

Analyse mathématique
Principe d'incertitude *SAK* de Fefferman

Sami Mustapha

Université Paris-VI, institut mathématique de Jussieu, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France

Reçu le 19 octobre 2004 ; accepté après révision le 18 octobre 2005

Disponible sur Internet le 21 novembre 2005

Présenté par Charles-Michel Marle

Résumé

On donne un critère du type principe *SAK* de Fefferman permettant de comparer les puissances des opérateurs pseudo-différentiels sous-elliptiques dans le cadre du calcul de Weyl–Hörmander. *Pour citer cet article : S. Mustapha, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Fefferman's *SAK* uncertainty principle. We give a version of the *SAK*-Fefferman principle which allows us to compare powers of subelliptic pseudo-differential operators in the setting of Weyl–Hörmander calculus. *To cite this article: S. Mustapha, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Let $W = \mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_\xi^n$ denote the phase space and let g be a Hörmander metric on W . Let h denote the corresponding uncertainty parameter (cf. [7,8]). Let $a \in S(h^{-2}, g)$ and let $a^w(x, D)$ denote the pseudo-differential operator associated to a via the Weyl prescription

$$a^w(x, D)u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^{2n}} e^{i(x-y, \xi)} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) \, dy \, d\xi, \quad u \in \mathcal{S}. \quad (1)$$

Let us assume that the symbol a is non-negative. By the Fefferman–Phong inequality (cf. [2,6,8]) $a^w(x, D)$ is bounded from below and induces a positive L^2 -operator

$$L = a^w(x, D) + cI, \quad (2)$$

where the constant $c > 0$ will be supposed large enough. The operator L can be closed in L^2 and the fractional powers L^α ($\alpha \in \mathbf{R}$) of L can be defined.

Adresse e-mail : sam@math.jussieu.fr (S. Mustapha).

Let L_1, L_2 be two pseudo-differential operators as in (2). Let $a_1(x, \xi), a_2(x, \xi)$ denote the corresponding symbols. Let $0 < \alpha \leq \beta$. We would like to know whether an estimate of the form

$$\|L_1^{\alpha/2} u\| \leq C \|L_2^{\beta/2} u\|, \quad u \in \mathcal{S} \quad (3)$$

holds (where $\|\cdot\|$ denotes the L^2 -norm). If we suppose that $\alpha = \beta = 2$ and that g is the classical metric (i.e. $g = dx^2 + d\xi^2/\langle \xi \rangle^2$) then the answer is given by the Fefferman's SAK-principle (cf. [5]): (3) holds if and only if the symbols $a_1(x, \xi), a_2(x, \xi)$ verify

$$\max_{B_\nu} a_1(x, \xi) \leq C \max_{B_\nu} (a_2(x, \xi) + \langle \xi \rangle^\epsilon), \quad \nu = 1, 2, \dots$$

where $\epsilon > 0$ can be taken arbitrarily small and where $(B_\nu)_\nu$ is a family of suitable boxes of bounded volume which constitutes a covering of the phase space

$$W = \mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_\xi^n = \bigcup_\nu B_\nu.$$

We give in this Note a version of the SAK-principle which allows us to compare powers of pseudo-differential operators. The covering of the phase space that we shall use is related to the intermediate metric $g^\#$ associated to the metric g (cf. (5) below).

If we suppose that the metric g is slowly varying (cf. Section 1 below) then the metric $g^\#$ is slowly varying and there exist $\rho > 0$ (which can be chosen arbitrarily small), $N > 0, w_\nu \in W, \nu = 1, 2, \dots$ such that

$$W = \bigcup_\nu B_\nu = \bigcup_\nu \{w \in W : g_{w_\nu}^\#(w - w_\nu) < \rho\} \quad (4)$$

and the intersection of more than N balls B_ν is always empty.

Theorem 0.1. *Let L_1, L_2 be two pseudo-differential operators as above with corresponding symbols $a_1(x, \xi), a_2(x, \xi)$ and let $0 < \alpha \leq \beta$. Let $B_\nu, \nu = 1, 2, \dots$ defined as in (4) and let us assume that the radius ρ is small enough. Let us suppose that there exists $C > 0$ such that*

$$\max_{B_\nu} a_1(x, \xi)^\alpha \leq C \max_{B_\nu} a_2(x, \xi)^\beta, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

then there exists $C > 0$ such that

$$\|L_1^{\alpha/2} u\| \leq C \|(L_2 + (h^{-1})^w(x, D))^{\beta/2} u\|, \quad u \in \mathcal{S}.$$

In the case of first order symbols we have the following refinement of the previous theorem.

