

Analyse numérique

Sur une approximation des champs propagés par les équations de Maxwell instationnaires, homogènes, à l'extérieur d'un domaine borné

Vincent Mouysset^{a,b}

^a ONERA-Toulouse, DEMR/CDE, 2, avenue Édouard-Belin, BP 4025, 31055 Toulouse cedex, France

^b MIP, université Toulouse 3, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex, France

Reçu le 24 janvier 2004 ; accepté après révision le 14 septembre 2005

Disponible sur Internet le 21 octobre 2005

Présenté par Olivier Pironneau

Résumé

Dans cette Note on établit une formule intégrale approchée permettant l'évaluation des champs électromagnétiques en un point de l'espace-temps à partir de valeurs relevées sur la surface \mathcal{F} d'un polyèdre. Le résultat conduit à des calculs localisés en temps, découpés géométriquement en espace selon des parties adaptables de \mathcal{F} et optimisables en fonction de l'éloignement du point.

Pour citer cet article : V. Mouysset, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

On an approximation of propagated fields by the non-stationary Maxwell's equations, homogeneous, outside a bounded domain. This Note is devoted to obtaining an approximate integral formula giving the value of the electromagnetic field at a space-time point from values measured on a polyedral surface \mathcal{F} . The main result leads to time-localized calculations, geometrically split in space along the adaptative parts of \mathcal{F} , and optimisable as a function of the point's distance. *To cite this article: V. Mouysset, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Starting from a scattering problem represented by Maxwell's equations in the three space dimensions, surrounding all source terms and all scatterers in a polyedral zone of \mathbb{R}^3 , noted \mathcal{P} , and solving this system in a bigger bounded domain using any time method, one wants to evaluate numerically, in the complementary exterior region of this domain, values of the solution to this problem. To any given couple (t, X) of the space-time domain $\mathbb{R}^+ \times \overline{\mathcal{P}}^c$, this Note provides an efficient formulation, time localized and space split (along some subdivision \mathcal{F}_i ($i = 1, \dots, n$) of \mathcal{F} in sub-surfaces), called an *approximate integral formula*, which gives a means of computing the electromagnetic

Adresse e-mail : vincent.mouysset@oncert.fr (V. Mouysset).

fields E and H (electric and magnetic fields, respectively) from those chosen on a given surface \mathcal{F} (exterior to \mathcal{P}) called the Huygens' surface.

This problem is expressed in Eq. (1) where $f_E = (\mathbf{n} \times H)\delta_{\mathcal{F}}$ and $f_H = -(\mathbf{n} \times E)\delta_{\mathcal{F}}$ (with \mathbf{n} the exterior normal to \mathcal{P}). In order to give the main results, some (geometrical) notations have to be introduced: for each $i = 1, \dots, n$ and each $X \in \mathbb{R}^3$, let \mathbf{n}_i be the value of \mathbf{n} among each \mathcal{F}_i , X_i^0 a given point on \mathcal{F}_i , $d_i = |X_i^0 - X|$, \mathbf{t}_i the exterior unitary normal to the X centered sphere of radius d_i at a given point $X_i(\sigma_i)$, the projection of X on the intersection of this sphere, and the expansion of \mathcal{F}_i to a plan \mathcal{P}_i , and \mathbf{s}_i a vector colinear to $\mathbf{n}_i \times \mathbf{t}_i$. Let \mathbf{t}_i^0 be the normalized vector \mathbf{t}_i at point X_i^0 . Thus, assuming that $\overline{\mathcal{P}^c}$ has the property described in Definition 2.1, the main result is expressed in the following theorem:

Theorem 0.1. *For any couple (t, X) , where $t \in \mathbb{R}^+$ and X belongs to the complementary $(\overline{\mathcal{P}^c})$ of \mathcal{P} , solution to (1) is given by formula (2), where for each $i = 1, \dots, n$, δ_i stands for the diameter of \mathcal{F}_i .*

