



Differential Geometry

Relative modular classes of Lie algebroids

Yvette Kosmann-Schwarzbach^a, Alan Weinstein^{b,1}

^a UMR 7640 du CNRS, Centre de mathématique Laurent Schwartz, École polytechnique, 91128 Palaiseau, France

^b Department of Mathematics, University of California, Berkeley, CA 94720, USA

Received 25 August 2005; accepted 5 September 2005

Available online 23 September 2005

Presented by Charles-Michel Marle

Abstract

We study the relative modular classes of Lie algebroids, and we determine their relationship with the modular classes of Lie algebroids with a twisted Poisson structure. *To cite this article: Y. Kosmann-Schwarzbach, A. Weinstein, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.

Résumé

Classes modulaires relatives des algébroïdes de Lie. Nous étudions les classes modulaires relatives des algébroïdes de Lie et nous déterminons leur relation avec les classes modulaires des algébroïdes de Lie avec structure de Poisson tordue. *Pour citer cet article : Y. Kosmann-Schwarzbach, A. Weinstein, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.

Version française abrégée

Dans l'étude des structures de Poisson sur les variétés, Koszul a introduit un champ de vecteurs dont la différentielle dans la cohomologie de Lichnerowicz–Poisson est nulle [8]. Dans [13], il est montré que le flot d'un tel champ de vecteurs est une limite classique du groupe d'automorphismes modulaires d'une algèbre de von Neumann, et la classe de cohomologie ainsi définie est nommée la *classe modulaire de la variété de Poisson*. Il y est aussi indiqué que cette notion se généralise lorsque le fibré tangent à la variété est remplacé par une algébroïde de Lie arbitraire. La notion de *classe caractéristique d'une algébroïde de Lie munie d'une représentation dans un fibré en droites* est définie dans [2]. La *classe modulaire d'une algébroïde de Lie*, A , de base M et d'ancre ρ_A , est ensuite définie comme la classe caractéristique de A pour la représentation définie par (6) avec $E = A$, $F = TM$, $\varphi = \rho_A$. La classe modulaire d'une variété de Poisson en est un cas particulier lorsque l'algébroïde de Lie considérée est le fibré cotangent de la variété muni du crochet de Lie des sections défini par le bivecteur de Poisson. Plus précisément, la classe modulaire du fibré cotangent est le double de la classe modulaire de la variété de Poisson. Ce facteur 2 s'explique par le fait

E-mail addresses: yks@math.polytechnique.fr (Y. Kosmann-Schwarzbach), alanw@math.berkeley.edu (A. Weinstein).

¹ Research partially supported by NSF Grant DMS-0204100.

que, dans le cas général, on doit considérer un fibré en droites qui, dans le cas particulier, est le carré de $\wedge^{\text{top}} T^*M$. Le facteur 2 se retrouve dans les généralisations décrites ci-dessous.

Le problème de la généralisation au cas où la structure de Poisson d'une variété est tordue par une 3-forme fermée, situation étudiée dans [11], a été résolu dans [7], où une définition de la *classe modulaire d'une algébroïde de Lie A munie d'une structure de Poisson tordue* est proposée, le cas des variétés de Poisson tordues étant celui où A est le fibré tangent à une variété. Cette définition générale étend la caractérisation donnée dans [6] (voir aussi [14]) : le produit intérieur par un champ modulaire est la différence de deux générateurs de carré nul de l'algèbre de Gerstenhaber de l'algébroïde de Lie A^* .

Dans cette Note, nous étudions d'abord la notion de *classe modulaire relative*, définie par la donnée d'un morphisme d'algébroïdes de Lie, notion introduite dans [4] sous le nom de *classe modulaire d'un morphisme d'algébroïdes de Lie*. Nous montrons ensuite que la classe modulaire définie dans [7] est la classe modulaire relative associée au morphisme $\pi^\sharp : A^* \rightarrow A$, défini par la donnée d'une section π de $\wedge^2 A$. Ici A est une algébroïde de Lie munie du bivecteur π et d'une section ψ de $\wedge^3(A^*)$ telle que $d_A\psi = 0$, et satisfaisant la relation (10) ; l'espace des sections du fibré vectoriel dual A^* est muni du crochet de Lie associé à la donnée de π et ψ . Ce crochet, noté $[\cdot, \cdot]_{\pi, \psi}$, généralisant le crochet de Lie des 1-formes sur une variété de Poisson, a été défini dans [11] lorsque A est le fibré tangent à une variété de Poisson tordue, et étendu au cas général dans [10]. La classe modulaire relative est une classe de cohomologie de l'algébroïde de Lie A^* , dont la différentielle est notée $d_{\pi, \psi}$. (Pour une algébroïde de Lie E , munie du crochet des sections noté en général $[\cdot, \cdot]_E$, on désigne en général par $d_E : \Gamma(\wedge^\bullet(E^*)) \rightarrow \Gamma(\wedge^{\bullet+1}(E^*))$ la différentielle de la cohomologie d'algébroïde de Lie de E .)

