Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 605–610

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Partial Differential Equations

Singular electromagnetic fields: inductive approach

Franck Assous [a], Patrick Ciarlet, Jr. [b], Emmanuelle Garcia [b]

[a] *Department of Mathematics and Statistics, Bar-Ilan University, 52900 Ramat-Gan, Israël*
[b] *CNRS-ENSTA-INRIA UMR 2706 POEMS, 32, boulevard Victor, 75739 Paris cedex 15, France*

Received 9 May 2005; accepted after revision 14 September 2005

Available online 21 October 2005

Presented by Roland Glowinski

Abstract

In a non-convex polyhedral domain, we describe the local trace (i.e. defined on a face) of the normal derivative of an L^2 function, with L^2 Laplacian. We then provide generalized integration by parts formulae for the Laplace, divergence and curl operators. Finally, these results allow us to split electromagnetic fields into regular and singular parts, which can be characterized. ***To cite this article: F. Assous et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Résumé

Singularités électromagnétiques : une approche inductive. Dans le cas d'un domaine polyédrique non convexe, nous décrivons la trace locale (sur une face) de la dérivée normale d'une fonction L^2, à Laplacien L^2. On construit ensuite des formules d'intégration par parties généralisées pour les opérateurs Laplacien, divergence et rotationnel. Ceci permet enfin de décomposer les champs électromagnétiques en la somme d'un terme régulier et d'un terme singulier, que l'on caractérise. ***Pour citer cet article : F. Assous et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Version française abrégée

Les nombres entre parenthèses renvoient à la version anglaise. L'opérateur rotationnel y est noté curl.

Lorsque l'on résout des EDP dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^3$ de frontière polyédrique et lischitzienne, il est bien connu que la présence de coins et/ou d'arêtes rentrants entraîne une régularité moindre de la solution. Considérons les équations de Maxwell dans Ω, avec une condition de type conducteur parfait, et des données dans $L^2(\Omega)$. Si Ω est convexe, le champ électromagnétique $(\mathcal{E},\mathcal{H})$ appartient toujours à $H^1(\Omega)^6$. Par contre, si Ω est non-convexe, on n'obtient a priori qu'un résultat du type $(\mathcal{E},\mathcal{H}) \in H^\sigma(\Omega)^6$, avec $\sigma < \sigma_{\max}$ et $\sigma_{\max} \in]1/2, 1[$ (voir par ex. [7]). Ceci étant, on peut décomposer le champ en deux parties (cf. [3]) : l'une dans $H^1(\Omega)^6$, dite régulière, et l'autre singulière. D'après [4,7], le sous-espace composé des champs réguliers est fermé, en conséquence de quoi il est loisible de définir les champs singuliers par orthogonalité (d'autres approches sont possibles et intéressantes, voir [6]). Qui plus est, la partie singulière du champ est reliée aux singularités primales du Laplacien [3], avec respectivement :

E-mail addresses: FranckAssous@netscape.net (F. Assous), Patrick.Ciarlet@ensta.fr (P. Ciarlet), garciaemm@yahoo.fr (E. Garcia).

1631-073X/$ – see front matter © 2005 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.
doi:10.1016/j.crma.2005.09.034

- une condition de Dirichlet homogène pour le champ électrique $\mathcal{E}$;
- une condition de Neumann homogène pour le champ magnétique $\mathcal{H}$.

Dans [1], nous avons étudié une définition de la trace des fonctions L^2 à Laplacien L^2, qui peut être comprise localement – face par face – à valeurs dans des espaces de Sobolev du type $H^{-1/2}$. Puis, nous en avons déduit une formule d'*intégration par parties généralisée* (ippg). Enfin, dans [2], nous avons caractérisé les champs électriques singuliers à divergence nulle. L'objet de cette Note est d'étendre ces résultats aux cas d'un champ magnétique et d'un champ électrique quelconque, en reprenant ces trois étapes.