The proof of this theorem relies basically on four points. First, a well-chosen set of vectors \mathbf{v}_i regularize functions (f_E, f_H) into $(f_E^\varepsilon, f_H^\varepsilon)$ defined in (3), with supports translated by $\varepsilon\mathbf{v}_i$, for $\varepsilon > 0$ small enough, by convoluting with a regularization of Dirac φ^ε . Then, splitting the solution to the new, regularized problem (4) among each \mathcal{F}_i , that is guaranteed by a good choice of \mathbf{v}_i ($i = 1, \dots, n$), leads to Eq. (5) giving the solution to (4) with respect to $f_E^\varepsilon, f_H^\varepsilon$, the kernel of the d'Alembert's equation \mathcal{Z}_2 , and the comatrix to Maxwell's equation \mathcal{COM} . Then, we express (5) in a new coordinate system (given for each \mathcal{F}_i) associated to the new vector basis (so \mathcal{COM} becomes \mathcal{COM}_i in (6)), and simplify according to the results of Lemmas 4.1 and 4.2. Then make ε tend to 0 to obtain a first suitable expression of the solution to problem (1). Finally, formula (2) is given by a Taylor expansion to order 0, smooth with respect to the homogeneous quantity $\sup_i ((d_i)^{-1} \tau_i)$, assuming that the error introduced is in $O(\sup_i \{\sup_{\tau_i \in \mathcal{F}_i} (d_i^{-1} \tau_i)^2\})$ with $|\tau_i| \leq \delta_i$.

Many choices of the 'sub-faces' \mathcal{F}_i ($i = 1, \dots, n$) are possible; formula (2) gives the opportunity either to enlarge the 'sub-faces' (and reduce their number) if X_0 is 'far' from \mathcal{F} , or to shrink them to bring X 'close' to \mathcal{F} . Both approaches are validated by numerical examples in [2].

1. Introduction

Cette Note traite d'un problème posé par l'évaluation numérique, en un point donné de l'espace-temps $(t, X) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$, des champs électrique et magnétique (notés respectivement E et H) résultant d'un problème de diffraction par un ou plusieurs obstacles, en présence de source(s), dans un milieu homogène. Dans le cadre le plus général, où ces éléments présentent une complexité importante (de géométrie ou de composition), l'emploi de méthodes numériques volumiques de résolution (telles que les différences finies, les volumes finis, ...) est prépondérant. Cependant, le coût et l'erreur d'approximation liés à ces méthodes croît avec la taille du domaine de calcul. Ainsi, lorsqu'on souhaite obtenir le champ électromagnétique en un point quelconque X , extérieur au volume minimal requis par l'implémentation de la méthode numérique, une extension du domaine de calcul devient nécessaire. La réalisation de cette opération et la précision du résultat s'avèrent alors difficiles à garantir. Pour éviter ces inconvénients, des formules d'extrapolation, dites « de rayonnement », ont été mises au point. Le principe est d'obtenir une approximation du champ propagé, en dehors d'un volume donné, à partir de la connaissance des traces tangentielles de E et H sur le bord de celui-ci (appelé surface de Huygens).

Supposons que toutes les sources et les objets diffractants peuvent être contenus dans un polyèdre \mathcal{P} de \mathbb{R}^3 , de frontière \mathcal{F} et de normale extérieure unitaire \mathbf{n} . La problématique posée est alors décrite par la recherche d'une résolution approchée du problème extérieur suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \partial_t E - \nabla \times H = f_E, \\ \partial_t H + \nabla \times E = f_H, \end{cases} \quad (t, X) \in \mathbb{R}^+ \times \overline{\mathcal{P}^c}, \quad (1)$$

où $f_E = (\mathbf{n} \times H)\delta_{\mathcal{F}}$ et $f_H = -(\mathbf{n} \times E)\delta_{\mathcal{F}}$ sont les champs tangents relevés sur la surface \mathcal{F} , $\delta_{\mathcal{F}}$ désignant la mesure de Dirac portée par une surface localement intégrable Σ .

