

Algèbre homologique

Idempotent et cohomologie de Hochschild

Belkacem Bendiffalah, Daniel Guin

*Institut de mathématiques et de modélisation de Montpellier, UMR 5149, université Montpellier II, place Eugène-Bataillon,
34095 Montpellier cedex 5, France*

Reçu le 20 juillet 2005 ; accepté le 16 novembre 2005

Disponible sur Internet le 9 février 2006

Présenté par Henri Cartan

Résumé

Tout idempotent e d'une algèbre (associative unitaire) T définit une algèbre $A = eTe$, d'unité e . Nous montrons que la comparaison des cohomologies de Hochschild $H^*(T, T)$ et $H^*(A, A)$ se fait par un morphisme d'algèbres de Gerstenhaber qui, de surcroît, se factorise par les algèbres de cohomologie de différentes algèbres triangulaires. **Pour citer cet article : B. Bendiffalah, D. Guin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).**

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Idempotent and Hochschild cohomology. Any idempotent element e of an (associative) algebra T defines an algebra $A = eTe$ with unit e . We show that the morphism which compares their Hochschild cohomology algebras is a Gerstenhaber algebras morphism. Moreover, this morphism factorizes through the cohomological algebras of many triangular algebras. **To cite this article: B. Bendiffalah, D. Guin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).**

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Let K denote a fixed commutative ring ($\otimes = \otimes_K$). Unless otherwise stated: for any (K -unital associative) algebra T , modules are left modules; we use the opposite algebra T^o for right modules. For two algebras S and T , we simply call 'bimodules' the $S \otimes T^o$ -modules.

Let us fix an algebra T which is a projective K -module. Given a T -bimodule Λ (i.e. a $T \otimes T^o$ -module), we write $H^*(T, \Lambda) = \text{Ext}_{T \otimes T^o}^*(T, \Lambda)$ for the Hochschild cohomology; recall that the non-functorial module $HH^*T = H^*(T, T)$ is endowed with a 'Gerstenhaber algebra structure', i.e. a graded-commutative algebra structure doubled with a (-1) -graded bilinear bracket which is a derivative in both variables. Let us also fix an idempotent element $e \in T$. It induces a Peirce decomposition: $A = eTe$, $B = (1 - e)T(1 - e)$, $M = eT(1 - e)$ and $N = (1 - e)Te$; it is convenient to adopt a matricial notation $T = \begin{bmatrix} A & M \\ N & B \end{bmatrix}$; idem for the T -bimodule $\Lambda = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix}$.

We wish to obtain the properties of $H^*(T, \Lambda)$ from those of $H^*(A, Y_1)$ and $H^*(B, X_2)$. Let us notice that for the 'triangular' sub-algebra $\begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}$, we have the Happel long exact sequence (e.g. [3,5,7]):

Adresses e-mail : ben@math.univ-montp2.fr (B. Bendiffalah), dguin@math.univ-montp2.fr (D. Guin).

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow \text{Ext}_{A \otimes B^o}^{*-1}(M, Y_2) \longrightarrow H^*\left(\begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}, \Lambda\right) \xrightarrow{r_\Lambda^* = (a_\Lambda^*, b_\Lambda^*)} H^*(A, Y_1) \times H^*(B, X_2) \\ &\longrightarrow \text{Ext}_{A \otimes B^o}^*(M, Y_2) \longrightarrow \dots \end{aligned} \tag{0.1}$$

It defines a Gerstenhaber algebra morphism $r_T^* = (a_T^*, b_T^*)$, when $\Lambda = \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}$ (e.g. [4,6]). For the algebra $T = \begin{bmatrix} A & M \\ N & B \end{bmatrix}$, we also have such a graded morphism $\rho_\Lambda^* = (\alpha_\Lambda^*, \beta_\Lambda^*) : H^*(T, \Lambda) \rightarrow H^*(A, Y_1) \times H^*(B, X_2)$; in [2], Buchweitz showed that $\rho_T^* = (\alpha_T^*, \beta_T^*)$ is an algebra morphism; in [4], Green and Solberg provided a long exact sequence where ρ_T^* takes place under certain assumptions. We prove the following results.