Pour simplifier l'exposé, supposons que Ω soit simplement connexe, et que sa frontière Γ soit connexe. On note $\mathbf{n}$ sa normale unitaire extérieure, et $(\Gamma_F)_{1\leqslant F\leqslant N_F}$ ses faces.

Par la suite, les espaces fonctionnels de champs scalaires (respectivement vectoriels) débutent par une lettre italique (resp. grasse ou calligraphique) : par ex., $\mathbf{L}^2(\Omega) = L^2(\Omega)^3$. Le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ et $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est noté $(\cdot,\cdot)_0$, et les crochets de dualité entre X et son dual X' sont notés $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$.

Soit $D(\Delta;\Omega) = \{q \in L^2(\Omega)\colon\ \Delta q \in L^2(\Omega)\}$. La densité de $H^2(\Omega)$ dans $D(\Delta;\Omega)$ [2] permet de remplacer tout élément de $D(\Delta;\Omega)$ par une suite d'éléments de $H^2(\Omega)$, ce qui permet notamment de prouver les formules ippg (3), (4), (9) et (14) $\ldots$. Introduisons les espaces de solutions régulières du Laplacien $H^D(\Omega)$, $H^D_F(\Omega)$, $H^N(\Omega)$ et $H^N_F(\Omega)$ cf. (1) et (2). Pour aborder les traces sur Γ, suivons [5]. Pour $s \in \{1/2, 3/2\}$, nous appelons $H^s(\Gamma)$ l'espace des traces d'éléments de $H^{s+1/2}(\Omega)$. Puis, pour localiser la notion de trace, considérons $\widetilde{H}^s(\Gamma_F)$, composé de champs v de $H^s(\Gamma_F)$, tels que leur prolongement par 0 à Γ appartienne à $H^s(\Gamma)$. L'espace dual de $\widetilde{H}^s(\Gamma_F)$ est noté $\widetilde{H}^{-s}(\Gamma_F)$.

Les champs électriques ($\mathcal{E}\times\mathbf{n}_{|\Gamma} = 0$) singuliers étant liés aux singularités du Laplacien avec condition aux limites de Dirichlet, nous rappelons une première série de résultats, issus de [1,2].

Théorème 0.1. (*) *L'application $v \mapsto \partial_n v_{|\Gamma_F}$ est linéaire continue de $H^D(\Omega)$ dans $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_F)$;*
(i) *L'application $v \mapsto \partial_n v_{|\Gamma_F}$ est surjective de $H^D_F(\Omega)$ dans $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_F)$;*
(ii) *L'application $p \mapsto p_{|\Gamma_F}$ est linéaire continue de $D(\Delta;\Omega)$ dans $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_F)$;*
(iii) *La formule ippg* (3) *est vérifiée.*

On peut procéder de même pour les champs magnétiques, en remplaçant la condition de Dirichlet par une condition de Neumann (voir [8, pp. 175–176] pour les détails). Il convient de noter que la trace locale d'un champ de $H^N(\Omega)$ n'appartenant pas automatiquement à $\widetilde{H}^{3/2}(\Gamma_F)$, nous nous restreignons à des éléments de $H^N_F(\Omega)$ pour la formule ippg (4) ci-après.

Théorème 0.2. (i) *L'application $v \mapsto v_{|\Gamma_F}$ est surjective de $H^N_F(\Omega)$ dans $\widetilde{H}^{3/2}(\Gamma_F)$;*
(ii) *L'application $p \mapsto \partial_n p_{|\Gamma_F}$ est linéaire continue de $D(\Delta;\Omega)$ dans $\widetilde{H}^{-3/2}(\Gamma_F)$;*
(iii) *La formule ippg* (4) *est vérifiée.*

A partir de là, passons aux champs électromagnétiques proprement dits, qui appartiennent à $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ (cf. (5) et (6)) dans notre cas. Les sous-espaces (fermés) de champs réguliers $\mathcal{X}^R$, $\mathcal{X}^R_F$, $\mathcal{Y}^R$ et $\mathcal{Y}^R_F$ sont quant à eux définis par (7) et (8). D'après [1,2], nous avons le