Principalement utilisée par les électromagnéticiens, et à la base de la plupart des autres formules de rayonnement, la formule de *champ lointain* de Yee [6] utilise un développement au premier ordre en $1/d$ (d représentant la distance de X à la surface de Huygens) d'une écriture de la solution des équations de Maxwell, homogènes, fréquentielles,

à partir de potentiels provenant du noyau de l'équation des ondes vectorielle [3]. L'expression temporelle de celle-ci s'obtenant à l'aide d'un relèvement formel par transformée de Fourier inverse. D'une grande efficacité numérique, et précis pour le calcul du champ lointain, ce type de formules n'est cependant valable que sous la condition $d > 2D^2/\lambda$ où D désigne la longueur caractéristique de la surface considérée, et λ la longueur d'onde du signal. Dans les autres cas, on a recours soit à l'extension du domaine de calcul, soit à des formules de rayonnement de type *champ proche* (cf. [1] pour bibliographie). Essentiellement construites sur le même procédé mais intégrant des termes d'ordres supérieurs (en $1/d^2$ ou $1/d^3$) provenant de développements similaires, elles permettent de lever la singularité dans l'équation intégrale par l'utilisation du schéma numérique. Bien que de meilleure précision, ces formules s'avèrent cependant beaucoup moins efficaces (coûteuses, instables).

Le résultat présenté dans cette Note propose un autre type de formule de rayonnement, indépendante du schéma numérique choisi dont l'évaluation de l'erreur se fait suivant des quantités homogènes. Partant d'une écriture pouvant être assimilée à celle des potentiels retardés [4], une *formule intégrale approchée* est ainsi établie. Le principe est d'utiliser le couplage espace–temps à partir d'une écriture de la résolvante des équations de Maxwell instationnaires, et d'en proposer une approximation selon un critère homogène δ/d (ces quantités s'interprétant soit temporellement, soit spatialement). En considérant δ comme une dimension caractéristique sur \mathcal{F} , des regroupements d'éléments d'une même face pourront être effectués afin d'optimiser les performances numérique de la formule. Il sera ainsi possible de jouer sur la taille de ce découpage afin de pouvoir traiter efficacement aussi bien des points lointains (regroupements importants) que proches (regroupements plus fins), tout en assurant un contrôle de l'erreur commise.

2. Surface admissible et surface de Huygens

Étant donné la surface \mathcal{F} , pour établir la formule intégrale approchée, il est nécessaire de découper l'espace d'intégration (selon X) en des « sous-faces » notées \mathcal{F}_i ($i = 1, \dots, n$). L'objectif étant de remplacer l'intégration spatiale complète en une sommation sur les \mathcal{F}_i , des permutations entre sommations sur les faces et dérivations doivent être rendues possibles. Pour cela, on caractérise au préalable les surfaces permettant l'écriture de (5) dans un cadre plus général que les polyèdres convexes.

Définition 2.1. Soit un polyèdre \mathcal{P} dans \mathbb{R}^3 de frontière \mathcal{F} . On note $\overline{\mathcal{P}}^c$ le complémentaire de \mathcal{P} . Enfin, on suppose que \mathcal{F} est découpée en sous-faces fermées \mathcal{F}_i ($i = 1, \dots, n$) ($\mathcal{F} = \bigcup_i \mathcal{F}_i$), vérifiant :

- (i) $\forall i \neq j, \text{Int}_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j) = \emptyset$, où $\text{Int}_{\mathcal{F}}(A)$ est l'intérieur de $A \subset \mathcal{F}$ pour la topologie induite sur \mathcal{F} ,
- (ii) \mathcal{F}_i est une face ou une « sous-face », donc possède une normale \mathbf{n}_i (sortante à \mathcal{P}) constante sur \mathcal{F}_i .

Alors, une telle surface \mathcal{F} sera appelée *admissible* si elle vérifie les hypothèses suivantes :