0.2. Theorem. *There is a (functorial in Λ) long exact sequence:*

$$\dots \xrightarrow{\alpha_\Lambda^{*-1}} H^{*-1}(A, Y_1) \longrightarrow H^*(\tilde{T}, \Lambda^b) \longrightarrow H^*(T, \Lambda) \xrightarrow{\alpha_\Lambda^*} H^*(A, Y_1) \longrightarrow \dots \tag{0.3}$$

where $\tilde{T} = \begin{bmatrix} T & Te \\ 0 & eTe \end{bmatrix}$ (triangular algebra) and $\Lambda^b = \begin{bmatrix} \Lambda & \Lambda e \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (\tilde{T} -bimodule). It defines a Gerstenhaber algebra morphism $\alpha_T^* : HH^*\begin{bmatrix} A & M \\ N & B \end{bmatrix} \rightarrow HH^*A$.

The proof of Theorem 0.2 also gives a long exact sequence with a graded morphism β_Λ^* and a Gerstenhaber algebra morphism $\rho_T^* = (\alpha_T^*, \beta_T^*)$. The proof is based on the following argument of [1]: if M is A -projective, one has a (functorial) long exact sequence

$$\dots \longrightarrow H^{*-1}(A, Y_1) \longrightarrow H(\text{cone } C^*(B, \tilde{f}_2)) \longrightarrow H^*\left(\begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}, \Lambda\right) \xrightarrow{a_\Lambda^*} H^*(A, Y_1) \longrightarrow \dots \tag{0.4}$$

where $\text{cone } C^*(B, \tilde{f}_2)$ denotes the cone complex of the Hochschild complex morphism induced by $\tilde{f}_2 : X_2 \rightarrow \text{Hom}_{B^o}(M, Y_2)$, $\tilde{f}_2(x)(m) = mx$ (natural action of M on the T -bimodule Λ), cf. §2.

One can also show that α_T^* is an algebra isomorphism in two cases: (1) if N is A^o -projective, $B = \text{End}_{A^o} N$ and $M = \text{Hom}_{A^o}(N, A)$; (2) M is A -projective, $B = (\text{End}_A M)^o$ and $N = \text{Hom}_A(M, A)$. Moreover, if N is A^o -projective and M is B^o -projective, one can explicit a morphism ξ and a long exact sequence:

$$\dots \longrightarrow H^*(T, \Lambda) \xrightarrow{\rho_\Lambda^*} H^*(A, Y_1) \times H^*(B, X_2) \longrightarrow H^*(T, \text{coker } \xi) \longrightarrow H^{*+1}(T, \Lambda) \longrightarrow \dots \tag{0.5}$$

In spite of the lack of functoriality of HH^* we prove the following striking result:

0.6. Theorem. *For any T -bimodule Λ , we have a (natural) morphism $\mu_\Lambda^* : H^*(T, \Lambda) \rightarrow H^*\left(\begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}, \Lambda\right)$, such that $\rho_\Lambda^* = r_\Lambda^* \circ \mu_\Lambda^*$ and which specializes in a Gerstenhaber algebra morphism μ_T^* .*

There is a similar statement with a graded morphism $\nu_\Lambda^* : H^*(T, \Lambda) \rightarrow H^*\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ N & B \end{bmatrix}, \Lambda\right)$. In particular, the Gerstenhaber algebras $HH^*\begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}$ and $HH^*\begin{bmatrix} A & 0 \\ N & B \end{bmatrix}$ factorise the morphism ρ_T^* . In the proof, we realize that others Gerstenhaber algebras factorize the morphism ρ_T^* , viz the Hochschild cohomology algebras of certain (arbitrary size) triangular algebras: for instance, this is the case for the Gerstenhaber algebra $HH^*\begin{bmatrix} A & M & A & M \\ 0 & B & N & B \\ 0 & 0 & A & M \\ 0 & 0 & 0 & B \end{bmatrix}$. The method we use also suits perfectly well to the study of the Hochschild homology.

1. Introduction

Un anneau commutatif K est fixé ($\otimes = \otimes_K$). Toute algèbre T est une K -algèbre associative unitaire et, sauf mention contraire, un T -module est un module à gauche sur T ; l’algèbre opposée T^o sera utilisée pour les « T -modules à droite ». Un T -bimodule est un $T \otimes T^o$ -module et, s’il n’y a pas d’ambiguïté, un $S \otimes T^o$ -module (où S est une seconde algèbre) sera appelé simplement « bimodule ».

