Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 135–139
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Probabilités/Équations différentielles

Fluctuation des processus de Lévy et dispersion (« scattering »)

Sonia Fourati [a,b]

[a] *LMI de l'INSA de Rouen, place Emile-Blondel, 76130 Mont St Aignan, France*
[b] *LPMA des universités Paris VI et VII, 4, place Jussieu, case 188, 75252 Paris cedex 05, France*

Reçu le 2 septembre 2005 ; accepté après révision le 15 novembre 2005

Disponible sur Internet le 13 décembre 2005

Présenté par Marc Yor

Résumé

Nous mettons en évidence une correspondance entre le problème des fluctuations des processus de Lévy et la théorie du scattering. ***Pour citer cet article : S. Fourati, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abstract

Fluctuations of Lévy processes and scattering theory. We show a strong connexion between the problem of fluctuations of Lévy processes and scattering theory. ***To cite this article: S. Fourati, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abridged English version

Let X be a Lévy process killed at an independent time with an exponential law or a 'Lebesgue law'. Let H and H^* be the distribution functions of the amplitude of the paths of X, respectively, before and after the time of the minimum. Then the matrix (whose entries are non-negative measures)

$$\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{H(\mathrm{d}x)}{H^*(x)} \\ \dfrac{H^*(\mathrm{d}x)}{H(x)} & 0 \end{pmatrix}$$

defines a potential in the sense of scattering theory (see for example [4, Chapitre 1]). We show that the scattering matrix associated to this potential is

$$\begin{pmatrix} 1 & \phi(\mathrm{i}u) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

where ϕ is the Lévy exponent of X. Meanwhile, the solution of the differential system associated to this potential determines an expression of the potential kernel (in the sense of Markov process theory) of the stochastic process (S_t, X_t, I_t) where S and I are respectively the processes of past maximum and of past minimum of X.

Adresse e-mail : fourati@ccr.jussieu.fr (S. Fourati).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.11.012

1. Introduction

Nous présentons des résultats qui établissent le lien entre deux problèmes « classiques » issus l'un de la théorie des fluctuations des processus de Lévy et l'autre du scattering. Le premier est la détermination du noyau potentiel du processus de Markov (S_t, X_t, I_t), où X est un processus de Lévy, S et I sont respectivement le processus de ses maximums et ses minimums passés. Le second est le calcul de la matrice potentiel à partir de la matrice de scattering ou réciproquement.

En effet, nous montrons que se donner la matrice potentiel revient à se donner le couple des fonctions de répartition des amplitudes avant et après l'instant du minimum de X (voir la section sur le problème direct) alors que la matrice de scattering est donnée par l'exposant de Lévy (voir la section sur le problème inverse).

Une adaptation mineure de la théorie générale du scattering est nécessaire parce que l'hypothèse habituelle d'intégrabilité du potentiel n'est vérifiée pour aucun processus de Lévy. En revanche, la matrice de scattering est particulièrement simple.

2. Notations

On se donne pour toute la suite un processus de Lévy X, de loi $\mathbf{P}$, éventuellement tué en un temps exponentiel indépendant, noté ζ. La lettre ϕ désignera l'exposant de Lévy de X. Plus précisemment, pour $\mathrm{i}u \in \mathrm{i}\mathbf{R}$,

$$\mathbf{P}\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}uX_t}\big) = \mathrm{e}^{-t\phi(\mathrm{i}u)}.$$

Remarquer que $\phi(0) \in [0, +\infty[$ est le paramètre de la loi exponentielle du temps de mort ζ.

On note S_t et I_t les processus des maximums et miminums passés.

$$S_t = \sup\{X_s,\ 0 \leqslant s \leqslant t\}, \qquad I_t = \inf\{X_s,\ 0 \leqslant s \leqslant t\}.$$

Dans toute la suite, le symbole * désignera les objets correspondant au processus de Lévy dual $X^* = -X$. On a, par exemple $S_t^* = -I_t$.

