

Géométrie différentielle

Inégalités de Harnack pour les opérateurs elliptiques d'ordre 2 et 4 et phénomène de concentration

Samy Skander Bahoura

Université de Patras, département de mathématiques, Patras 26500, Grèce

Reçu le 17 février 2006 ; accepté le 27 février 2006

Disponible sur Internet le 11 avril 2006

Présenté par Thierry Aubin

Résumé

Nous donnons quelques résultats concernant les inégalités de type $\sup \times \inf$ pour des opérateurs elliptiques d'ordre 2 et 4. Ces inégalités et le phénomène de concentration nous permettent d'obtenir le comportement asymptotique des solutions de ces EDP. *Pour citer cet article : S.S. Bahoura, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Harnack inequalities for elliptic operators of order 2 and 4, and concentration phenomena. We give some results concerning $\sup \times \inf$ inequalities for some elliptic operators of order 2 and 4. With those inequalities and the concentration phenomena we can describe the asymptotic behavior of those PDE solutions. *To cite this article: S.S. Bahoura, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

Dans la suite nous notons le laplacien géométrique par $\Delta = -\nabla^i \nabla_i$.

Dans cette Note on s'occupe de certaines inégalités de Harnack de type $\sup \times \inf$ et leurs applications aux phénomènes de concentration dans le cas d'opérateurs elliptiques d'ordre 2. Ce type de problèmes est bien connu voir par exemple, [3,4,8,10,13–15,17–19] et les résultats obtenus utilisent les techniques de symétrie voir [12].

Les phénomènes de concentration et leurs conséquences ont beaucoup été étudiées, précisément dans la recherche de meilleurs constantes dans les inégalités de Sobolev voir par exemple [1,2,11,16,21]. En ce qui nous concerne, ce type d'inégalités ($\sup \times \inf$) et le phénomène de concentration, nous permettent de décrire le comportement asymptotic de certaines solutions d'EDP.

Considérons une suite de réels positifs $(\epsilon_i)_{i \geq 0}$ avec $\epsilon_i \rightarrow 0$ et une suite de fonctions $v_{\epsilon_i} > 0$ sur \mathbb{S}_n , telles que :

$$\Delta v_{\epsilon_i} + \frac{n(n-2)}{4} v_{\epsilon_i} = \frac{n-2}{4(n-1)} V_{\epsilon_i} v_{\epsilon_i}^{N-1-\epsilon_i},$$

Adresses e-mail : samybahoura@yahoo.fr, bahoura@ccr.jussieu.fr (S.S. Bahoura).

avec, $N = \frac{2n}{n-2}$, $0 < a \leq V_{\epsilon_i}(x) \leq b < +\infty$, $\forall x \in \mathbb{S}_n$ et $\|\nabla V_{\epsilon_i}\|_\infty \leq A$.

On suppose que pour tout i que les fonctions V_{ϵ_i} et v_{ϵ_i} sont régulières.

Théorème 1. *Sous ces hypothèses la suite (v_{ϵ_i}) vérifie,*

$$\epsilon_i^{(n-2)/2} \left(\sup_{\mathbb{S}_n} v_{\epsilon_i} \right)^{1/4} \times \inf_{\mathbb{S}_n} v_{\epsilon_i} \rightarrow 0. \quad (1)$$

On s'intéresse aussi au problème suivant :

$$\Delta u_i = V_i(|x|) u_i^{N-1-\epsilon_i} \quad \text{dans } B_1(0) \quad \text{et} \quad u_i = 0 \quad \text{sur } \partial B_1(0).$$

Où $B_1(0)$ est la boule unité de \mathbb{R}^n et V_i est une fonction décroissante de $|x|$ qui vérifie $0 < a \leq V_i(|x|) \leq b < +\infty$ pour tout x . On suppose que les fonctions u_i et V_i sont régulières pour tout i .

Théorème 2. *Pour tout compact K de $B_1(0)$,*

$$\sup_{B_1(0)} u_i \times \inf_K u_i \geq c = c(a, b, K, \Omega, n) > 0.$$

2. Application

Considérons le problème suivant :

$$\Delta u_{\epsilon_i} = n(n-2)u_{\epsilon_i}^{N-1-\epsilon_i}, \quad u_{\epsilon_i} > 0 \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad u_{\epsilon_i} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (E)$$

avec, Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n .

Pour ce type d'équation il existe de nombreux résultats de compacité et de comportement asymptotique voir par exemple, [5,14,15].

Nous avons,

Théorème 3.