Soient une algèbre T , K -module projectif, et sa cohomologie de Hochschild $H^*(T, \Lambda) = \text{Ext}_{T \otimes T^o}^*(T, \Lambda)$, pour tout T -bimodule Λ . Rappelons que le module $HH^*T = H^*(T, T)$ (non fonctoriel) est une algèbre de Gerstenhaber, i.e. un module muni d’une structure d’algèbre commutative-graduée et d’un crochet bilinéaire (-1) -graduée qui est une dérivation en chacune de ses variables.

Tout élément idempotent $e \in T$ ($e^2 = e$) définit une algèbre $A = eTe$, d'unité e . Notre objectif est d'obtenir les propriétés cohomologiques de T à partir de A et, éventuellement, de $B = (1 - e)T(1 - e)$ (algèbre d'unité $1 - e$) et des $A \otimes B^o$ -modules $M = eT(1 - e)$ (à gauche) et $N = (1 - e)Te$ (à droite). L'écriture matricielle $T = \begin{bmatrix} A & M \\ N & B \end{bmatrix}$ (décomposition de Peirce) est commode pour les calculs : un T -module (resp. T^o -module, T -bimodule) Λ se code par une matrice colonne $\begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix}$ (resp. ligne $[A_1 \ A_2]$, carrée $\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix}$).

Considérons la sous-algèbre « triangulaire » $\begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}$ de T : pour tout $\begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}$ -bimodule $\Lambda = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix}$, nous avons un morphisme gradué $r_\Lambda^* = (a_\Lambda^*, b_\Lambda^*) : H^*(\begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}, \Lambda) \rightarrow H^*(A, Y_1) \times H^*(B, X_2)$ qui participe à la suite exacte longue de Happel (e.g. [3,5,7]) ; pour $\Lambda = \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}$, il se spécialise en un morphisme d'algèbres de Gerstenhaber $r_T^* = (a_T^*, b_T^*)$ dont le noyau est contenu dans les annulateurs (à gauche et à droite) de l'idéal $\bigoplus_{i \geq 1} HH^i[\begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}]$ (e.g. [4,6]). Dans le cas non triangulaire $T = \begin{bmatrix} A & M \\ N & B \end{bmatrix}$, on a aussi un morphisme gradué $\rho_\Lambda^* = (\alpha_\Lambda^*, \beta_\Lambda^*) : H^*(T, \Lambda) \rightarrow H^*(A, Y_1) \times H^*(B, X_2)$ [2,4] : Buchweitz prouve que ρ_Λ^* se spécialise en un morphisme d'algèbres graduées $\rho_T^* = (\alpha_T^*, \beta_T^*)$; Green et Solberg montrent (sous certaines hypothèses) que le morphisme ρ_T^* fait partie d'une suite exacte longue.

Nous nous proposons de préciser et d'améliorer certains de ces résultats à l'aide de techniques « triangulaires » de [1] (en particulier la suite exacte longue 2.5). Nous donnons dans §2 des suites exactes longues comportant des morphismes gradués α_Λ^* et β_Λ^* (fonctoriels) et montrons que le morphisme $\rho_\Lambda^* = (\alpha_\Lambda^*, \beta_\Lambda^*)$ se spécialise en un morphisme d'algèbres de Gerstenhaber $\rho_T^* = (\alpha_T^*, \beta_T^*)$. Dans §3, nous construisons un morphisme (gradué, fonctoriel) $\mu_\Lambda^* : H^*(\begin{bmatrix} A & M \\ N & B \end{bmatrix}, \Lambda) \rightarrow H^*(\begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}, \Lambda)$ tel que $\rho_\Lambda^* = r_\Lambda^* \circ \mu_\Lambda^*$ et qui se spécialise en un morphisme d'algèbres de Gerstenhaber μ_T^* . Plus curieusement, nous factorisons ρ_T^* par des algèbres de cohomologie de Hochschild d'algèbres triangulaires de tailles arbitraires.

Notre méthode s'adapte *mutatis mutandis* à l'homologie de Hochschild $H_*(T, \Lambda) = \text{Tor}_*^{T \otimes T^o}(T, \Lambda)$.