Théorème 0.3. (+) *L'application $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}\cdot\mathbf{n}_{|\Gamma_F}$ est linéaire continue de $\mathcal{X}^R$ dans $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_F)$;*
(i) *L'application $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}\cdot\mathbf{n}_{|\Gamma_F}$ est surjective de $\mathcal{X}^R_F$ dans $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_F)$. Son noyau est $\mathbf{H}^1_0(\Omega)$.*

Corollaire 0.4. *L'espace $\mathcal{X}^R$ peut être décomposé en la somme* : $\mathcal{X}^R = \mathcal{X}^R_1 + \cdots + \mathcal{X}^R_{N_F}$.

Pour ce qui concerne les formules ippg avec des éléments de $\mathcal{X}^R$, la première est issue de [2], alors que l'autre est obtenue par densité de $\mathcal{D}(\Omega)^3$ dans $\mathbf{H}_0(\mathrm{rot},\Omega)$.

Théorème 0.5. *Les formules ippg* (9) *et* (10) *sont vérifiées.*

Pour le cas magnétique, nous introduisons les traces vectorielles tangentielles sur Γ, par l'intermédiaire de l'ensemble canonique $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$, voir (11). Suivant [8, pp. 177–178], nous prouvons le

Théorème 0.6. *L'application* $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{y} \times \mathbf{n}_{|\Gamma_F}$ *est surjective de* $\mathcal{Y}_F^R$ *dans* $\widetilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma_F) \cap \mathbf{L}_t(\Gamma)$. *Son noyau est* $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

Comme $(+)$ (Théorème 0.3) n'a pas d'équivalent, le Corollaire 0.4 n'est pas transposable. Malgré tout, à l'aide d'un résultat intermédiaire de densité dans la preuve du Lemme 2.6 de [7], on établit facilement le résultat suffisant

Corollaire 0.7. *La somme* $\sum_F \mathcal{Y}_F^R$ *est dense dans* $\mathcal{Y}^R$.

Pour obtenir une formule similaire à (10), rappelons que si on définit la trace des composantes tangentielles sur Γ π_T par $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{n} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{n})_{|\Gamma}$, nous avons la formule d'intégration par parties usuelle (12) pour des champs $\mathbf{p}$ et $\mathbf{y}$ réguliers. Comme la trace tangentielle locale d'éléments de $\mathcal{Y}_F^R$ se trouve appartenir à $\widetilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma_F) \cap \mathbf{L}_t(\Gamma)$, nous demandons que $\mathbf{p}$ soit tel que $\pi_T \mathbf{p} \in (\widetilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma_F) \cap \mathbf{L}_t(\Gamma))'$. D'après le Théorème 0.1(ii), c'est vrai si $\mathbf{p} \in \mathbf{D}(\boldsymbol{\Delta}; \Omega)$. Récapitulons (voir [8, pp. 179–181] pour les détails d'obtention de (14)) :

Théorème 0.8. *Les formules ippd* (13) *et* (14) *sont vérifiées.*

Il nous reste maintenant à caractériser les champs singuliers par orthogonalité, ce qui repose sur un choix de produit scalaire. Comme $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont tous deux inclus dans $\mathbf{H}(\mathrm{rot}, \Omega) \cap \mathbf{H}(\mathrm{div}, \Omega)$, on pourrait choisir celui qui est associé à la norme du graphe. Mais, comme les injections de $\mathcal{X}$ et de $\mathcal{Y}$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ sont toutes deux compactes [9], on peut vérifier aisément que $(\cdot,\cdot)_W$ défini par (15) induit une norme, équivalente à la norme du graphe. Introduisons donc $\mathcal{X}^S$ et $\mathcal{Y}^S$ les espaces de champs électriques et magnétiques singuliers : $\mathcal{X} = \mathcal{X}^R \overset{\perp_W}{\oplus} \mathcal{X}^S$, et $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^R \overset{\perp_W}{\oplus} \mathcal{Y}^S$. A partir de là, et grâce aux formules ippg, aux résultats de surjectivité (ainsi qu'au Corollaire 0.7 pour le champ magnétique), nous sommes en mesure d'établir une caractérisation des champs singuliers, qui utilise le Laplacien vectoriel $-\boldsymbol{\Delta} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot} - \nabla\,\mathrm{div}$.