- (H1) il existe des ouverts \mathcal{V}_j ($j = 1, \dots, N$) (avec $N \geq n$) de \mathbb{R}^3 tels que $\bigcup_j \overline{\mathcal{V}_j} = \mathbb{R}^3$, et $\forall i, \exists ! j, \mathcal{F}_i \subset \overline{\mathcal{V}_j}$ (par renumérotation on indexera par i les ouverts \mathcal{V}_j vérifiant $\mathcal{F}_i \subset \overline{\mathcal{V}_j}$),
- (H2) il existe des vecteurs \mathbf{v}_i ($i = 1, \dots, n$) tels que
 - (i) $\forall x_0 \in \mathcal{F}_i, \{x_0 + k\mathbf{v}_i, 0 < k < 1\} \subset \overline{\mathcal{P}}^c$,
 - (ii) il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall i \neq j, A_i^\varepsilon \cap A_j^\varepsilon = \emptyset$ et tel que $\forall i, A_i^\varepsilon \subset \mathcal{V}_i$, où $A_i^\varepsilon = \bigcup_{x \in \{x_0 + \varepsilon \mathbf{v}_i, x_0 \in \mathcal{F}_i\}} B(x, \delta(\varepsilon))$.

Remarque 1. Une telle définition permet d'assurer que le domaine extérieur au volume délimité par \mathcal{F} a la propriété de *finite tiling* définie dans [5], propriété très utile dans les problèmes de scattering.

3. Formule intégrale approchée

On désignera par \mathbb{I}_k la matrice identité de \mathbb{C}^k , et pour tout μ vecteur de \mathbb{C}^3 par $\mu \times \mathbb{I}_6$ l'opérateur $(v, w) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \mapsto (\mu \times v, \mu \times w) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$, où $\mu \times$ désigne l'endomorphisme produit vectoriel dans \mathbb{C}^3 .

Théorème 3.1. Soit \mathcal{P} un polyèdre de surface extérieure $\mathcal{F} = \bigcup_i \mathcal{F}_i$ admissible (conformément à la Définition 2.1). Alors, pour tout point $(t, X) \in \mathbb{R}^+ \times \overline{\mathcal{P}}^c$, la solution de (1) est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}(t, X) &= \sum_i \int_{\mathcal{F}_i} \left[\frac{1}{4\pi d_i} \left\{ \mathbf{t}_i^0 \times \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_3 \\ \mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{t}_i^0 \times \mathbf{t}_i^0 \times \mathbb{I}_6 \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_i \times \partial_t H \\ -(\mathbf{n}_i \times \partial_t E) \end{pmatrix} (t - d_i, \cdot) \right. \\
 &+ \frac{1}{4\pi d_i^2} \left\{ \mathbf{t}_i^0 \times \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_3 \\ \mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix} + 3\mathbf{t}_i^0 \times \mathbf{t}_i^0 \times \mathbb{I}_6 - 2\mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \mathbb{I}_6 \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_i \times H \\ -(\mathbf{n}_i \times E) \end{pmatrix} (t - d_i, \cdot) \\
 &\left. + \frac{1}{4\pi d_i^3} \int_0^{t-d_i} \left\{ 3\mathbf{t}_i^0 \times \mathbf{t}_i^0 \times \mathbb{I}_6 - 2\mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \mathbb{I}_6 \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_i \times H \\ -(\mathbf{n}_i \times E) \end{pmatrix} (s, \cdot) ds \right] dS_i + O\left(\left(\sup_i \frac{\delta_i}{d_i} \right)^2 \right), \tag{2}
 \end{aligned}$$

où, pour tout i , dS_i est l'élément de surface de \mathcal{F}_i , \mathbf{n}_i la normale unitaire à \mathcal{F}_i sortant de \mathcal{P} , d_i est la distance d'un point X_i^0 quelconque de \mathcal{F}_i à X , $\mathbf{t}_i^0 = (d_i)^{-1} \overrightarrow{X_i^0 X}$, et δ_i est le diamètre de \mathcal{F}_i .

Les termes vectoriels obtenus dans (2) étant géométriquement descriptibles, la solution est alors indépendante du système de coordonnées choisi ; son implémentation (intégration sur les \mathcal{F}_i et approximations temporelles) utilise le schéma numérique de résolution choisi pour (1).

Remarque 2. Les termes en d_i^{-1} de (2) correspondent à la formule de champs lointains de Yee [6].

4. Ébauche de la démonstration du Théorème 3.1

Soit $(t, X) \in \mathbb{R}^+ \times \overline{\mathcal{P}}^c$, un point de l'espace-temps où est évaluée la formule intégrale approchée. Les solutions de (1) sont toujours supposées de classe au moins \mathcal{C}^1 dans un voisinage ouvert de (t, X) .