(i) *Il existe $c_1 = c_1(n, \Omega) > 0$, $c_2 = c_2(n, \Omega) > 0$ telles que :*

$$c_2 \leq \|u_{\epsilon_i}\|_{H^1(\Omega)} \leq c_1.$$

(ii) *Si Ω est étoilé (pour simplifier), alors, il existe une sous-suite (u_{ϵ_j}) pour laquelle, il existe un $m \in \mathbb{N}^*$ et un nombre fini de points de concentrations $x_1, x_2, \dots, x_m \in \Omega$ tels que :*

$$(i) \lim_{\epsilon_j \rightarrow 0} u_{\epsilon_j} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{C}_{\text{loc}}^2(\overline{\Omega} - \{x_1, \dots, x_m\}),$$

$$\forall k \in \{1, \dots, m\}, \exists(x_{j,k}) \text{ avec, } x_{j,k} \rightarrow x_k \text{ et } u_{\epsilon_j}(x_{j,k}) \rightarrow +\infty.$$

$$(ii) \lim_{\epsilon_j \rightarrow 0} u_{\epsilon_j}^{N-\epsilon_j} = \sum_{i=1}^m \mu_i \delta_{x_i} \quad \text{avec } \mu_i \geq \frac{\omega_n}{2^n}.$$

Ici la convergence est au sens des distributions.

(iii) *Pour tout compact K de $\Omega - \{x_1, \dots, x_m\}$, il existe une constante positive $c = c(K, \Omega, n) > 0$ telle que :*

$$\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \times \sup_K u_{\epsilon_j} \leq c.$$

(iv) *Il existe un voisinage ω du bord $\partial\Omega$ et une constante positive $\bar{c} = \bar{c}(\omega, \Omega, n)$ tels que :*

$$\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \times \sup_{\omega} u_{\epsilon_j} \leq \bar{c}.$$

(v) Il existe deux constantes positives, β_1 et β_2 telles que :

$$\beta_1 \leq \epsilon_j \left(\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \right)^2 \leq \beta_2,$$

plus précisément, il existe une fonction $g \in C^2(\partial\Omega)$, telle que,

$$\epsilon_j \left(\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \right)^2 \rightarrow \frac{c_n \int_{\partial\Omega} \langle x | \nu(x) \rangle [\partial_\nu g(\sigma)]^2 d\sigma}{\sum_{k=1}^m \mu_k}.$$

(vi) Il existe m réels positifs $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, $\gamma_k \geq n(n-2)\frac{\omega_n}{2^m}$, $k \in \{1, \dots, m\}$, tels que :

$$\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \times u_{\epsilon_j}(x) \rightarrow \sum_{k=1}^m \gamma_k G(x_k, x) \quad \text{dans } C_{loc}^2(\bar{\Omega} - \{x_1, \dots, x_m\}),$$

où G est la fonction de Green du laplacien avec condition de Dirichlet. On peut prendre, $g = \sum_{k=1}^m \gamma_k G(x_k, \cdot)$ dans le (v).

Concernant certains opérateurs d'ordre 4, il existe des résultats comme [6,7,9,21]. Nous nous occupons maintenant de savoir si pour certains d'entre eux des minoration du produit $\sup \times \inf$ sont possibles.

Sur une variété Riemannienne compacte (M, g) de dimension $n \geq 5$, on considère l'équation suivante :

$$\Delta^2 u_i + b \Delta u_i + c u_i = V_i u_i^{(n+4)/(n-4)}, \quad u_i > 0 \quad \text{sur } M \tag{E'}$$

avec, $b, c > 0$, $c \leq \frac{b^2}{4}$ et $0 \leq V_i(x) \leq A$.

La condition $0 < c \leq \frac{b^2}{4}$ est très utile pour obtenir notre estimation, elle permet d'avoir une fonction de Green avec d'intéressantes propriétés et est utilisée pour appliquer le principe du maximum voir [7].

Théorème 4. Il existe une constante positive $k = k(b, c, A, M, g)$, telle que,

$$\sup_M u_i \times \inf_M u_i \geq k \quad \forall i,$$

où u_i est solution de (E').

Autre résultat sur un ouvert Ω strictement convexe de \mathbb{R}^n avec $n \geq 5$, considérons l'équation :

$$\Delta^2 u_\epsilon = u_\epsilon^{p-\epsilon}, \quad u_\epsilon > 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \text{et } u_\epsilon = \Delta u_\epsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \tag{E''}$$

avec, $p = \frac{n+4}{n-4}$ et $0 < \epsilon \leq \frac{4}{n-4}$.

Théorème 5. Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $c = c(K, \Omega, n) > 0$ telle que pour toute solution u_ϵ de (E''), on ait :

$$\sup_{\Omega} u_\epsilon \times \inf_K u_\epsilon \geq c.$$

Pour les opérateur d'ordre 4, il existe une identité de Pohozaev comme pour ceux d'ordre 2 [20], voir [9], et l'Éq. (E''), avec $\epsilon = 0$, ne possède pas de solutions lorsque l'ouvert Ω est étoilé. Ceci nous pousse à étudier (E'') avec $\epsilon > 0$.