Théorème 0.9. *Un élément* $\underline{\mathbf{x}}$ *de* $\mathcal{X}$ *est singulier ssi la condition* (16) *est satisfaite.*
Un élément $\underline{\mathbf{y}}$ *de* $\mathcal{Y}$ *est singulier ssi la condition* (17) *est satisfaite.*

1. Introduction

When one solves PDEs in a bounded polyhedron Ω of $\mathbb{R}^3$ with a Lipschitz boundary, it is well known that the presence of reentrant corners and/or edges on the boundary deteriorates the smoothness of the solution. More specifically, consider Maxwell equations with perfect conductor boundary conditions and right-hand sides in $L^2(\Omega)$. Then the electromagnetic field $(\mathcal{E}, \mathcal{H})$ always belongs to $H^1(\Omega)^6$ when Ω is convex. On the other hand, it is only guaranteed that it belongs to $H^\sigma(\Omega)^6$, for $\sigma < \sigma_{\max}$ and $\sigma_{\max} \in]1/2, 1[$ when Ω is non-convex (see for instance [7]). Nevertheless, one can split (cf. [3]) the field into two parts: a regular one, which belongs to $H^1(\Omega)^6$, and a singular one. According to [4,7], the subspace of regular fields is closed, so we choose to define the singular fields *by orthogonality* (other approaches are possible and useful, see [6]). Moreover, the singular part of the field is linked to the so-called primal singularities of the Laplace problem [3], respectively with

– homogeneous Dirichlet boundary condition for the electric field $\mathcal{E}$;
– homogeneous Neumann boundary condition for the magnetic field $\mathcal{H}$.

In [1], we first studied, for L^2 functions with L^2 Laplacian, a possible definition of the trace on the boundary. Actually, it was proven that it can be understood locally – face by face – with values in $H^{-1/2}$-like Sobolev spaces. This being clarified, we inferred a *generalized integration by parts* (gibp) formula. Finally, in [2], we were able to describe precisely the space of all divergence-free singular electric fields. Indeed, starting from the orthogonality relationship with regular fields, the gibp formula allowed to build a suitable characterization. In this Note, the results are extended to the cases of magnetic fields and of any electric field, by using the same three step procedure.

2. Local traces and generalized integration by parts formulas for the Laplace problem

For simplicity, it is assumed that Ω is simply connected, and that its boundary Γ is connected. The unit outward normal to Γ is denoted by $\mathbf{n}$. Let $(\Gamma_F)_{1\leqslant F\leqslant N_F}$ be the faces of Γ: $\forall F$ means that F spans $\{1,\ldots,N_F\}$, whereas F stands for a given index.

In the text, names of functional spaces of scalar fields usually begin by an italic letter, whereas they begin by a bold or calligraphic letter for spaces of vector fields (for instance, $\mathbf{L}^2(\Omega)=L^2(\Omega)^3$). The scalar product of $L^2(\Omega)$ and of $\mathbf{L}^2(\Omega)$ are denoted by $(\cdot,\cdot)_0$, and duality products between X and its dual X' are denoted by $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$.

Let us introduce $D(\Delta;\Omega)=\{q\in L^2(\Omega)\colon\ \Delta q\in L^2(\Omega)\}$, a natural space to study the dual singularities of the Laplace problem. Since $H^2(\Omega)$ is dense in $D(\Delta;\Omega)$ [2], one can replace an element of $D(\Delta;\Omega)$ by a sequence of elements of $H^2(\Omega)$: thus, one can prove simply some gibp formulas, such as (3), (4), (9) and (14) below.

As far as primal singularities are concerned, it is convenient to introduce (sub)spaces of regular solutions of the Laplace problem.