Nous rappelons d'abord (Section 2) la définition de la classe modulaire d'une algébroïde de Lie E . L'Éq. (1) définit une section ξ_E du fibré vectoriel dual E^* qui est fermée pour la différentielle d_E et qui définit par conséquent une classe de cohomologie de degré 1 de E , notée $\text{Mod } E$. Nous donnons en exemples $E = TM$ (la classe est nulle), $E = T^*M$ pour une variété de Poisson (M, π) , et le cas des algèbres de Lie considérées comme algébroïdes de Lie de base un point (la classe est le caractère modulaire infinitésimal). La théorie des classes modulaires des algèbres de Lie–Rinehart est développée dans [5].

Dans la Section 3, nous définissons la classe modulaire relative d'un couple d'algébroïdes de Lie (E, F) définie par un morphisme φ de E dans F . Puis, nous démontrons le Théorème 3.3, résultat général qui sera utilisé dans l'application au cas des structures de Poisson tordues : la classe modulaire $\text{Mod}^\varphi(E, F)$ est la classe caractéristique, au sens de [2], de E pour la représentation D^φ , définie par l'Éq. (6), de E dans le fibré vectoriel $L^{E, F} = \wedge^{\text{top}} E \otimes \wedge^{\text{top}} F^*$. La démonstration utilise le Lemme 3.2 qui étend, du calcul tensoriel sur les variétés au cas d'une algébroïde de Lie quelconque E , la propriété de commutation de la dérivation de Lie des sections de $\wedge^\bullet(E \oplus E^*)$ avec les contractions.

Dans la Section 4, on considère une algébroïde de Lie A , munie d'une structure de Poisson tordue. Dans [7], on a montré que dans le cas particulier où $A = TM$, la classe modulaire du fibré cotangent de A est égale au double de la classe modulaire de (TM, π, ψ) et l'on a remarqué que ce résultat ne s'étend pas au cas général. Au Théorème 4.1 nous établissons la relation entre la classe relative du couple d'algébroïdes de Lie (A^*, A) définie par le morphisme π^\sharp et la classe modulaire de (A, π, ψ) : la première est le double de la seconde. Dans le cas particulier où $A = TM$, la classe relative se réduit à la classe modulaire de T^*M et l'on retrouve (Corollaire 4.2) le résultat de [7].

Le cas des algèbres de Lie est abordé à la Section 5. Lorsque \mathfrak{h} est une sous-algèbre de Lie d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} , la classe modulaire de $(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ est l'obstruction à l'existence d'une mesure G -invariante sur l'espace homogène G/H , H et G étant des groupes de Lie connexes d'algèbres de Lie \mathfrak{h} et \mathfrak{g} .

1. Introduction

A modular class for a Lie algebroid with a twisted Poisson structure (A, π, ψ) was introduced in [7]. In this Note, we determine the relation between the modular class of the Lie algebroid A^* and this newly-defined class. The vector bundle A^* becomes a Lie algebroid when equipped with the bracket $[\cdot, \cdot]_{\pi, \psi}$ on sections (defined in [11] and [10]) and the anchor $\rho_A \circ \pi^\sharp$, where ρ_A is the anchor of A and $\pi^\sharp : A^* \rightarrow A$ is the bundle map associated to $\pi \in \Gamma(\wedge^2 A)$. To this end, we investigate *relative modular classes*, which were first considered in [4], where they were called *modular classes of Lie algebroid morphisms*. We show that the relative modular class of (A^*, A) defined by the morphism π^\sharp is equal to twice the class defined in [7] (Theorem 4.1). Since the relative modular class of a pair of Lie algebroids (E, F) defined by a morphism $\varphi : E \rightarrow F$ is the difference of the modular class of E and the image under the dual φ^* of φ of the modular class of F , it reduces to the modular class of E when $F = TM$. So Theorem 4.1 extends the

well-known fact [2,13] that, for a Poisson manifold (M, π) , the modular class of the Lie algebroid T^*M is twice the modular class of the Poisson manifold. To prove Theorem 4.1, we apply Theorem 3.3, which states that the relative modular class of the pair (E, F) defined by φ is a characteristic class, in the sense of [2], of E equipped with the representation defined by (6).