Pour l'Éq. (E''), il est important de remarquer que les points x_ϵ où les solutions u_ϵ sont maximum, restent loin du bord $\partial\Omega$. Ceci est important pour estimer ces solutions près du bord. Ce fait important est réalisé pour les ouverts Ω strictement convexes, la méthode utilisée est celle de symétrie de [12] et la transformation de Kelvin. Pour le laplacien d'ordre 2, l'équation reste invariante par la transformation de Kelvin, ce qui n'est pas le cas pour (E'') et la condition de stricte convexité du domaine peut atténuer la non invariance par cette transformation, voir [9].

Remerciements

Ce travail à été fait pendant le séjour de l'auteur en Grèce. L'auteur tiens à remercier le département de Mathématiques de l'Université de Patras, surtout le Professeur Athanase Cotsiolis et la Fondation IKY pour leur accueil.

Références

- [1] T. Aubin, *Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, 1998.
- [2] T. Aubin, O. Druet, E. Hebey, Best constants in Sobolev inequalities for compact manifolds of nonpositive curvature, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 326 (9) (1998) 1117–1121.
- [3] S.S. Bahoura, Majorations du type $\sup u \times \inf u \leq c$ pour l'équation de la courbure scalaire prescrite sur un ouvert de \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, *J. Math. Pures Appl.* (9) 83 (9) (2004) 1109–1150.
- [4] S.S. Bahoura, Estimations du type $\sup \times \inf$ sur une variété compacte, à paraître.
- [5] H. Brézis, L.A. Peletier, Asymptotic for elliptic equations involving critical growth, in: *Partial Differential Equations and Calculus of Variation*, vol. I, in: *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, vol. 1, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1989, pp. 149–192.
- [6] D. Caraffa, Etude des problèmes elliptiques non linéaires du quatrième ordre avec exposants critiques sur les variétés riemanniennes compactes, *J. Math. Pures Appl.* (9) 83 (1) (2004) 115–136.
- [7] D. Caraffa, Equations elliptiques du quatrième ordre avec exposants critiques sur les variétés riemanniennes compactes, *J. Math. Pures Appl.* (9) 80 (9) (2001) 941–960.
- [8] C.-C. Chen, C.-S. Lin, Estimates of the conformal scalar curvature equation via the method of moving planes, *Comm. Pure Appl. Math.* 37 (1997) 0971–1017.
- [9] K.-S. Chou, D. Geng, Asymptotics of positive solutions for a biharmonic equation involving critical exponent, *Differential Integral Equations* 13 (7–8) (2000) 921–940.
- [10] D.G. De Figueiredo, P.L. Lions, R.D. Nussbaum, A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations, *J. Math. Pures Appl.* 61 (1982) 41–63.
- [11] O. Druet, E. Hebey, F. Robert, *Blow-Up Theory for Elliptic PDEs in Riemannian Geometry*, Math. Notes, vol. 45, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2004.
- [12] B. Gidas, W. Ni, L. Nirenberg, Symmetry and related properties via the maximum principle, *Comm. Math. Phys.* 68 (1979) 209–243.
- [13] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, second ed., Grundlehren Math. Wiss., vol. 224, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [14] Z.-C. Han, Asymptotic approach to singular solutions for nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent, *Ann. Inst. H. Poincaré Analyse Non-Linéaire* 8 (1991) 159–174.
- [15] E. Hebey, Asymptotics for some quasilinear elliptic equations, *Differential Integral Equations* 9 (1) (1996) 71–88.
- [16] E. Hebey, M. Vaugon, The best constant problem in the Sobolev embedding theorem for complete Riemannian manifolds, *Duke Math. J.* 79 (1) (1995) 235–279.
- [17] Y.Y. Li, Prescribing scalar curvature on \mathbb{S}_n and related problems. I, *J. Differential Equations* 120 (2) (1995) 319–410.
- [18] Y.Y. Li, Prescribing scalar curvature on \mathbb{S}_n and related problems. II, *Comm. Pure Appl. Math.* 49 (6) (1996) 541–597.
- [19] J. Moser, On Harnack's theorem for elliptic differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 15 (1961) 577–591.
- [20] S. Pohozaev, Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, *Soviet Math. Dokl.* 6 (1965) 1408–1411.
- [21] R.C.A.M. van der Vorst, Best constant for the embedding of the space $H^2 \cap H_0^1$ into $L^{2N/(N-4)}(\Omega)$, *Differential Integral Equations* 6 (1993) 259–276.