Definition 2.1. Consider the four subspaces of $H^2(\Omega)$

$$H^D(\Omega)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega),\qquad H_F^D(\Omega)=\bigl\{v\in H^D(\Omega)\colon\ \partial_n v_{|\Gamma_{F'}}=0,\ \forall F'\neq F\bigr\};\tag{1}$$

$$H^N(\Omega)=\bigl\{v\in H^2(\Omega)\colon\ \partial_n v_{|\Gamma}=0\bigr\},\qquad H_F^N(\Omega)=\bigl\{v\in H^N(\Omega)\colon\ v_{|\Gamma_{F'}}=0,\ \forall F'\neq F\bigr\}.\tag{2}$$

Let $s\in\{1/2,3/2\}$. Following [5], let $H^s(\Gamma)$ be equal to the trace on Γ of elements of $H^{s+1/2}(\Omega)$. Then, define $\widetilde{H}^s(\Gamma_F)$ as the space of elements v of $H^s(\Gamma_F)$, such that the continuation of v by zero to Γ belongs to $H^s(\Gamma)$. The dual space of $\widetilde{H}^s(\Gamma_F)$ is called $\widetilde{H}^{-s}(\Gamma_F)$.

Let us use the above mentioned three step procedure. The singular electric ($\mathcal{E}\times\mathbf{n}_{|\Gamma}=0$) fields are related to the singularities of the Laplace operator with Dirichlet boundary condition [3]. So, in order to write a gibp formula for those vector fields, let us recall from [1,2] a gibp formula for $(p,v)\in D(\Delta;\Omega)\times H^D(\Omega)$, together with the accompanying results.

Theorem 2.2. $(*)$ *The mapping $v\mapsto\partial_n v_{|\Gamma_F}$ is linear and continuous from $H^D(\Omega)$ to $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_F)$;*

(i) *The mapping $v\mapsto\partial_n v_{|\Gamma_F}$ is surjective from $H_F^D(\Omega)$ to $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_F)$;*

(ii) *The mapping $p\mapsto p_{|\Gamma_F}$ is linear and continuous from $D(\Delta;\Omega)$ to $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_F)$;*

(iii) *The following gibp formula holds*:

$$(p,\Delta v)_0-(v,\Delta p)_0=\sum_F\langle p_{|\Gamma_F},\partial_n v_{|\Gamma_F}\rangle_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_F)},\quad\forall(p,v)\in D(\Delta;\Omega)\times H^D(\Omega).\tag{3}$$

In order to proceed similarly for the magnetic field, recall that the singular magnetic ($\mathcal{H}\cdot\mathbf{n}_{|\Gamma}=0$) fields are related to the singularities of the Laplace operator with Neumann boundary condition [3]. Compared to the electric case, the idea is then to swap the trace and trace of the normal derivative mappings. Following basically the same techniques [8, pp. 175–176], one can derive the results below (with the exception of $(*)$, see Remark 1 below).

Theorem 2.3. (i) *The mapping $v\mapsto v_{|\Gamma_F}$ is surjective from $H_F^N(\Omega)$ to $\widetilde{H}^{3/2}(\Gamma_F)$;*

(ii) *The mapping $p\mapsto\partial_n p_{|\Gamma_F}$ is linear and continuous from $D(\Delta;\Omega)$ to $\widetilde{H}^{-3/2}(\Gamma_F)$;*

(iii) *The following gibp formula holds*:

$$(p,\Delta v)_0-(v,\Delta p)_0=-\langle\partial_n p_{|\Gamma_F},v_{|\Gamma_F}\rangle_{\widetilde{H}^{3/2}(\Gamma_F)},\quad\forall(p,v)\in D(\Delta;\Omega)\times H_F^N(\Omega).\tag{4}$$

Remark 1. One can not transpose $(*)$ from the electric to the magnetic case. As a matter of fact, given $v\in H^N(\Omega)$, it is true that $v_{|\Gamma_F}$ belongs to $H^{3/2}(\Gamma_F)$, but $v_{|\Gamma_F}\in\widetilde{H}^{3/2}(\Gamma_F)$ is not automatically fulfilled. However, the gibp formula (4) is easily extended to (p,v) of $D(\Delta;\Omega)\times H^N(\Omega)$, such that $v_{|\Gamma_F}\in\widetilde{H}^{3/2}(\Gamma_F)$, $\forall F$.