Theorem 0.2. *Let L_1, L_2 be two pseudo-differential operators as in (2). Let us assume that their symbols $a_1(x, \xi), a_2(x, \xi) \in S(1/h, g)$. Let $0 < \alpha \leq \beta$. Let $B_\nu, \nu = 1, 2, \dots$ defined as in (4) and let us assume that the radius ρ is small enough. Let us suppose that*

$$\max_{B_\nu} a_1(x, \xi)^\alpha \leq C \max_{B_\nu} a_2(x, \xi)^\beta, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

Then for any arbitrarily small $\epsilon > 0$ there exists $C_\epsilon > 0$ such that

$$\|L_1^{\alpha/2} u\| \leq C_\epsilon \|(L_2 + (h^{-\epsilon})^w(x, D))^{\beta/2} u\|, \quad u \in \mathcal{S}.$$

1. Métriques de Hörmander

Désignons par $W = \mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_\xi^n$ l'espace des phases muni de la forme symplectique standard

$$\sigma(w, w') = \langle \xi, x' \rangle - \langle \xi', x \rangle, \quad w = (x, \xi), \quad w' = (x', \xi') \in W.$$

Si g désigne une métrique Riemannienne sur W on désigne par g^σ sa métrique duale :

$$g_w^\sigma(t) = \sup_{g_w(t')=1} \sigma(t, t')^2, \quad w \in W, \quad t \in W.$$

A toute métrique Riemannienne g sur W on peut associer une métrique Riemannienne auto-duale notée $g^\#$ (i.e. $(g^\#)^\sigma = g^\# = (g^\#)^\#$). Pour définir cette métrique on procède de la manière suivante. Fixons $w \in W$ et considérons la transformation

$$J_w : W \longrightarrow W$$

définie par

$$\sigma(y, t) = g_w(J_w y, t), \quad y, t \in W.$$

Comme σ est antisymétrique, $-J_w^2$ est définie positive pour la forme quadratique g_w et il existe une unique transformation positive S_w telle que $S_w^4 = -J_w^2$. La métrique $g^\#$ est alors définie par

$$g_w^\#(t) = g_w(S_w t), \quad w \in W, t \in W. \tag{5}$$

Si on suppose la métrique g à variation lente (cf. [7,8]) alors la métrique $g^\#$ est aussi à variation lente (cf. [1]). Elle induit alors un recouvrement de l'espace des phases par des $g^\#$ -boules. D'une manière plus précise, il existe $\rho > 0$, $w_\nu \in W$, $\nu = 1, 2, \dots$ telle que

$$W = \bigcup_\nu B_\nu = \bigcup_\nu \{w \in W : g_{w_\nu}^\#(w - w_\nu) < \rho\} \tag{6}$$

et telle que l'intersection de plus de N boules B_ν est toujours vide. Le rayon $\rho > 0$ peut être choisi arbitrairement petit (cf. [8]).

Si on suppose que la métrique g vérifie le principe d'incertitude :

$$h^2(w) = \sup_{t \neq 0} \frac{g_w(t)}{g_w^\sigma(t)} \leq 1 \tag{7}$$

alors la métrique $g^\#$ vérifie $g \leq g^\# \leq g^\sigma$. On dit que g est la métrique intermédiaire associée à g .

Soit g une métrique Riemannienne sur W à variation lente, vérifiant le principe d'incertitude et soit $g^\#$ la métrique intermédiaire qui lui est associée. On dit que g est une métrique de Hörmander si (cf. [1]) g vérifie la propriété de tempérance forte :

$$\exists C, N > 0 \text{ telle que } (g_w/g_{w'})^{\pm 1} + (g_w^\#/g_{w'}^\#)^{\pm 1} \leq C(1 + g_w^\#(w - w'))^N.$$

Une fonction mesurable $w \rightarrow m(w) > 0$ définie sur l'espace des phases W est un g -poids si m est à variation lente et vérifie la propriété de tempérance forte (cf. [1]). Pour un tel poids m , on désigne par $S(m, g)$ la classe de symboles qui lui est associée (cf. [8]) et par $OPS(m, g)$ la classe des opérateurs pseudo-différentiels correspondants définis via la quantification de Weyl (cf. (1)).

2. Le principe SAK pour les opérateurs de la classe $S(h^{-2}, g)$

Le paramètre d'incertitude h défini par (7) et ses puissances h^s ($s \in \mathbf{R}$) définissent des g -poids. Dans le cas classique (i.e. $g = dx^2 + d\xi^2/\langle \xi \rangle^2$) $h(x, \xi) = \langle \xi \rangle^{-1}$. Les symboles des classes $S(h^{-1}, g) \subset S(h^{-2}, g)$ généralisent les symboles classiques du premier et du second ordre, respectivement $S_{1,0}^1$ et $S_{1,0}^2$. D'après l'inégalité de Fefferman–Phong (cf. [2,6,8]), si a est un symbole positif appartenant à l'une de ces deux classes l'opérateur $a^w(x, D)$ est semi-borné inférieurement et induit par conséquent un opérateur positif sur L^2

$$L = a^w(x, D) + cI \tag{8}$$

où la constante $c > 0$ sera supposée suffisamment grande. Un tel opérateur est fermable dans L^2 et on peut définir ses puissances fractionnaires L^α ($\alpha \in \mathbf{R}$).