2. Le résultat principal

L'écriture matricielle $T = \begin{bmatrix} A & M \\ N & B \end{bmatrix}$ n'encode pas toute la structure algébrique : il faut tenir compte des actions mutuelles de M et de N , lesquelles se traduisent par des morphismes « structuraux » $M \otimes_B N \xrightarrow{\sigma} A$ et $N \otimes_A M \xrightarrow{\tau} B$. Dans la décomposition de Peirce d'un T -bimodule $\Lambda = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix}$, sont aussi sous-entendus des morphismes de bimodules pour l'action à gauche $f_i : M \otimes_B X_i \rightarrow Y_i$ et $g_i : N \otimes_A Y_i \rightarrow X_i$ ($i = 1, 2$), et d'autres pour l'action à droite $\varphi_Y : Y_1 \otimes_A M \rightarrow Y_2$, $\varphi_X : X_1 \otimes_A M \rightarrow X_2$, $\psi_Y : Y_2 \otimes_A M \rightarrow Y_1$ et $\psi_X : X_2 \otimes_B N \rightarrow X_1$; ces morphismes satisfont des propriétés d'associativité.

2.1. Théorème. *Nous avons une suite exacte longue fonctorielle en Λ :*

$$\dots \xrightarrow{\alpha_\Lambda^{*-1}} H^{*-1}(A, Y_1) \longrightarrow H^*(\tilde{T}, \Lambda^b) \longrightarrow H^*(\begin{bmatrix} A & M \\ N & B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix}) \xrightarrow{\alpha_\Lambda^*} H^*(A, Y_1) \longrightarrow \dots \quad (2.2)$$

où $\tilde{T} = \begin{bmatrix} T & Te \\ 0 & eTe \end{bmatrix}$ (algèbre triangulaire) et $\Lambda^b = \begin{bmatrix} A & Ae \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (\tilde{T} -bimodule). Le morphisme α_Λ^* est un morphisme d'algèbres de Gerstenhaber $HH^*\begin{bmatrix} A & M \\ N & B \end{bmatrix} \rightarrow HH^*A$.

2.3. Preuve. Si $N = 0$, nous avons la suite exacte longue de Happel pour l'algèbre « triangulaire » $T = \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow \text{Ext}_{A \otimes B^o}^{*-1}(M, Y_2) \longrightarrow H^*(\begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}, \Lambda) \xrightarrow{r_\Lambda^* = (a_\Lambda^*, b_\Lambda^*)} H^*(A, Y_1) \times H^*(B, X_2) \\ &\longrightarrow \text{Ext}_{A \otimes B^o}^*(M, Y_2) \longrightarrow \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

Il s'agit d'une suite fonctorielle en Λ , indépendante de X_1 , et le morphisme $r_T^* = (a_T^*, b_T^*)$ ($\Lambda = \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}$) est un morphisme d'algèbres de Gerstenhaber. Si, de plus, M est A -projectif, on a une suite exacte longue :

$$\dots \longrightarrow H^{*-1}(A, Y_1) \longrightarrow H(\text{cone } C^*(B, \tilde{f}_2)) \longrightarrow H^*(\begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}, \Lambda) \xrightarrow{\alpha_\Lambda^*} H^*(A, Y_1) \longrightarrow \dots \quad (2.5)$$

(fonctorielle) où $\text{cone } C^*(B, \tilde{f}_2)$ est le complexe cône du morphisme de complexes de Hochschild $C^*(B, \tilde{f}_2)$ et $\tilde{f}_2 : X_2 \rightarrow \text{Hom}_{B^o}(M, Y_2)$ est le morphisme transposé de f_2 . Pour T et e quelconques, tout ceci s'applique justement à l'algèbre triangulaire $\tilde{T} = \begin{bmatrix} T & Te \\ 0 & eTe \end{bmatrix}$ (le T -module Te est projectif) ; pour le \tilde{T} -bimodule $\tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} A & Ae \\ 0 & eAe \end{bmatrix}$, l'application