3. Local traces and generalized integration by parts formulas for the electromagnetic field

Since we assumed that the right-hand sides of Maxwell equations belong to $L^2(\Omega)$, we consider the spaces $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ of electromagnetic fields as below.

Definition 3.1. Let $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ be the space of electromagnetic fields, with

$$\mathcal{X}=\big\{\mathbf{x}\in\mathbf{H}(\mathrm{curl},\Omega)\cap\mathbf{H}(\mathrm{div},\Omega):\ \mathbf{x}\times\mathbf{n}_{|\Gamma}=0\big\};\tag{5}$$

$$\mathcal{Y}=\big\{\mathbf{y}\in\mathbf{H}(\mathrm{curl},\Omega)\cap\mathbf{H}(\mathrm{div},\Omega):\ \mathbf{y}\cdot\mathbf{n}_{|\Gamma}=0\big\}.\tag{6}$$

As we are interested in the regular/singular splitting of the fields, we introduce some subspaces of $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$.

Definition 3.2. Consider the regular subspaces of $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$

$$\mathcal{X}^R=\mathcal{X}\cap\mathbf{H}^1(\Omega),\qquad \mathcal{X}^R_F=\{\mathbf{x}\in\mathcal{X}^R:\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{n}_{|\Gamma_{F'}}=0,\ \forall F'\neq F\};\tag{7}$$

$$\mathcal{Y}^R=\mathcal{Y}\cap\mathbf{H}^1(\Omega),\qquad \mathcal{Y}^R_F=\{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}^R:\ \mathbf{y}\times\mathbf{n}_{|\Gamma_{F'}}=0,\ \forall F'\neq F\}.\tag{8}$$

As already mentioned, $\mathcal{X}^R$ (respectively $\mathcal{Y}^R$) is closed in $\mathcal{X}$ (respectively $\mathcal{Y}$).
Moreover, we know from [1,2] that

Theorem 3.3. $(+)$ *The mapping* $\mathbf{x}\mapsto\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}_{|\Gamma_F}$ *is linear and continuous from* $\mathcal{X}^R$ *to* $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_F)$;
(i) *The mapping* $\mathbf{x}\mapsto\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}_{|\Gamma_F}$ *is surjective from* $\mathcal{X}^R_F$ *to* $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_F)$. *Its kernel is* $\mathbf{H}^1_0(\Omega)$.

A direct consequence is

Corollary 3.4. *The space* $\mathcal{X}^R$ *can be written as the sum*: $\mathcal{X}^R=\mathcal{X}^R_1+\cdots+\mathcal{X}^R_{N_F}$.

As far as gibp formulas involving vector fields of $\mathcal{X}^R$ are concerned, let us provide one formula from [2], whereas the other one is standard, if one recalls that $\mathbf{H}_0(\mathrm{curl},\Omega)$ is – by definition – the closure of $\mathcal{D}(\Omega)^3$ in $\mathbf{H}(\mathrm{curl},\Omega)$.

Theorem 3.5. *The following gibp formulas hold*:

$$(p,\mathrm{div}\,\mathbf{x})_0+\langle\nabla p,\mathbf{x}\rangle_{\mathcal{X}^R}=\sum_F\langle p_{|\Gamma_F},\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}_{|\Gamma_F}\rangle_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_F)},\quad \forall(p,\mathbf{x})\in D(\Delta;\Omega)\times\mathcal{X}^R;\tag{9}$$

$$\langle\mathrm{curl}\,\mathbf{p},\mathbf{x}\rangle_{\mathbf{H}_0(\mathrm{curl},\Omega)}-(\mathbf{p},\mathrm{curl}\,\mathbf{x})_0=0,\quad \forall(\mathbf{p},\mathbf{x})\in\mathbf{L}^2(\Omega)\times\mathbf{H}_0(\mathrm{curl},\Omega).\tag{10}$$

In order to transpose the results (when possible) to the magnetic case, let us introduce the space of vector, tangential, L^2 traces on Γ. As a matter of fact, the nature of the normal and tangential traces are fundamentally different, since the first one is scalar and the second one is vector.

