation birationnelle g et $\{a_1,\ldots,a_n\}$ une partie génératrice de G. Les inégalités $\lambda(\varsigma(f))^n\leqslant\deg\varsigma(f)^n\leqslant\max_i(\deg\varsigma(a_i))^{\|f^n\|}$ conduisent à

$$0\leqslant\log\lambda\big(\varsigma(f)\big)\leqslant\frac{\|f^n\|}{n}\log\Big(\max_i\big(\deg\varsigma(a_i)\big)\Big).$$

Si f est distordu, la quantité $\lim_{k\to\infty}\frac{\|f^k\|}{k}$ est nulle et le degré dynamique de $\varsigma(f)$ vaut 1. □

Dans la suite de cette partie, ρ désigne un morphisme injectif d'un sous-groupe de congruence $\Gamma_3(q)$ de $\mathsf{SL}_3(\mathbf{Z})$ dans $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Nous déduisons de ce qui précède l'égalité $\lambda(\rho(e_{ij}^q))=1$. D'après le Théorème 0.2 de [7], nous avons l'alternative suivante : ou bien l'un des $\rho(e_{ij}^q)$ préserve une unique fibration, rationnelle ou elliptique ; ou bien tout générateur standard de $\Gamma_3(q)$ est virtuellement isotope à l'identité. Nous allons traiter séparément ces deux éventualités.

Proposition 3.2. *Soit ρ un morphisme d'un sous-groupe de congruence $\Gamma_3(q)$ de* $\mathsf{SL}_3(\mathbf{Z})$ *dans* $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. *Si l'un des $\rho(e_{ij}^q)$ préserve une unique fibration, alors l'image de ρ est finie.*

La preuve de cette proposition consiste à montrer que $\Gamma_3(q)$ préserve la fibration et nous concluons en utilisant que *l'image de tout morphisme d'un groupe de type fini ayant la propriété* (T) *de Kazhdan dans* $\mathsf{PGL}_2(\mathbf{C}(y))$ (*resp.* $\mathsf{PGL}_2(\mathbf{C})$) *est finie.*

Etudions le cas où tout générateur standard de $\Gamma_3(q)$ est virtuellement isotope à l'identité. Alors les images de e_{12}^{qn}, e_{13}^{qn} et e_{23}^{qn} par ρ sont, pour un certain n, des automorphismes d'une même surface minimale (Proposition 2.1). En utilisant [4] nous obtenons l'énoncé suivant.

Proposition 3.3. *Soit ρ un morphisme injectif d'un sous-groupe de congruence $\Gamma_3(q)$ de* $\mathsf{SL}_3(\mathbf{Z})$ *dans* $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. *Si $\rho(e_{12}^{qn})$, $\rho(e_{13}^{qn})$ et $\rho(e_{23}^{qn})$ sont, pour un certain n, simultanément conjugués à des éléments de* $\mathsf{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ (*resp.* $\mathsf{Aut}(\mathsf{F}_m)$ *avec $m\geqslant 1$), alors l'image d'un sous-groupe de congruence de* $\mathsf{SL}_3(\mathbf{Z})$ *est, à conjugaison près, un sous-groupe de* $\mathsf{PGL}_3(\mathbf{C})$.

3.3. Rigidité de $\mathsf{SL}_3(\mathbf{Z})$ *: démonstration du Théorème 1.2*

La Proposition 3.2 assure que tout générateur standard de $\Gamma_3(q)$ est virtuellement isotope à l'identité. D'après la Proposition 2.1 et la Remarque 1 les transformations $\rho(e_{12}^{qn})$, $\rho(e_{13}^{qn})$ et $\rho(e_{23}^{qn})$ sont, pour un certain n, conjuguées à des automorphismes d'une surface minimale S ; seuls les cas $S = \mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ et $S = \mathsf{F}_m$, avec $m \geqslant 1$, sont à considérer. Nous obtenons finalement que $\rho(\Gamma_3(p))$ est, pour un certain p, conjugué à un sous-groupe de $\mathsf{PGL}_3(\mathbf{C})$ (Proposition 3.3). Nous pouvons donc supposer que $\rho(\Gamma_3(p))$ est un sous-groupe de $\mathsf{PGL}_3(\mathbf{C})$. La restriction de ρ à $\Gamma_3(p)$ se prolonge alors en un morphisme de groupe de Lie de $\mathsf{PGL}_3(\mathbf{C})$ dans lui-même [14] ; par simplicité de $\mathsf{PGL}_3(\mathbf{C})$, ce prolongement est injectif et donc surjectif. Or d'après le chapitre IV de [6] les automorphismes lisses de $\mathsf{PGL}_3(\mathbf{C})$ s'obtiennent à partir des automorphismes intérieurs et de la contragrédiente ; ainsi, à conjugaison linéaire près, la restriction de ρ à $\Gamma_3(p)$ coïncide avec le plongement canonique ou la contragrédiente. Soit f un élément de $\rho(\Gamma) \setminus \rho(\Gamma_3(p))$ dont le lieu exceptionnel, que nous noterons $\mathcal{C}$, n'est pas vide. Le groupe $\Gamma_3(p)$ est distingué dans Γ ; la courbe $\mathcal{C}$ est donc invariante par tous les éléments de $\rho(\Gamma_3(p))$ donc par tous ceux de $\overline{\rho(\Gamma_3(p))}^Z = \mathsf{PGL}_3(\mathbf{C})$, où l'adhérence est prise au sens de Zariski, ce qui est impossible. Donc f est dans $\mathsf{PGL}_3(\mathbf{C})$.