structurale $e\Lambda e \rightarrow \text{Hom}_T(Te, \Lambda e)$ est bijective ; de là un isomorphisme gradué $\tilde{a}_\Lambda^* : H^*(\tilde{T}, \tilde{\Lambda}) \cong H^*(T, \Lambda)$ fonctoriel avec 2.5, qui se spécialise en un isomorphisme d’algèbres de Gerstenhaber $\tilde{a}_T^* : HH^*\tilde{T} \cong HH^*T$. Considérons la suite exacte courte canonique de \tilde{T} -bimodules $0 \rightarrow [\begin{smallmatrix} \Lambda & \Lambda e \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}] \rightarrow [\begin{smallmatrix} \Lambda & \Lambda e \\ 0 & e\Lambda e \end{smallmatrix}] \xrightarrow{\tilde{b}_\Lambda} [\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e\Lambda e \end{smallmatrix}] \rightarrow 0$; elle donne une suite exacte longue en cohomologie de Hochschild, fonctorielle en Λ , dont on remplace les termes pour obtenir 2.2 ; par exemple on utilise $H^*(\tilde{T}, [\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e\Lambda e \end{smallmatrix}]) \cong H^*(eTe, e\Lambda e)$ (2.4, avec \tilde{T}) ; pour $\Lambda = T$, nous avons la spécialisation de \tilde{b}_Λ^* en un morphisme d’algèbres de Gerstenhaber $\tilde{b}_T^* : HH^*\tilde{T} \rightarrow HH^*eTe$. Nous posons $\alpha_\Lambda^* = \tilde{b}_\Lambda^*(\tilde{a}_\Lambda^*)^{-1}$ et $\alpha_T^* = \tilde{b}_T^*(\tilde{a}_T^*)^{-1}$. \square

Le résultat suivant n’utilise que les propriétés élémentaires de la cohomologie des algèbres triangulaires.

2.6. Corollaire. Soient une algèbre T (K -module projectif) et des idempotents $e \in T, f \in eTe$: on note $\alpha_{T,e}^*$ le morphisme fonctoriel α_Λ^* de 2.2. Pour tout T -bimodule Λ , le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccc}
 H^*(T, \Lambda) & \xrightarrow{\alpha_{T,e}^*} & H^*(eTe, e\Lambda e) \\
 \searrow \alpha_{T,f}^* & & \swarrow \alpha_{eTe,f}^* \\
 & H^*(fTf, f\Lambda f) &
 \end{array} \tag{2.7}$$

Pour $\Lambda = T$, il s’agit d’un diagramme commutatif d’algèbres de Gerstenhaber.

2.8. Corollaire. Si (1) N est A^o -projectif, $B = \text{End}_{A^o} N$ et $M = \text{Hom}_{A^o}(N, A)$, ou si (2) M est A -projectif, $B = (\text{End}_A M)^o$ et $N = \text{Hom}_A(M, A)$, le morphisme $\alpha_T^* : HH^*[\begin{smallmatrix} A & M \\ N & B \end{smallmatrix}] \rightarrow HH^*A$ est un isomorphisme d’algèbres de Gerstenhaber.

Dans les hypothèses (1) et (2), les morphismes structuraux de $T = [\begin{smallmatrix} A & M \\ N & B \end{smallmatrix}]$ sont canoniques. Par exemple, dans le cas (1) : $\forall n, n' \in N, f \in \text{Hom}_{A^o}(N, A), \sigma(f \otimes n) = f(n)$ et $\tau(n \otimes f)(n') = nf(n')$.

2.9. Preuve. Nous reprenons les notations de 2.3. Du $T \otimes A^o$ -module $[\begin{smallmatrix} Y_1 \\ X_1 \end{smallmatrix}]$, nous déduisons un morphisme naturel de T -bimodules $\xi_1 : \Lambda \rightarrow \bar{\mathcal{E}}_1 = \text{Hom}_{A^o}([\begin{smallmatrix} A \\ N \end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix} Y_1 \\ X_1 \end{smallmatrix}])$. Si N est A^o -projectif, alors $Te = [\begin{smallmatrix} A \\ N \end{smallmatrix}]$ est eTe^o -projectif et nous avons une suite exacte longue telle 2.5 (ou plutôt sa version duale, quand M est B^o -projectif, cf. [1]) applicable à \tilde{T} et $\tilde{\Lambda}$:

$$\dots \rightarrow H^{*-1}(A, Y_1) \rightarrow H(\text{cone } C^*(T, \xi_1)) \rightarrow H^*([\begin{smallmatrix} A & M \\ N & B \end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix} Y_1 & Y_2 \\ X_1 & X_2 \end{smallmatrix}])) \xrightarrow{\alpha_\Lambda^*} H^*(A, Y_1) \rightarrow \dots$$