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. \mathcal{P}_i désigne le plan contenant \mathcal{F}_i . On se donne un point de référence $X_i^0 \in \mathcal{F}_i$, et $S_i(X)$ la sphère de centre X et de rayon $|X_i^0 - X|$. Soient \mathbf{n}_i une normale unitaire à \mathcal{P}_i , $\sigma_i \in [0, 2\pi[$ une abscisse curviligne décrivant $\mathcal{P}_i \cap S_i(X)$ de représentation associée h_i , \mathbf{t}_i la normale unitaire sortante à $S_i(X)$ au point $X_i(\sigma_i)$, et \mathbf{r}_i la projection orthogonale de \mathbf{t}_i sur \mathcal{P}_i . Le vecteur \mathbf{t}_i au point X_i^0 sera alors noté \mathbf{t}_i^0 . Un point $M \in \overline{\mathcal{P}}^c$, représenté par (x_1, x_2, x_3) dans un repère cartésien de \mathbb{R}^3 , est alors désigné par le triplet $(\tau_i, \sigma_i, \eta_i)$, où σ_i est l'abscisse curviligne de la projection de M sur $\mathcal{P}_i \cap S_i(X)$, avec

$$x_k = (X_i(\sigma_i))_k + (d_i)^{-1} \tau_i (X_i(\sigma_i) - X)_k + (\eta_i - \tau_i p_i)(\mathbf{n}_i)_k, \quad k \in \{1, 2, 3\},$$

où $p_i = \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{n}_i$ et $d_i = |X_i^0 - X|$. Un tel changement de variables induit naturellement un repère orthogonal direct $(\mathbf{r}_i, \mathbf{s}_i, \mathbf{n}_i)$ où $\mathbf{s}_i = \mathbf{n}_i \times \mathbf{r}_i$, si $X_i^0 \in \mathcal{F}_i$ est choisi tel que $p_i \neq \pm 1$. On peut démontrer que la formule (2) se prolonge, continûment sur tout chemin, au cas $p_i = \pm 1$.

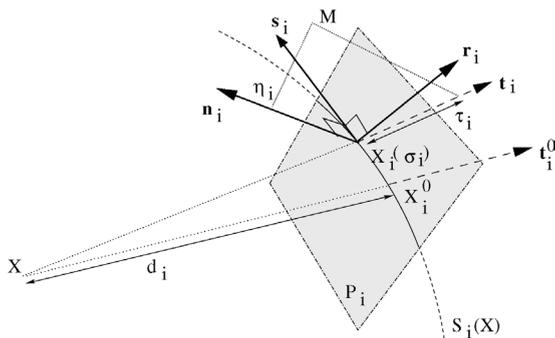


Fig. 1. Système de coordonnées locales.

Fig. 1. Local coordinate system.

Pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, à l'aide d'une fonction partition de l'unité φ^ε , on introduit les fonctions f_E^ε et f_H^ε , définies par :

$$f_E^\varepsilon = \left(\sum_i [(\mathbf{n}_i \times H) \delta \mathcal{P}_i] *_{(X)} \mathbb{Y}_{\varepsilon \mathbf{v}_i} *_{(X)} \varphi^\varepsilon \right), \quad f_H^\varepsilon = - \left(\sum_i [(\mathbf{n}_i \times E) \delta \mathcal{P}_i] *_{(X)} \mathbb{Y}_{\varepsilon \mathbf{v}_i} *_{(X)} \varphi^\varepsilon \right). \tag{3}$$

Le problème (P) est alors la limite en $\varepsilon \rightarrow 0$ (au sens des distributions) du problème régularisé (P_ε) :

$$(P_\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t E^\varepsilon - \nabla \times H^\varepsilon = f_E^\varepsilon, \\ \partial_t H^\varepsilon + \nabla \times E^\varepsilon = f_H^\varepsilon, \end{cases} \quad (t, X) \in \mathbb{R}^+ \times \overline{\mathcal{P}^c}. \tag{4}$$