4. Application aux représentations des groupes $\mathsf{SL}_n(\mathbf{Z})$

Théorème 4.1. *Tout morphisme d'un sous-groupe d'indice fini de $\mathsf{SL}_n(\mathbf{Z})$ dans le groupe de Cremona est d'image finie si $n \geqslant 4$.*

Démonstration. Il suffit de considérer le cas d'un sous-groupe d'indice fini Γ de $\mathsf{SL}_4(\mathbf{Z})$ et d'un morphisme ρ de Γ dans $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Le sous-groupe Γ de $\mathsf{SL}_4(\mathbf{Z})$ contient un sous-groupe de congruence $\Gamma_4(q)$. Notons encore e_{ij} les générateurs standards de $\mathsf{SL}_4(\mathbf{Z})$. Le morphisme ρ induit une représentation fidèle $\tilde{\rho}$ de $\Gamma_3(q) = \langle e_{ij}^q \mid 1 \leqslant i, j \leqslant 3\rangle$ dans $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Le Théorème 1.2 assure qu'à conjugaison près $\tilde{\rho}$ est le plongement canonique ou la contragrédiente. Plaçons nous dans la première éventualité. L'élément $\rho(e_{34}^q)$ commute à $\rho(e_{31}^q) = (x, y, qx + z)$ et le lieu des courbes contractées par $\rho(e_{34}^q)$, noté $\mathsf{Exc}(\rho(e_{34}^q))$, est invariant par $(x, y, qx + z)$. Par ailleurs $\rho(e_{34}^q)$ commute à $\rho(e_{12}^q)$ et $\rho(e_{21}^q)$, autrement dit au $\Gamma_2(q)$ suivant

$$\Gamma \supset \left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{$\Gamma_2(q)$}} & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \mathsf{Bir}\big(\mathbb{P}^2(\mathbf{C})\big).$$

Or l'action de $\mathsf{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{C}^2$ ne laisse pas de courbe invariante ; les éventuelles courbes contractées par $\rho(e_{34}^q)$ sont donc contenues dans la droite à l'infini. L'image de celle-ci par $(x, y, qx + z)$ intersecte $\mathbf{C}^2$; par suite $\mathsf{Exc}(\rho(e_{34}^q))$ est vide et $\rho(e_{34}^q)$ appartient à $\mathsf{PGL}_3(\mathbf{C})$. Nous montrons de la même manière que $\rho(e_{43}^q)$ est un élément de $\mathsf{PGL}_3(\mathbf{C})$. Les relations assurent alors que $\rho(\Gamma_4(q))$ est dans $\mathsf{PGL}_3(\mathbf{C})$; l'image de ρ est donc finie. Un raisonnement analogue permet de conclure lorsque $\tilde{\rho}$ est la contragrédiente. □

Remerciements

Merci à S. Cantat, D. Cerveau, E. Ghys et D. Witte pour leurs remarques et suggestions.

Références

[1] N. Bourbaki, Éléments de mathématique, Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 4, 5 et 6, Masson, Paris, 1981, p. 290.
[2] M. Burger, N. Monod, Bounded cohomology of lattices in higher rank Lie groups, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 1 (2) (1999) 199–235. Erratum, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 1 (3) (1999) 338.
[3] S. Cantat, Version kählérienne d'une conjecture de Robert J. Zimmer, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 37 (5) (2004) 759–768.
[4] S. Cantat, S. Lamy, Groupes d'automorphismes polynomiaux du plan, preprint.
[5] D. Cerveau, E. Ghys, N. Sibony, J.C. Yoccoz, Dynamique et géométrie complexes, Panoramas et Synthèses, vol. 8, Société Mathématique de France, Paris, 1999.
[6] J.A. Dieudonné, La géométrie des groupes classiques, Troisième édition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 5, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
[7] J. Diller, C. Favre, Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces, Amer. J. Math. 123 (6) (2001) 1135–1169.
[8] T.C. Dinh, N. Sibony, Groupes commutatifs d'automorphismes d'une variété kählérienne compacte, Duke Math. J. 123 (2) (2004) 311–328.
[9] J. Franks, M. Handel, Area preserving group actions on surfaces, Geom. Topol. 7 (2003) 757–771 (electronic).
[10] E. Ghys, Sur les groupes engendrés par des difféomorphismes proches de l'identité, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 24 (2) (1993) 137–178.

[11] E. Ghys, Actions de réseaux sur le cercle, Invent. Math. 137 (1) (1999) 199–231.
[12] S. Lamy, L'alternative de Tits pour Aut[$\mathbb{C}^2$], J. Algebra 239 (2) (2001) 413–437.
[13] G. Margulis, Discrete Subgroups of Semisimple Lie Groups, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 17, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
[14] R. Steinberg, Some consequences of the elementary relations in SL_n, in: Finite Groups—Coming of Age (Montreal, Quebec, 1982), in: Contemp. Math., vol. 45, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985, pp. 335–350.
[15] D. Witte, Arithmetic groups of higher $\mathbf{Q}$-rank cannot act on 1-manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. 122 (2) (1994) 333–340.
[16] R.J. Zimmer, Actions of semisimple groups and discrete subgroups, in: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, vols. 1, 2 (Berkeley, CA, 1986), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, pp. 1247–1258.