On note (L, N) le couple temps local-mesure d'excursion associé aux zéros du processus $(S_t - X_t) \wedge (S_{t^-} - X_{t^-})$. Plus précisement, L est une fonctionnelle additive de l'ensemble régénératif $\{t;\, (S_t - X_t) \wedge (S_{t^-} - X_{t^-}) = 0\}$. Tandis que N est une mesure sur l'espace des trajectoires à durée de vie finie ou infinie (voir [2, Chapitre 15] par exemple). Notant alors C l'ensemble des composantes connexes du complémentaire de l'ensemble $\{t;\, (S_t - X_t) \wedge (S_{t^-} - X_{t^-}) = 0\}$, le couple (L, N) vérifie l'identité suivante :

$$\mathbf{P}\Bigg(\sum_{]g,d[\,\cap\,]0,\zeta[\,\in C} 1_{\{S_g \in \mathrm{d}x\} \cap \{(S_g - X_{g+t\wedge d})_{t \geqslant 0} \in \mathrm{d}w\}}\Bigg) = \mathbf{P}\Bigg(\int\limits_{[0,\zeta[} 1_{S_t \in \mathrm{d}x} L(\mathrm{d}t)\Bigg) N(\mathrm{d}w).$$

Un tel couple existe et si (L, N) est un tel couple alors tous les autres sont de la forme $(cL, \frac{1}{c}N)$ pour une constante strictement positive et finie c. Le couple (L^*, N^*) est défini par dualité. Le couple des temps locaux (L, L^*) vérifie l'identité dite de Wiener–Hopf (voir [1, Chapitre 6] ou [3]) à savoir qu'il existe une constante $c \in]0, +\infty[$ telle que pour tout $\mathrm{i}u \in \mathrm{i}\mathbf{R}$

$$\mathbf{P}\Bigg(\int\limits_{[0,\zeta[} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}uS_t} L(\mathrm{d}t)\Bigg) \mathbf{P}\Bigg(\int\limits_{[0,\zeta[} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}uI_t} L^*(\mathrm{d}t)\Bigg) = \frac{c}{\phi(\mathrm{i}u)}.$$

On peut choisir alors le couple (L, L^*) et donc le quadruplet (L, N, L^*, N^*) de telle manière que $c = 1$. On choisit donc un quadruplet de cette manière et il sera fixé pour tout la suite. De plus on notera ψ et $\check{\psi}$ les deux facteurs de la décomposition de Wiener–Hopf associée :

$$\frac{1}{\psi(\lambda)} := \mathbf{P}\Bigg(\int\limits_{[0,\zeta[} \mathrm{e}^{-\lambda S_t} L(\mathrm{d}t)\Bigg), \qquad \frac{1}{\check{\psi}(\lambda)} := \mathbf{P}\Bigg(\int\limits_{[0,\zeta[} \mathrm{e}^{-\lambda I_t} L^*(\mathrm{d}t)\Bigg).$$

Pour toute fonction f d'un nombre complexe λ, définie à partir du processus de Lévy X, $\check{f}$ désignera la fonction $\check{f}(\lambda) = f^*(-\lambda)$. Pour tout $x \in]0, +\infty[$ et tout complexe λ, on pose

$$A(x, \lambda) = \mathbf{P}\Bigg(\int\limits_{[0,\zeta[} 1_{S_t - I_t \leqslant x}\, \mathrm{e}^{-\lambda S_t} L(\mathrm{d}t)\Bigg).$$

Et donc, on a :

$$\check{A}(x,\lambda)=\mathbf{P}\left(\int_{[0,\zeta[} 1_{S_t-I_t\leqslant x}\,\mathrm{e}^{-\lambda I_t}L^*(\mathrm{d}t)\right).$$

Proposition 2.1. *Pour tout* $\lambda_1\in\mathbf{C}$ *et* $\lambda_2\in\mathbf{C}$ *et* $x\in\,]0,+\infty]$

$$\begin{aligned}\check{A}(x,\lambda_1)A(x,\lambda_2)&=\mathbf{P}\left(\int_{[0,\zeta[}\mathrm{e}^{-\lambda_1 I_t}1_{S_t-I_t\leqslant x}\,\mathrm{e}^{-\lambda_2(X_t-I_t)}\,\mathrm{d}t\right)\\&=\mathbf{P}\left(\int_{[0,\zeta[}\mathrm{e}^{-\lambda_1(X_t-S_t)}1_{S_t-I_t\leqslant x}\,\mathrm{e}^{-\lambda_2 S_t}\,\mathrm{d}t\right).\end{aligned}$$

Cette proposition indique que le couple de fonctions $(A,\check{A})$ permet de calculer le noyau potentiel du processus de Markov (S_t,X_t,I_t) (et réciproquement). Pour $\lambda_1=\lambda_2=\mathrm{i}u\in\mathrm{i}\mathbf{R}$ et $x\to+\infty$, l'identité de la proposition précédente est la factorisation de Wiener–Hopf.