Soient L_1, L_2 deux opérateurs pseudo-différentiels comme dans (8). Soient $a_1(x, \xi), a_2(x, \xi)$ leur symboles respectifs. Soient $0 < \alpha \leq \beta$. On cherche à savoir sous quelles conditions on peut garantir une estimation de la forme

$$\|L_1^{\alpha/2} u\| \leq C \|L_2^{\beta/2} u\|, \quad u \in \mathcal{S}.$$

Si on suppose que $\alpha = \beta = 2$ et que $g = dx^2 + d\xi^2/\langle \xi \rangle^2$ la réponse est donnée par le principe SAK de Fefferman rappelé ci-dessus.

Nous donnons dans cette note une version du principe *SAK* s'appliquant aux opérateurs pseudo-différentiels de la classe $OPS(h^{-2}, g)$ et à leurs puissances. Le recouvrement de l'espace des phases utilisé est le recouvrement par les $g^\#$ -boules défini par (6). Le fait que cette métrique soit auto-duale entraîne que les boules de rayon $\rho > 0$ qui lui sont associées possèdent un volume uniformément borné (quand le centre de la boule varie dans l'espace des phases) supérieurement et inférieurement.

Théorème 2.1. Soient L_1, L_2 deux opérateurs pseudo-différentiels comme dans (8) et soient $a_1(x, \xi), a_2(x, \xi)$ leur symboles respectifs. Soient $0 < \alpha \leq \beta$. Soient $B_\nu, \nu = 1, 2, \dots$ les boules définies dans (6) où l'on suppose ρ suffisamment petit. Supposons qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\max_{B_\nu} a_1(x, \xi)^\alpha \leq C \max_{B_\nu} a_2(x, \xi)^\beta, \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (9)$$

alors il existe $C > 0$ telle que

$$\|L_1^{\alpha/2} u\| \leq C \|(L_2 + (h^{-1})^w(x, D))^{\beta/2} u\|, \quad u \in \mathcal{S}. \quad (10)$$

Exemple 1. Soit a un symbole classique, positif, de la classe $S_{1,0}^2$. Considérons les fonctions $m(w)$ et g_w définies par $m(w) = a(x, \xi) + \langle \xi \rangle$ et

$$g_w = \langle \xi \rangle^2 (a(x, \xi) + \langle \xi \rangle)^{-1} (dx^2 + d\xi^2 / \langle \xi \rangle^2), \quad w = (x, \xi) \in W.$$

La métrique g_w ainsi définie est une métrique de Hörmander (cf. [4]). La métrique $g^\#$ qui lui est associée est la métrique $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Le recouvrement (6) est dans ce cas de la forme :

$$W = \bigcup_\nu B_\nu = \bigcup_\nu \{ \langle \xi_\nu \rangle^{1/2} |x - x_\nu| + \langle \xi_\nu \rangle^{-1/2} |\xi - \xi_\nu| < \rho \}$$

et le paramètre d'incertitude h est donné par $h(x, \xi) = \langle \xi \rangle (a(x, \xi) + \langle \xi \rangle)^{-1}$. Une conséquence du Théorème 2.1 dans ce cas est que si a_1 et a_2 sont deux symboles positifs de la classe $S((a + \langle \xi \rangle)^2 \langle \xi \rangle^{-2}, g)$ vérifiant, par exemple, $\max_{B_\nu} a_1(x, \xi)^k \leq C \max_{B_\nu} a_2(x, \xi)^l$ pour deux exposants entiers $k \leq l$ alors

$$\|L_1^{\nu k} u\| \leq C_\nu \|(I + L_2 + (a/\langle \xi \rangle)^w(x, D))^{\nu l} u\|, \quad u \in \mathcal{S}, \quad \nu > 0,$$

où L_1 et L_2 désignent les opérateurs associés aux symboles a_1 et a_2 .

3. Opérateurs sous-elliptiques

Comme il a été mentionné plus haut, la classe $S(h^{-2}, g)$ constitue une généralisation de la classe $S_{1,0}^2$ des symboles classiques d'ordre 2. Une notion de sous-ellipticité est disponible dans ce cadre (cf. [9]). Un opérateur L comme dans (8) est dit sous-elliptique s'il existe $0 < \epsilon \leq 2$ tel que

$$\|f\|_{H(h^{-\epsilon}, g)} \leq C \|Lf\|, \quad f \in \mathcal{S}, \quad (11)$$

où $\|\cdot\|_{H(h^{-\epsilon}, g)}$ désigne la norme de Sobolev $H(h^{-\epsilon}, g)$ (cf. [1,3]).