Definition 3.6. Let $\mathbf{L}^2_t(\Gamma)$ be the space of $L^2(\Gamma)^3$ tangential traces

$$\mathbf{L}^2_t(\Gamma)=\big\{\mathbf{v}\in L^2(\Gamma)^3:\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0\big\}.\tag{11}$$

Then, it can be proven [8, pp. 177–178] that

Theorem 3.7. *The mapping* $\mathbf{y}\mapsto\mathbf{y}\times\mathbf{n}_{|\Gamma_F}$ *is surjective from* $\mathcal{Y}^R_F$ *to* $\widetilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma_F)\cap\mathbf{L}_t(\Gamma)$. *Its kernel is* $\mathbf{H}^1_0(\Omega)$.

However, since $(+)$ has no equivalent in the magnetic case (for reasons similar to those expressed in Remark 1), there is no equivalent of Corollary 3.4. Still, one obtains an adequate property in this case. To that aim, one has to use an intermediate density result in the proof of Lemma 2.6 in [7], which yields

Corollary 3.8. *The sum* $\sum_F\mathcal{Y}^R_F$ *is dense in* $\mathcal{Y}^R$.

Transposing (9) is standard, if one considers elements of $L^2(\Omega) \times \mathbf{H}_0(\mathrm{div}, \Omega)$. On the other hand, in order to derive a formula similar to (10) for elements of $\mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathcal{Y}^R$ (or of a suitable subset), let us introduce the tangential components trace mapping on Γ, $\pi_T : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{n} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{n})_{|\Gamma}$. Indeed, recall the integration by parts formula

$$(\mathrm{curl}\,\mathbf{p}, \mathbf{y})_0 - (\mathbf{p}, \mathrm{curl}\,\mathbf{y})_0 = \int_\Gamma \pi_T \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}\,\mathrm{d}\Gamma, \tag{12}$$

for smooth vector fields $\mathbf{p}$, $\mathbf{y}$. Then, since the local tangential trace of elements of $\mathcal{Y}_F^R$ belongs to $\widetilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma_F) \cap \mathbf{L}_t(\Gamma)$, one requires that $\mathbf{p}$ is such that $\pi_T \mathbf{p}$ belongs to its dual $(\widetilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma_F) \cap \mathbf{L}_t(\Gamma))'$. Owing to Theorem 2.2(ii), this is the case of elements of $\mathbf{D}(\boldsymbol{\Delta}; \Omega)$. Summing up the results (cf. [8, pp. 179–181] for (14)), one gets

Theorem 3.9. *The following gibp formulas hold*:

$$(p, \mathrm{div}\,\mathbf{y})_0 + \langle \nabla p, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{H}_0(\mathrm{div},\Omega)} = 0, \quad \forall (p, \mathbf{y}) \in L^2(\Omega) \times \mathbf{H}_0(\mathrm{div}, \Omega); \tag{13}$$

$$\langle \mathrm{curl}\,\mathbf{p}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{Y}_F^R} - (\mathbf{p}, \mathrm{curl}\,\mathbf{y})_0 = \langle \pi_T \mathbf{p}_{|\Gamma_F}, \mathbf{y} \times \mathbf{n}_{|\Gamma_F} \rangle_{\widetilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma_F) \cap \mathbf{L}_t^2(\Gamma)}, \quad \forall (\mathbf{p}, \mathbf{y}) \in \mathbf{D}(\boldsymbol{\Delta}; \Omega) \times \mathcal{Y}_F^R. \tag{14}$$