Si ξ_1 est un isomorphisme, α_Λ^* est un isomorphisme avec $\Lambda = [\begin{smallmatrix} Y_1 & \text{Hom}_{A^o}(N, Y_1) \\ X_1 & \text{Hom}_{A^o}(N, X_1) \end{smallmatrix}]$; c’est ce que propose les hypothèses (1) du corollaire avec $\Lambda = T$. Le raisonnement est similaire avec les hypothèses (2). \square

Cette preuve montre que $\beta_T^* : HH^*[\begin{smallmatrix} A & M \\ N & B \end{smallmatrix}] \rightarrow HH^*B$ est un isomorphisme d’algèbres de Gerstenhaber :

(3) si M est B^o -projectif, $A = \text{End}_{B^o} M$ et $N = \text{Hom}_{B^o}(M, B)$, ou

(4) si N est B -projectif, $A = (\text{End}_B N)^o$ et $M = \text{Hom}_B(N, B)$.

Au lieu du morphisme ξ_1 on utilisera, par exemple pour montrer (3), le morphisme de T -bimodules $\xi_2 : \Lambda \rightarrow \bar{\mathcal{E}}_2$, avec $\bar{\mathcal{E}}_2 = \text{Hom}_{A^o}([\begin{smallmatrix} A \\ N \end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix} Y_2 \\ X_2 \end{smallmatrix}]))$. Introduisons le morphisme injectif $\xi = (\xi_1, \xi_2) : \Lambda \rightarrow \bar{\mathcal{E}}_1 \times \bar{\mathcal{E}}_2$.

2.10. Corollaire. Si N est A^o -projectif et M est B^o -projectif, nous avons une suite exacte longue :

$$\dots \rightarrow H^*(T, \Lambda) \xrightarrow{\rho_\Lambda^*} H^*(A, Y_1) \times H^*(B, X_2) \rightarrow H^*(T, \text{coker } \xi) \rightarrow H^{*+1}(T, \Lambda) \rightarrow \dots$$

3. Algèbres triangulaires

Il s’agit à présent de construire des algèbres de Gerstenhaber, factorisant le morphisme ρ_T^* .

3.1. Théorème. Pour tout $[\begin{smallmatrix} A & M \\ N & B \end{smallmatrix}]$ -bimodule Λ , on a un morphisme $\mu_\Lambda^* : H^*([\begin{smallmatrix} A & M \\ N & B \end{smallmatrix}], \Lambda) \rightarrow H^*([\begin{smallmatrix} A & M \\ 0 & B \end{smallmatrix}], \Lambda)$ (naturel) tel que $\rho_\Lambda^* = r_\Lambda^* \circ \mu_\Lambda^*$ et qui se spécialise en un morphisme d'algèbres de Gerstenhaber μ_T^* .

Nous avons un énoncé identique avec un morphisme $\nu_\Lambda^* : H^*([\begin{smallmatrix} A & M \\ N & B \end{smallmatrix}], \Lambda) \rightarrow H^*([\begin{smallmatrix} A & 0 \\ N & B \end{smallmatrix}], \Lambda)$. En particulier, nous avons le diagramme commutatif d'algèbres de Gerstenhaber :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & HH^* A & & \\
 & c_T^* \nearrow & \uparrow \alpha_T^* & \nwarrow a_T^* & \\
 HH^* [\begin{smallmatrix} A & 0 \\ N & B \end{smallmatrix}] & \xleftarrow{\nu_T^*} & HH^* [\begin{smallmatrix} A & M \\ N & B \end{smallmatrix}] & \xrightarrow{\mu_T^*} & HH^* [\begin{smallmatrix} A & M \\ 0 & B \end{smallmatrix}] \\
 & d_T^* \searrow & \downarrow \beta_T^* & \swarrow b_T^* & \\
 & & HH^* B & &
 \end{array} \tag{3.2}$$