Pour ce nouveau problème il est alors immédiat de constater que l'expression de la solution $(E^\varepsilon, H^\varepsilon)$, en un point $(t, X) \in \mathbb{R}^+ \times \overline{\mathcal{P}^c}$, peut se décomposer en une somme d'éléments sur les sous-faces,

$$\begin{pmatrix} E^\varepsilon \\ H^\varepsilon \end{pmatrix} (t, X) = \int_{(s,Y)} \mathcal{Z}_2(t-s, X-Y) \mathcal{COM} \int_0^s \begin{pmatrix} f_E^\varepsilon \\ f_H^\varepsilon \end{pmatrix} (r, Y) dr ds dY, \tag{5}$$

\mathcal{Z}_2 désignant le noyau de Green du d'alembertien, et \mathcal{COM} la comatrice associée au système de Maxwell. Par utilisation de la forme de f_E^ε et f_H^ε , et en désignant par \mathcal{COM}_i l'écriture (après simplification) de \mathcal{COM} dans $(\mathbf{r}_i, \mathbf{s}_i, \mathbf{n}_i)$, il vient la décomposition :

$$\mathcal{COM}_i = \begin{pmatrix} \mathcal{ROT}_i & 0 \\ 0 & \mathcal{ROT}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{ROT}_i & -\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{I}_3 \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{I}_3 & \mathcal{ROT}_i \end{pmatrix}, \tag{6}$$

où

$$\mathcal{ROT}_i = \frac{\sqrt{1-p_i^2}}{J_i} \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \times \frac{\partial}{\partial \sigma_i} \mathbb{I}_3 + \frac{1}{\sqrt{1-p_i^2}} \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|} \times \frac{\partial}{\partial \tau_i} \mathbb{I}_3 + \mathbf{n}_i \times \frac{\partial}{\partial \eta_i} \mathbb{I}_3,$$

et J_i désigne le jacobien du changement de variables.

Le point clé de la démonstration est alors de regrouper de manière judicieuse les termes de dérivation en t, τ_i, σ_i et η_i dans l'écriture de $(E^\varepsilon, H^\varepsilon)$ au point (t, X) , puis d'évaluer les différentiations successives en ces variables appliquées à \mathcal{Z}_2 dans (5). Pour cela on utilise les résultats des deux lemmes suivants :

Lemme 4.1. Soient γ l'application de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)$ définie par $\gamma : (s, Y) \mapsto (t-s, X-Y)$, et Ω_λ le sous-domaine de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ défini par $\Omega_\lambda = \{(s, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) \in \{s + \lambda, +\infty[\times [-d_i + \lambda, +\infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}\}$ pour $\lambda > 0$ quelconque donné. Alors, pour toute fonction régulière f telle que $\text{Supp } f \subset \Omega_\lambda$, on a :

$$\int (\mathcal{Z}_2 \circ \gamma)(s, Y) \frac{\partial}{\partial \sigma_i} f(s, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) ds d\tau_i d\sigma_i d\eta_i = 0.$$

Lemme 4.2. Soit f une fonction régulière telle que $\text{Supp } f \subset \Omega_\lambda$, alors :

$$- \forall \mu \in \{\tau_i, \eta_i\},$$

$$\begin{aligned} & \int \frac{\mathbb{Y}(t-s-\alpha(\tau_i, \eta_i))}{4\pi\alpha(\tau_i, \eta_i)} \frac{\partial}{\partial \mu} f(s, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) ds d\tau_i d\sigma_i d\eta_i \\ &= \int \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \mu} \frac{f(s, \tau_i, \sigma_i, \eta_i)}{4\pi\alpha^2(\tau_i, \eta_i)} Z(s, \tau_i, \eta_i) ds d\tau_i d\sigma_i d\eta_i, \end{aligned}$$