4. A characterization of the singular electromagnetic fields

Recall that our aim is to characterize the singular electromagnetic fields by orthogonality (to all regular electromagnetic fields). Therefore, we have to focus on the scalar product. Since both $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ are subsets of $\mathbf{H}(\mathrm{curl}, \Omega) \cap \mathbf{H}(\mathrm{div}, \Omega)$, a natural choice would be the scalar product induced by the graph norm. However, we know from Weber [9] that both $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ are compactly imbedded in $\mathbf{L}^2(\Omega)$. As a consequence, one can prove that

$$(\cdot, \cdot)_W : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto (\mathrm{curl}\,\mathbf{u}, \mathrm{curl}\,\mathbf{v})_0 + (\mathrm{div}\,\mathbf{u}, \mathrm{div}\,\mathbf{v})_0, \tag{15}$$

defines a norm, which is equivalent to the graph norm. Then, one can define the singular spaces by orthogonality.

Definition 4.1. Let $\mathcal{X}^S$ be the space of singular electric fields: $\mathcal{X} = \mathcal{X}^R \overset{\perp_W}{\oplus} \mathcal{X}^S$.

Let $\mathcal{Y}^S$ be the space of singular magnetic fields: $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^R \overset{\perp_W}{\oplus} \mathcal{Y}^S$.

Note that the divergence of elements of $\mathcal{X}^S$ (resp. of $\mathcal{Y}^S$) are dual singularities of the Laplace problem with homogeneous Dirichlet (resp. homogeneous Neumann) boundary condition.

Finally, with the help of the generalized integration by parts and the surjectivity results (and with Corollary 3.8 in the magnetic case), it is possible to establish the following characterizations of the singular electromagnetic fields, with involves the vector Laplace operator, standardly defined by $-\boldsymbol{\Delta} = \mathrm{curl}\,\mathrm{curl} - \nabla\,\mathrm{div}$.

Theorem 4.2. *An element* $\underline{\mathbf{x}}$ *of* $\mathcal{X}$ *is singular iff the condition* (16) *below is fulfilled*:

$$-\boldsymbol{\Delta}\underline{\mathbf{x}} = 0 \quad in\ \Omega, \qquad \mathrm{div}\,\underline{\mathbf{x}}_{|\Gamma_F} = 0 \quad in\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_F),\ \forall F. \tag{16}$$

An element $\underline{\mathbf{y}}$ *of* $\mathcal{Y}$ *is singular iff the condition* (17) *below is fulfilled*:

$$-\boldsymbol{\Delta}\underline{\mathbf{y}} = 0 \quad in\ \Omega, \qquad \pi_T(\mathrm{curl}\,\underline{\mathbf{y}})_{|\Gamma_F} = 0 \quad in\ \big(\widetilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma_F) \cap \mathbf{L}_t^2(\Gamma)\big)',\ \forall F. \tag{17}$$

References

[1] F. Assous, P. Ciarlet Jr., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 325 (1997) 605–610.
[2] F. Assous, P. Ciarlet Jr., P.-A. Raviart, E. Sonnendrücker, Math. Methods Appl. Sci. 22 (1999) 485–499.
[3] M.Sh. Birman, M.Z. Solomyak, Siberian Math. J. 28 (1987) 12–24.
[4] A.S. Bonnet-Ben Dhia, C. Hazard, S. Lohrengel, SIAM J. Appl. Math. 59 (1999) 2028–2044.
[5] A. Buffa, P. Ciarlet Jr., Math. Methods Appl. Sci. 24 (2001) 9–48.
[6] M. Costabel, M. Dauge, Arch. Rational Mech. Anal. 151 (2000) 221–276.
[7] M. Costabel, M. Dauge, S. Nicaise, Math. Models Numer. Anal. 33 (1999) 627–649.
[8] E. Garcia, PhD Thesis, Paris 6 University, France, 2002 (in French).
[9] C. Weber, Math. Methods Appl. Sci. 2 (1980) 12–25.