3.3. Preuve. Considérons l'algèbre triangulaire $\bar{T} = [\begin{smallmatrix} T & T \\ 0 & \check{T} \end{smallmatrix}]$, où $\check{T} = [\begin{smallmatrix} A & M \\ 0 & B \end{smallmatrix}]$, ainsi que le \bar{T} -bimodule $\bar{\Lambda} = [\begin{smallmatrix} A & \Lambda \\ 0 & \Lambda \end{smallmatrix}]$. Avec 2.4, nous avons des morphismes $\bar{a}_\Lambda^* : H^*(\bar{T}, \bar{\Lambda}) \rightarrow H^*(T, \Lambda)$ et $\bar{b}_\Lambda^* : H^*(\bar{T}, \bar{\Lambda}) \rightarrow H^*(\check{T}, \Lambda)$. Le T -module T étant projectif et le transposé de $\bar{f}_2 : T \otimes_{\check{T}} \Lambda \rightarrow \Lambda$ (morphisme structural de $\bar{\Lambda}$) étant l'isomorphisme de \check{T} -bimodules $I_\Lambda : \Lambda \cong \text{Hom}_T(T, \Lambda)$, le morphisme \bar{a}_Λ^* est bijectif (cf. 2.5) et nous définissons $\mu_\Lambda^* = \bar{b}_\Lambda^*(\bar{a}_\Lambda^*)^{-1} : H^*(T, \Lambda) \rightarrow H^*(\check{T}, \Lambda)$; c'est un morphisme fonctoriel en Λ , se spécialisant en un morphisme d'algèbres de Gerstenhaber $\mu_T^* : HH^* T \rightarrow HH^* \check{T}$. La factorisation $\rho_\Lambda^* = r_\Lambda^* \circ \mu_\Lambda^*$ est évidente à présent : c'est une propriété de base des morphismes a^* et b^* de 2.4, quand on les compose dans le cadre des « algèbres triangulaires d'ordre 3 ». \square

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, définissons l'algèbre T_e^n par la matrice triangulaire d'ordre n ci-dessous :

$$T_e^n = \begin{bmatrix} A & M & A & M & \cdots & A & M \\ 0 & B & N & B & \cdots & N & B \\ 0 & 0 & A & M & \cdots & A & M \\ 0 & 0 & 0 & B & \cdots & N & B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{bmatrix};$$

suivant que n est pair ou impair, le terme inférieur-droit est respectivement B ou A ; de même, nous avons des algèbres T_{1-e}^n . Nous obtenons ainsi des morphismes (surjectifs) d'algèbres $a_n : T_e^{n+1} \rightarrow T_e^n$, $b_n : T_e^{n+1} \rightarrow T_{1-e}^n$, $c_n : T_{1-e}^{n+1} \rightarrow T_e^n$ et $d_n : T_{1-e}^{n+1} \rightarrow T_{1-e}^n$, à l'origine d'un diagramme commutatif de morphismes d'algèbres de Gerstenhaber :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{(infini à gauche)} & \cdots & \dashrightarrow & HH^* T_e^{n+1} & \longrightarrow & HH^* T_e^n & \longrightarrow & HH^* T_e^{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & HH^* T_e^1 \\
 & & \nearrow & \searrow & & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & & \nearrow & \searrow \\
 & \cdots & \dashrightarrow & HH^* T_{1-e}^{n+1} & \longrightarrow & HH^* T_{1-e}^n & \longrightarrow & HH^* T_{1-e}^{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & HH^* T_{1-e}^1
 \end{array}$$

3.4. Théorème. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, nous avons des morphismes d'algèbres de Gerstenhaber $\alpha_n^* : HH^* T \rightarrow HH^* T_e^{n+1}$ et $\beta_n^* : HH^* T \rightarrow HH^* T_{1-e}^{n+1}$, ainsi qu'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & HH^* T_e^n & & \\
 & c_n^* \nearrow & \uparrow \alpha_{n-1}^* & \nwarrow a_n^* & \\
 HH^* T_{1-e}^{n+1} & \xleftarrow{\beta_n^*} & HH^* [\begin{smallmatrix} A & M \\ N & B \end{smallmatrix}] & \xrightarrow{\alpha_n^*} & HH^* T_e^{n+1} \\
 & d_n^* \searrow & \downarrow \beta_{n-1}^* & \swarrow b_n^* & \\
 & & HH^* T_{1-e}^n & &
 \end{array} \tag{3.5}$$

C'est une généralisation du diagramme (3.2) ($\alpha_0^* = \alpha_T^*$, $\alpha_1^* = \mu_T^*$, $\beta_0^* = \beta_T^*$ et $\beta_1^* = \nu_T^*$) et, en particulier, le morphisme $\rho_T^* : HH^* \begin{bmatrix} A & M \\ N & B \end{bmatrix} \rightarrow HH^* \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ se factorise par $HH^* T_e^n$ et $HH^* T_{1-e}^n$, $n \geq 2$.

