Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 523–525

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Statistique

Estimation par ondelettes dans les systèmes dynamiques

Marie-Louis Vanharen

Université de Reims, UMR-CNRS 6056, département de mathématiques, BP 1039, 51687 Reims cedex, France

Reçu le 30 mai 2005 ; accepté après révision le 6 février 2006

Disponible sur Internet le 6 mars 2006

Présenté par Paul Deheuvels

Résumé

Soit $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ un processus stochastique à valeurs dans $[0,1]$ avec $X_{t+1} = \varphi(X_t)$, φ une transformation dilatante par morceaux, préservant une mesure μ de densité f. Nous donnons des estimateurs consistants de la densité invariante f et de la transformation φ par la méthode des ondelettes linéaire en utilisant la base définie par Cohen, DeVore et Daubechies. Nous obtenons la vitesse optimale de convergence de la MISE. ***Pour citer cet article : M.-L. Vanharen, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abstract

Estimation by wavelets in dynamical systems. Let $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ be a stochastic process valued on $[0,1]$ where $X_{t+1} = \varphi(X_t)$, φ a piecewise expanding map, preserving measure μ with density f. We give consistent estimates of the invariant measure f and the map φ with the linear wavelets method using the base defined by Cohen, DeVore and Daubechies. We obtain the optimal rate of convergence of the MISE. ***To cite this article: M.-L. Vanharen, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

1. Introduction

Soit un système dynamique $([0,1], \mathcal{A}, \varphi, \mu)$, où $\mathcal{A}$ est une tribu sur $[0,1]$ et φ une transformation non linéaire définie et à valeurs sur l'intervalle unité préservant une mesure μ de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue, et supposée de plus dilatante par morceaux. On considère le modèle suivant :

$$X_{t+1} = \varphi(X_t), \quad t \geqslant 0 \tag{1}$$

où chaque X_t est à valeurs dans $[0,1]$. Pour une revue détaillée de ce type de transformation, voir Collet [5], Lasota et Mackey [9]. Le modèle (1) a déjà fait l'objet de nombreux travaux concernant les estimations de la densité invariante f et de la transformation φ, voir par exemple les travaux de Bosq et Guégan [2], Guerre et Maës [7], et Prieur [11]. Les méthodes employées sont souvent les méthodes à noyaux, nous avons donc choisi d'estimer la densité invariante f et la transformation φ par la méthode des ondelettes qui donne ici une approximation optimale de fonctions à variations bornées. L'approximation d'une fonction se fait par analyse multi-résolution (voir Mallat [10]) en considérant la

Adresse e-mail : marielouis.vanharen@univ-reims.fr (M.-L. Vanharen).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2006.02.008

base de Cohen et al. [4]. Le choix de cette base est motivée par le fait qu'elle permet d'étudier les fonctions ayant exactement pour support l'intervalle [0, 1] et aussi parce qu'elle exploite au mieux la régularité de la fonction aux bords (voir [4] pour les détails). Les ondelettes de cette base sont de plus bornées, à support compact, et à régularité variable. Il existe de nombreux résultats statistiques sur les estimations de densité par ondelettes (voir Donoho et al. [6], Härdle et al. [8], ou encore Tribouley [12]). Plus récemment, des méthodes de régression par ondelettes dans le cas de variables aléatoires *i.i.d.* ont été développées (voir par exemple Antoniadis [1], ou encore Tony Cai et Brown [3]). Dans toute la suite, on supposera les hypothèses suivantes vérifiées :

H_1 : X_0 possède une densité f_0 à variation bornée, que l'on notera : $\bigvee_{[0,1]} f_0 < +\infty$. On notera $\|f_0\|_v = \bigvee_{[0,1]} f_0 + \|f_0\|_{L^1}$ sa norme en variation.
H_2 : Soit π l'opérateur de Frobenius–Perron. π admet une unique valeur propre.
H_3 : φ est une transformation dilatante par morceaux de l'unité.

Cette dernière hypothèse est équivalente à dire que φ est de type mélange faible, ce qui implique qu'elle est ergodique (voir Collet [5]), le mélange fort étant bien entendu exclu pour notre modèle. Comme exemple, on peut citer la classe des transformations du type *r-adic* ($\varphi(x) = rx \bmod(1)$, $r \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$) qui vérifie les trois hypothèses précédentes.

2. Estimation de f

Si on désigne par $\{\{\Phi_{Jk}\}_{0\leqslant k<2^{-J}}, \{\Psi_{lk}\}_{j<l\leqslant J, 0\leqslant k<2^{-l}}\}$ la base orthonormée d'ondelettes de l'espace d'approximation V_j, définie par Cohen et al., où J est le niveau maximal de décomposition, vérifiant $2^J \leqslant (2L)^{-1}$ où L est le nombre de moments nuls de l'ondelette de Daubechies Ψ, alors toute densité f sera approximée sur V_j par la fonction f_j définie par :

$$f_j(x) = \sum_{k=0}^{2^{-J}-1} \langle f, \Phi_{Jk}\rangle \Phi_{Jk}(x) + \sum_{l=j+1}^{J} \sum_{k=0}^{2^{-l}-1} \langle f, \Psi_{lk}\rangle \Psi_{lk}(x). \tag{2}$$