2. The modular class of a Lie algebroid

The *modular class* $\text{Mod } E$ of a Lie algebroid (E, ρ_E) , with base M , was defined by Evens, Lu and Weinstein in [2]. It is the class of a section ξ_E of E^* which satisfies, for all $x \in \Gamma E$,

$$\langle \xi_E, x \rangle \omega \otimes \lambda = [x, \omega]_E \otimes \lambda + \omega \otimes \mathcal{L}_{\rho_E x} \lambda, \tag{1}$$

where ω (resp., λ) is a nowhere-vanishing section of $\wedge^{\text{top}} E$ (resp., $\wedge^{\text{top}} T^*M$). Since the definition of ξ_E is insensitive to changes in the sign of ω and λ , we may use densities rather than forms if E or T^*M is non-orientable. The section ξ_E is called a *modular section* of E . It is a 1-cocycle in the Lie algebroid cohomology of E and its class, $\text{Mod } E$, is independent of the choice of ω and λ . We list various examples.

- (i) Let M be a manifold and $E = TM$, with anchor the identity of TM . Then $\text{Mod}(TM) = 0$.
- (ii) Let (M, π) be a Poisson manifold and $E = T^*M$ with anchor π^\sharp and Lie bracket $[\cdot, \cdot]_\pi$. Then the class of $\text{Mod}(T^*M)$ is twice the modular class of (M, π) , as defined in [13], following the earlier definition of the modular vector field, without a name, in [8], and its use in [1,3] and [9].
- (iii) If \mathfrak{g} is a Lie algebra, both the modular class of \mathfrak{g} considered as a Lie algebroid with base a point and the modular class of the linear Poisson manifold \mathfrak{g}^* are equal to the *infinitesimal modular character* $\chi^\mathfrak{g}$ of \mathfrak{g} , which is the linear form $x \mapsto \text{Tr}(\text{ad}_x^\mathfrak{g})$ on \mathfrak{g} .

3. Relative modular classes

Let (E, ρ_E) and (F, ρ_F) be Lie algebroids with base M . We recall that a vector bundle morphism $\varphi : E \rightarrow F$ is a Lie algebroid morphism (over the identity on M) if and only if $\wedge^\bullet \varphi^*$ is a chain map from $(\Gamma(\wedge^\bullet(F^*)), d_F)$ to $(\Gamma(\wedge^\bullet(E^*)), d_E)$.

Definition 3.1. For a Lie algebroid morphism $\varphi : E \rightarrow F$, we set

$$\text{Mod}^\varphi(E, F) = \text{Mod } E - \varphi^* \text{Mod } F, \tag{2}$$

and we call $\text{Mod}^\varphi(E, F)$ the *relative modular class* of (E, F) defined by φ .

For Lie algebroids A, B, C and morphisms $\varphi : A \rightarrow B$ and $\psi : B \rightarrow C$, we obtain

$$\text{Mod}^{\psi \circ \varphi}(A, C) = \text{Mod}^\varphi(A, B) + \varphi^* \text{Mod}^\psi(B, C). \tag{3}$$

It is clear from the definition that

$$\text{Mod}^{\rho_E}(E, TM) = \text{Mod } E, \tag{4}$$

so the ‘absolute’ modular class is a special case of the relative class.

This statement was a theorem in [4], where the relative class was defined in terms of divergence operators, without the use of the absolute class. The proof of that theorem is related to the following argument, in which we show directly that the relative modular class $\text{Mod}^\varphi(E, F)$ is the characteristic class of E associated with a representation, a notion defined in [2].

We shall first prove a lemma. Let E be a Lie algebroid and let x be a section of ΓE . On the one hand, the Lie derivative with respect to x of a form $\alpha \in \Gamma(\wedge^\bullet E^*)$ is $\mathcal{L}_x^E \alpha = [i_x, d_E] \alpha$, and \mathcal{L}_x^E is a degree 0 derivation of $\Gamma(\wedge^\bullet E^*)$. On the other hand, the map $Q \mapsto [x, Q]_E$ from $\Gamma(\wedge^\bullet E)$ to $\Gamma(\wedge^\bullet E)$ is a degree 0 derivation of $\Gamma(\wedge^\bullet E)$. If $f \in C^\infty(M)$ is considered as a 0-form or a 0-vector, then $\mathcal{L}_x^E f = \langle d_E f, x \rangle = \rho_E(x) \cdot f = [x, f]_E$. Therefore these operations extend to a unique derivation of $\Gamma(\wedge^\bullet(E \oplus E^*))$, which we also denote by \mathcal{L}_x^E .