On introduit maintenant des fonctions du couple (x,λ) « auxiliaires » : Pour $x\in\,]0,+\infty[$ et $\Re(\lambda)\geqslant 0$, on pose

$$\begin{aligned}C(x,\lambda)&=N^*\left(\mathrm{e}^{-\lambda X_{T_x}};\ T_x>0\right)\quad\text{où } T_x=\inf\{t,\ X_t>x\},\\B(x,\lambda)&=\frac{1}{\mathbf{P}(\int_0^{T_x^s\wedge\zeta}\mathrm{e}^{-\lambda S_t}L(\mathrm{d}t))}\quad\text{où } T_x^s=\inf\{t,\ S_t-X_t>x\}.\end{aligned}$$

Pour tout $x\in\,]0,+\infty[$ et $\lambda\in\mathbf{C}\backslash\mathrm{i}\mathbf{R}$, on pose encore

$$\begin{aligned}M(x,\lambda)&=\begin{pmatrix}A(x,\lambda)&-C(x,\lambda)\\\check{A}(x,\lambda)&B(x,\lambda)\end{pmatrix}\quad\text{si } \Re(\lambda)>0,\\M(x,\lambda)&=\begin{pmatrix}A(x,\lambda)&-\check{B}(x,\lambda)\\\check{A}(x,\lambda)&\check{C}(x,\lambda)\end{pmatrix}\quad\text{si } \Re(\lambda)<0.\end{aligned}$$

On remarquera que pour tout $\lambda=\mathrm{i}u\in\mathrm{i}\mathbf{R}$, les limites suivantes existent

$$\begin{aligned}M^+(x,\mathrm{i}u)&:=\lim_{\lambda\to\mathrm{i}u,\ \Re(\lambda)>0}M(x,\lambda)=\begin{pmatrix}A(x,\mathrm{i}u)&-C(x,\mathrm{i}u)\\\check{A}(x,\mathrm{i}u)&B(x,\mathrm{i}u)\end{pmatrix},\\M^-(x,\mathrm{i}u)&:=\lim_{\lambda\to\mathrm{i}u,\ \Re(\lambda)<0}M(x,\lambda)=\begin{pmatrix}A(x,\mathrm{i}u)&-\check{B}(x,\mathrm{i}u)\\\check{A}(x,\mathrm{i}u)&\check{C}(x,\mathrm{i}u)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On note $H(x)$, la fonction $A(x,0)$, et donc $H^*(x)$ est la fonction $\check{A}(x,0)$. Ces deux fonctions sont croissantes, on note $H(\mathrm{d}x)$ et $H^*(\mathrm{d}x)$ les mesures sur $]0,+\infty[$ associées. On remarquera que ces mesures sont diffuses (ou que leur fonction de répartition est continue sur $]0,+\infty[$) sauf pour les processus de Poisson composés à valeurs dans un sous-groupe de $\mathbf{R}$. Pour éviter quelques ennuis, nous excluons ce cas pour la suite.

3. Le problème direct ou comment déduire du couple de fonctions (H,H^*) les matrices $M(x,\lambda)$ puis l'exposant de Lévy ϕ

On pourra se familiariser avec le vocabulaire « problème direct et problème inverse » et ce qu'il recouvre dans [4, Chapitre 1].

Le symbole $'$ désigne la dérivation par rapport à x au sens des distributions.

Théorème 3.1. *Pour tout* $\lambda\in\mathbf{C}\backslash\mathrm{i}\mathbf{R}$, *la fonction* $x\mapsto M(x,\lambda)$, *définie pour* $x\in\,]0,+\infty[$, *est l'unique solution de l'équation différentielle suivante* :

$$\text{(I)}\quad M'(x,\lambda)=\begin{pmatrix}0&\mathrm{e}^{-\lambda x}\dfrac{H(\mathrm{d}x)}{H^*(x)}\\\mathrm{e}^{\lambda x}\dfrac{H^*(\mathrm{d}x)}{H(x)}&0\end{pmatrix}M(x,\lambda)$$

et qui remplit les conditions supplémentaires :

(0) $\det M(x,\lambda)=1$;
(i) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{M_{11}(x,\lambda)}{H(x)}=1 \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{M_{21}(x,\lambda)}{H^*(x)}=1.$$