Ainsi on définit l'estimateur $\hat{f}_j$ de f_j à partir des observations $X_0, \dots, X_{n-1}$ par :

$$\hat{f}_j(x) = \sum_{k=0}^{2^{-j}-1} \hat{b}_{jk} \Phi_{jk}(x) \quad \text{avec } \hat{b}_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \Phi_{jk}(X_i). \tag{3}$$

La construction de cet estimateur peut être vue de deux manières différentes, la première exploitant l'analyse multirésolution de $L^2[0, 1]$, la deuxième comme une réorganisation des 2^{-j} fonctions de base de la relation (2). Dans les deux cas, on estime les produits scalaires par $\hat{b}_{jk}$. On peut facilement voir que $\hat{f}_j$ est un estimateur sans biais si $f_0 = f$ et asymptotiquement sans biais sinon. Avec les hypothèses précédentes, et ce qui précède, on peut écrire un premier résultat de décroissance exponentielle des corrélations (voir Collet [5]) :

Théorème 2.1. *Soient $X_0, \dots, X_{n-1}$ issues du modèle* (1) *avec $f_0 = f$. On suppose les hypothèses* H_1 *à* H_3 *vérifiées. Alors il existe une constante C_j positive et un nombre ρ, $0 < \rho < 1$ tels que* : $\forall j \leqslant J$, $\forall k \in \{0, 1, \dots, 2^{-l}\}$, $\forall (t, m) \in \mathbb{N}^2$,

$$\left|\operatorname{Cov}\left(\Phi_{jk}(X_t), \Phi_{jk}(X_{t+m})\right)\right| \leqslant C_j \rho^m \|\Psi\|_v \|\Psi\|_\infty.$$

Ce résultat permet de contrôler la convergence de la MISE :

Théorème 2.2. *Soient $X_0, \dots, X_{n-1}$ issues du modèle* (1). *On suppose les hypothèses* H_1 *à* H_3 *vérifiées, alors si* $2^{-j} \simeq O(n^{1/4})$,

$$E\left[\|\hat{f}_j - f\|_{L^2}^2\right] \leqslant O\left(n^{-1/2}\right).$$

3. Estimation de φ

On cherche à estimer la fonction de régression $\varphi(x) = \mathbb{E}[X_{t+1}|X_t = x]$, définie pour $f > 0$. Si φ_j est l'approximation de φ sur V_j, son estimateur noté $\hat{\varphi}_j$ est défini par : $\hat{\varphi}_j = \hat{g}_j / \hat{f}_j$, $\hat{f}_j > 0$ avec $\hat{g}_j(x) = \sum_{k=0}^{2^{-j}-1} \hat{c}_{jk} \Phi_{jk}(x)$ en posant cette fois-ci $\hat{c}_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(X_i) \Phi_{jk}(X_i)$, comme estimateurs des produits scalaires dans l'approximation de g sur V_j. La construction de $\hat{g}_j$ est identique à celle de $\hat{f}_j$. On peut écrire le résultat suivant :

Théorème 3.1. *Soient $X_0, \ldots, X_{n-1}$ observées du modèle* (1). *On suppose les hypothèses* H_1 *à* H_3 *vérifiées, alors si* $2^{-j} \simeq O(n^{1/4})$,

$$E\left[\left\|\hat{\varphi}_j - \varphi\right\|_{L^2}^2\right] \leqslant O\left(n^{-1/2}\right).$$

Références

[1] A. Antoniadis, Dinh Tuan Pham, Wavelet regression for random or irregular design, Comput. Statist. Data Anal. 28 (1998) 353–369.
[2] D. Bosq, D. Guégan, Nonparametric estimation of the chaotic function and the invariant measure of a dynamical system, Statist. Probab. Lett. 25 (1995) 201–212.
[3] T.T. Cai, L.D. Brown, Wavelet estimation for samples with random uniform design, Statist. Probab. Lett. 42 (1999) 313–321.
[4] A. Cohen, R. DeVore, I. Daubechies, Wavelet bases on the interval and fast algorithms, J. Appl. Comput. Harmonic Anal. 1 (1993) 54–81.
[5] P. Collet, Some ergodic properties of maps of the interval, in: R. Bámon, J.-M. Gaubaudo, S. Martínez (Eds.), Dynamical Systems & Frustrated Systems, 1996.
[6] D. Donoho, I. Johnstone, G. Kerkyacharian, D. Picard, Density estimation by wavelet thresholding, Ann. Statist. 24 (1996) 508–539.
[7] E. Guerre, J. Maës, Optimal rate for nonparametric estimation in deterministic dynamical systems, Statist. Inference Stoch. Process. (1998).
[8] W. Härdle, G. Kerkyacharian, D. Picard, A. Tsybakov, Wavelets, Approximation, and Statistical Applications, Lecture Notes in Statist., vol. 129, Springer, 1998.
[9] A. Lasota, M. Mackey, Chaos, Fractals and Noise: Stochastic Aspects of Dynamical Systems, second ed., Springer-Verlag, New York, 1994.
[10] S. Mallat, Une exploration des signaux en ondelettes, Les éditions de l'école Polytechnique, 2000.
[11] C. Prieur, Estimation de la densité invariante de systèmes dynamiques en dimension 1, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 332 (2001) 761–764.
[12] K. Tribouley, Practical estimation of multivariate densities using wavelet methods, Statist. Neerlandica 49 (1995) 41–62.