$$- \forall (\mu, \nu) \in \{\tau_i, \eta_i\}^2,$$

$$\begin{aligned} & \int \frac{\mathbb{Y}(t-s-\alpha(\tau_i, \eta_i))}{4\pi\alpha(\tau_i, \eta_i)} \frac{\partial^2}{\partial \mu \nu} f(s, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) ds d\tau_i d\sigma_i d\eta_i \\ &= \int \left(\frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \mu} \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \nu} \frac{\delta(t-s-\alpha(\tau_i, \eta_i))}{4\pi\alpha(\tau_i, \eta_i)} \frac{\partial}{\partial t} f(s, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) \right. \\ & \quad \left. + \frac{f(s, \tau_i, \sigma_i, \eta_i)}{4\pi\alpha^2(\tau_i, \eta_i)} \left[\frac{2}{\alpha(\tau_i, \eta_i)} \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \mu} \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \nu} - \frac{\partial^2 \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \nu \mu} \right] Z(s, \tau_i, \eta_i) \right) ds d\tau_i d\sigma_i d\eta_i, \end{aligned}$$

$$\text{où } \alpha(\tau_i, \eta_i) = \sqrt{d_i^2 + 2\tau_i(1 - p_i^2)d_i + (1 - p_i^2)\tau_i^2 + 2p_i\eta_id_i + \eta_i^2}, \mathbb{Y} \text{ désigne la fonction de Heaviside, et } Z(s, \tau_i, \eta_i) = \mathbb{Y}(t - s - \alpha(\tau_i, \eta_i)) + \alpha(\tau_i, \eta_i)\delta(t - s - \alpha(\tau_i, \eta_i)).$$

Ces deux lemmes se démontrent avec des arguments classiques d'intégrations par parties ; les dérivées successives de $\alpha(\tau_i, \eta_i)$ étant définies car $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\text{Supp} f)$ (car $\text{Supp} f \cap \mathcal{F}_i = \emptyset$ et $X \notin \text{Supp} f$).

Comme $X \notin \mathcal{F}_i$ il existe toujours un $\lambda > 0$ (suffisamment petit) tel que les fonctions $f_{E,H}^\varepsilon$ vérifient $\text{Supp}(f_{E,H}^\varepsilon) \subset \Omega_\lambda$, les Lemmes 4.1 et 4.2 permettant alors respectivement d'annuler les dérivées tangentielles aux sphères de propagation, et de faire apparaître une relation entre les autres variables d'espace (τ_i et η_i) et celle de temps (t). En passant à la limite, en 0 sur ε , on peut alors écrire de manière exacte la solution de (1) ; le résultat s'obtenant par développements limités au premier ordre en 0 par rapport à la quantité $\sup_i ((d_i)^{-1}\tau_i)$ sous l'intégrale, en remarquant que $|\mathbf{t}_i - \mathbf{t}_i^0| \leq (d_i)^{-1}\delta_i$, l'erreur étant donnée après majoration du reste intégral par $\sum_i (d_i)^{-1} \int_{\mathcal{F}_i} \mathcal{O}((d_i)^{-1}\tau_i) dS_i$ avec $\sup_{\mathcal{F}_i} |\tau_i| \leq \delta_i$.

5. Conclusion

Les termes vectoriels de la formule (2) s'interprètent de manière géométrique, on a ainsi une approche convenable et aisément implémentable de la solution du problème (1). Des évaluations numériques à des distances variables, avec \mathcal{P} non-convexe, ont été effectuées dans [2], validant (2).

Références

- [1] M. Kragalott, M.S. Kluskens, W.P. Pala, Time-domain fields exterior to a two-dimensional FDTD space, *IEEE Trans. Antennas and Propagation* 45 (1997) 1655–1663.
- [2] V. Mouysset, Traitement des interactions électromagnétiques dans le domaine temporel entre différents objets et sources isolés, dans un milieu homogène, par décomposition de domaine, en préparation.
- [3] A. Taflove, S.C. Hagness, *Computational Electrodynamics*, Artech House, 2000.
- [4] I. Terrasse, Résolution mathématique et numérique des équations de Maxwell instationnaires par une méthode de potentiels retardés, Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique, 1993.
- [5] C.H. Wilcox, *Scattering Theory for the d'Alembert Equation in Exterior Domains*, Springer-Verlag, 1975.
- [6] K.S. Yee, Time-domain extrapolation to the far field based on FDTD calculations, *IEEE Trans. Antennas and Propagation* 39 (1991) 410–413.