Si on suppose que l'opérateur L_2 dans le Théorème 2.1 vérifie la condition (11) avec $\epsilon = 1$ alors :

Théorème 3.1. Les notations sont celles du Théorème 2.1. Supposons que l'opérateur L_2 vérifie la condition (11) avec $\epsilon = 1$. Supposons qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\max_{B_\nu} a_1(x, \xi)^\alpha \leq C \max_{B_\nu} a_2(x, \xi)^\beta, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

alors il existe $C > 0$ telle que

$$\|L_1^{\alpha/2} u\| \leq C \|L_2^{\beta/2} u\|, \quad u \in \mathcal{S}.$$

4. Les symboles de la classe $S(h^{-1}, g)$

Dans le cas où les symboles $a_1(x, \xi), a_2(x, \xi) \in S(1/h, g)$ on peut montrer qu'il est possible, sous la condition (9), de remplacer le terme $(h^{-1})^w(x, D)$ apparaissant dans le membre de droite de (10) par un terme de la forme $(h^{-\epsilon})^w(x, D)$ où $\epsilon > 0$ peut être choisi arbitrairement petit.

Théorème 4.1. *Soient L_1, L_2 deux opérateurs pseudo-différentiels comme dans (8). Supposons les symboles $a_1(x, \xi), a_2(x, \xi) \in S(1/h, g)$. Soient $0 < \alpha \leq \beta$. Soient $B_\nu, \nu = 1, 2, \dots$ les boules définies dans (6) où l'on suppose ρ suffisamment petit. Supposons qu'il existe $C > 0$ telle que*

$$\max_{B_\nu} a_1(x, \xi)^\alpha \leq C \max_{B_\nu} a_2(x, \xi)^\beta, \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $C_\epsilon > 0$ telle que

$$\|L_1^{\alpha/2} u\| \leq C_\epsilon \|(L_2 + (h^{-\epsilon})^w(x, D))^{\beta/2} u\|, \quad u \in \mathcal{S}. \quad (13)$$

La preuve du Théorème 4.1. repose sur la possibilité d'associer à tout symbole positif de la classe $S(h^{-1}, g)$ une métrique de Hörmander, du même type que celle introduite par Hörmander dans la preuve du Théorème 18.6.7 de [8]. En utilisant les techniques du calcul pseudo-différentiel dans les classes associées à cette métrique et en perturbant l'opérateur associé au symbole a_2 en lui ajoutant un terme de la forme $(h^{-\epsilon})^w(x, D)$, où $\epsilon > 0$, on peut se ramener à des opérateurs elliptiques dont il est aisé d'analyser les puissances fractionnaires. Des métriques analogues peuvent être considérées dans le cas de symboles positifs du second ordre $a \in S(h^{-2}, g)$. Il s'avère que ces métriques sont à variation lente mais ne vérifient le principe d'incertitude que si le symbole a est augmenté d'une puissance -1 de h . Ceci explique l'apparition du terme $(h^{-1})^w(x, D)$ dans (10). La preuve de l'implication (9) \Rightarrow (10) est plus délicate que celle de l'implication (12) \Rightarrow (13) et nécessite l'emploi d'une échelle d'espaces de Besov adaptée aux symboles considérés.

Références

- [1] R. Beals, Weighted distribution spaces and pseudodifferential operators, J. Anal. Math. 39 (1981) 131–187.
- [2] J.-M. Bony, Sur l'inégalité de Fefferman–Phong, in : Séminaire Equations aux Dérivées Partielles, 1998–1999, Exp. No. III, École Polytech., Palaiseau, 1999.
- [3] J.-M. Bony, J.-Y. Chemin, Espaces fonctionnels associés au calcul de Weyl–Hörmander, Bull. Soc. Math. France 122 (1994) 77–118.
- [4] C.E. Canelier, J.-Y. Chemin, C.J. Xu, Calcul de Weyl et opérateurs sous-elliptiques, Ann. Inst. Fourier 43 (1993) 1157–1178.
- [5] C. Fefferman, The uncertainty principle, Bull. Amer. Math. Soc. 9 (1983) 129–206.
- [6] C. Fefferman, D.H. Phong, On positivity of pseudo-differential operators, Proc. Nat. Acad. Sci. 75 (1978) 4673–4674.
- [7] L. Hörmander, The Weyl Calculus of pseudo-differential operators, Comm. Pure Appl. Math. 32 (1979) 359–443.
- [8] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, vol. III, Springer-Verlag, 1985.
- [9] S. Mustapha, Sous-ellipticité dans le cadre du calcul $S(m, g)$ I, Comm. Partial Differential Equations 19 (1–2) (1994) 245–275.