3.6. Preuve. Soit $n \geq 1$. On considère l'algèbre triangulaire $\overline{T}^n = \begin{bmatrix} T & \overline{M}_e^n \\ 0 & T_e^n \end{bmatrix}$, où $\overline{M}_e^n = \begin{bmatrix} A & M & A & \dots \\ N & B & N & \dots \end{bmatrix}$ (n colonnes) est clairement un $T \otimes (T_e^n)^o$ -module. Avec 2.4, nous obtenons des morphismes d'algèbres de Gerstenhaber $\overline{a}_n^* : HH^* \overline{T}^n \rightarrow HH^* T$ et $\overline{b}_n^* : HH^* \overline{T}^n \rightarrow HH^* T_e^n$. Or \overline{M}_e^n est évidemment T -projectif et

$$\text{End}_T(\overline{M}_e^n) = \begin{bmatrix} A & M & A & M & \dots \\ N & B & N & B & \dots \\ A & M & A & M & \dots \\ N & B & N & B & \dots \\ A & M & A & M & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (\text{matrice carrée d'ordre } n).$$

Nous avons une suite exacte longue de type 2.5 et, puisque le (transposé du) morphisme structural est injectif, l'homologie du complexe cône est donné par $H^{*-1}(T_e^n, \text{End}_T(\overline{M}_e^n)/T_e^n)$. Une simple récurrence sur n adaptant 2.4 (« indépendance par rapport à X_1 ») à l'algèbre triangulaire supérieure T_e^n (d'ordre n), montre l'annulation $H^{*-1}(T_e^n, \text{End}_T(\overline{M}_e^n)/T_e^n) = 0$: en effet, le coefficient $\text{End}_T(\overline{M}_e^n)/T_e^n$ est une matrice triangulaire *strictement inférieure*. Donc \overline{a}_n^* est un isomorphisme et nous posons $\alpha_{n-1}^* = \overline{b}_n^*(\overline{a}_n^*)^{-1}$; on obtient les morphismes β_n^* avec une construction similaire ; on retrouve la définition de α_T^* (2.3) et β_T^* , ainsi que celle de μ_T^* et ν_T^* (3.3). Il ne nous reste plus qu'à montrer la commutativité du diagramme (3.5) : nous explicitons celle du coin haut-droit, le reste du diagramme se traitant pareillement. Pour des idempotents évidents $\overline{e} \in \overline{T}_e^{n+1}$ et $\overline{f} \in T_e^{n+1}$, nous avons $T_e^{n+1} = \overline{e} \overline{T}_e^{n+1} \overline{e}$ et $T_e^n = \overline{f} T_e^{n+1} \overline{f}$. Nous appliquons alors le Corollaire 2.6 et obtenons $\alpha_{n-1}^* = a_n^* \alpha_n^*$. \square

Références

[1] B. Bendiffalah, D. Guin, Cohomologie de l'algèbre triangulaire et applications, J. Algebra 282 (2004) 513–537.
 [2] R.-O. Buchweitz, Morita contexts, idempotents, and Hochschild cohomology – with applications to invariant rings, Contemp. Math. 331 (2003) 25–53.
 [3] C. Cibils, Tensor Hochschild homology and cohomology, in: Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 210, Dekker, New York, 2000, pp. 35–51.
 [4] E.L. Green, Ø. Solberg, Hochschild cohomology rings and triangular rings, in: Representations of Algebras I & II, Beijing Normal University Press, 2002, pp. 192–200.
 [5] D. Happel, Hochschild cohomology of finite dimensional algebras, in: Lecture Notes in Math., vol. 1404, Springer, 1989, pp. 108–126.
 [6] B. Keller, Derived invariance of higher structures on the Hochschild complex, Preprint, 2003.
 [7] S. Michelena, M.I. Platzeck, Hochschild cohomology of triangular matrix algebra, J. Algebra 233 (2000) 502–525.