Et

$$\lim_{x\to+\infty} M_{12}(x,\lambda)M_{21}(x,\lambda)=0 \quad \textit{pour } \Re(\lambda)>0,$$
$$\lim_{x\to+\infty} M_{11}(x,\lambda)M_{22}(x,\lambda)=0 \quad \textit{pour } \Re(\lambda)<0.$$

Théorème 3.2.

$$M^+(x,\mathrm{i}u)=M^-(x,\mathrm{i}u)\begin{pmatrix}1 & \phi(\mathrm{i}u)\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

4. Le problème inverse ou comment déduire de l'exposant de Lévy ϕ les matrices $M(x,\lambda)$ puis le couple de fonctions (H,H^*)

Théorème 4.1. *Pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, la fonction $\lambda\mapsto M(x,\lambda)$, définie sur les deux demi-plans $\{\Re(\lambda)>0\}$ et $\{\Re(\lambda)<0\}$ est l'unique fonction holomorphe sur ces deux demi-plans qui admet des limites à droite $(M^+(x,\mathrm{i}u))$ et à gauche $(M^-(x,\mathrm{i}u))$ en tout point de $\mathrm{i}u\in\mathrm{i}\mathbf{R}$ qui vérifient* :

$$\text{(II)}\quad M^+(x,\mathrm{i}u)=M^-(x,\mathrm{i}u)\begin{pmatrix}1 & \phi(\mathrm{i}u)\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

et qui remplit les conditions supplémentaires suivantes :

(0) $\det M(x,\lambda)=1$;
(j) *Les fonctions suivantes sont bornées sur le demi-plan* $\{\mathrm{Re}(\lambda)>0\}$:

$$\big(\big|\psi(\lambda)\big|\vee 1\big)M_{11}(x,\lambda),\quad M_{22}(x,\lambda)-\psi(\lambda),\quad \mathrm{e}^{-\lambda x}M_{21}(x,\lambda),\quad \mathrm{e}^{\lambda x}M_{12}(x,\lambda)$$

et les suivantes sur $\{\mathrm{Re}(\lambda)<0\}$:

$$\big(\big|\check\psi(\lambda)\big|\vee 1\big)M_{21}(x,\lambda),\quad M_{12}(x,\lambda)+\check\psi(\lambda),\quad \mathrm{e}^{\lambda x}M_{11}(x,\lambda),\quad \mathrm{e}^{-\lambda x}M_{22}(x,\lambda).$$

De plus les limites suivantes ont lieu pour $\Re(\lambda)\to+\infty$

$$\psi(\lambda)M_{11}(x,\lambda)\to 1,\qquad \frac{\mathrm{e}^{\lambda x}M_{12}(x,\lambda)}{\psi(\lambda)}\to 0$$

et pour $\Re(\lambda)\to-\infty$

$$\check\psi(\lambda)M_{21}(x,\lambda)\to 1,\qquad \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}M_{22}(x,\lambda)}{\check\psi(\lambda)}\to 0.$$

Théorème 4.2.

$$H(x)=M_{11}^+(x,0)=M_{11}^-(x,0),\qquad H^*(x)=M_{21}^+(x,0)=M_{21}^-(x,0).$$

4.1. Arguments

La démonstration de la Proposition 2.1 et l'argument permettant d'aboutir au système differentiel du Théorème 3.1 se trouvent dans [5]. Celui-ci traite le cas des processus de Lévy symétriques pour lesquels on retrouve la théorie des cordes vibrantes de Krein. L'argument pour établir le Théorème 3.2 est la dimension du système différentiel. Pour le Théorème 4.1, l'existence est établie par ce qui précède et l'unicité découle d'arguments ordinaires de l'analyse complexe provenant du théorème de Liouville.

Références

[1] J. Bertoin, Lévy Process, Cambridge University Press, 1996.
[2] C. Dellacherie, P.-A. Meyer, Probabilités et Potentiel, Hermann, 1975.
[3] R. Doney, Fluctuation Theory for Lévy Processes, Lévy Processes, Theory and Applications, Birkhäuser, 2001.
[4] A.S. Fokas, V.E. Zakharov (Eds.), Important Developments in Soliton Theory, Springer-Verlag, 1993.
[5] S. Fourati, Krein theory applied to fluctuations of Lévy processes, math.PR/0508612, 2005.