Lemma 3.2. For $x \in \Gamma E$ and $\alpha \in \Gamma(\wedge^\bullet E^*)$, the endomorphisms \mathcal{L}_x^E , i_α and $i_{\mathcal{L}_x^E \alpha}$ of $\Gamma(\wedge^\bullet E)$ satisfy

$$[\mathcal{L}_x^E, i_\alpha] = i_{\mathcal{L}_x^E \alpha}. \quad (5)$$

Proof. If α is a 0-form, the relation follows from the Leibniz rule for $[\cdot, \cdot]_E$. Next, let α be a 1-form. Since the derivation $[\mathcal{L}_x^E, i_\alpha] - i_{\mathcal{L}_x^E \alpha}$ vanishes on elements of degree 0, it is enough to prove that it vanishes on elements of degree 1. Let y be a section of E , then $[\mathcal{L}_x^E, i_\alpha](y) = \rho_E(x) \cdot \langle \alpha, y \rangle - \langle \alpha, [x, y]_E \rangle$, while $i_{\mathcal{L}_x^E \alpha} y = \langle \mathcal{L}_x^E \alpha, y \rangle = \rho_E(y) \cdot \langle \alpha, x \rangle + (d_E \alpha)(x, y)$. By the definition of d_E the difference $[\mathcal{L}_x^E, i_\alpha] - i_{\mathcal{L}_x^E \alpha}$ vanishes on y . To extend the formula to forms of arbitrary degree, we use induction on the degree, taking into account that $i_{\alpha \wedge \alpha_1} = i_\alpha \circ i_{\alpha_1}$ for forms α and α_1 and that \mathcal{L}_x^E is a degree 0 derivation of $\Gamma(\wedge^\bullet E^*)$. \square

Theorem 3.3. Let $\varphi: E \rightarrow F$ be a Lie algebroid morphism. Set $L^{E,F} = \wedge^{\text{top}} E \otimes \wedge^{\text{top}} F^*$, and let $\omega \otimes \nu \in \Gamma(L^{E,F})$. For $x \in \Gamma E$, set

$$D_x^\varphi(\omega \otimes \nu) = \mathcal{L}_x^E \omega \otimes \nu + \omega \otimes \mathcal{L}_{\varphi x}^F \nu. \quad (6)$$

- (i) The map $x \mapsto D_x^\varphi$ is a representation of E on $L^{E,F}$.
- (ii) The relative modular class $\text{Mod}^\varphi(E, F)$ is the characteristic class of the Lie algebroid E with representation D^φ .

Proof. (i) We must prove that

$$(a) D_{f x}^\varphi = f D_x^\varphi, \quad (b) D_x^\varphi(f(\omega \otimes \nu)) = f D_x^\varphi(\omega \otimes \nu) + (\rho_E(x) \cdot f)\omega \otimes \nu, \quad \text{and} \quad (c) D_{[x,y]_E}^\varphi = [D_x^\varphi, D_y^\varphi],$$

for all $f \in C^\infty(M)$, x and $y \in \Gamma E$. In fact, since $[f, \cdot]_E$ and $i_{d_E f}$ are derivations of $\Gamma(\wedge^\bullet E)$ of degree -1 which coincide on elements of degree 0 or 1, and are therefore equal, $[f x, \omega]_E - f[x, \omega]_E = [f, \omega]_E \wedge x = i_{d_E f} \omega \wedge x = (\rho_E(x) \cdot f)\omega$. In addition, $d_F i_{f \varphi x} \nu - f d_F i_{\varphi x} \nu = d_F f \wedge i_{\varphi x} \nu = \langle \varphi x, d_F f \rangle \nu = (\rho_E(x) \cdot f)\nu$, since $\rho_F \circ \varphi = \rho_E$. Now (a) follows from these equalities. Relation (b) is clear, and (c) follows from the morphism property of φ .

(ii) We shall use relation (1) for ξ_E and ξ_F , and Lemma 3.2. Let $\mu \in \Gamma(\wedge^{\text{top}} T^* M)$ be a volume form on M , $\omega \in \Gamma(\wedge^{\text{top}} E)$, and $\bar{\omega} \in \Gamma(\wedge^{\text{top}} F)$, both nowhere-vanishing. Thus ξ_E satisfies, for all $x \in \Gamma E$,

$$\langle \xi_E, x \rangle \omega \otimes \mu = \mathcal{L}_x^E \omega \otimes \mu + \omega \otimes \mathcal{L}_{\rho_E x} \mu, \quad (7)$$

while ξ_F satisfies, for all $x \in \Gamma E$,

$$\langle \varphi^* \xi_F, x \rangle \bar{\omega} \otimes \mu = \mathcal{L}_{\varphi x}^F \bar{\omega} \otimes \mu + \bar{\omega} \otimes \mathcal{L}_{\rho_F(\varphi x)} \mu. \quad (8)$$

Let ν be the section of $\wedge^{\text{top}} F^*$ such that $\langle \bar{\omega}, \nu \rangle = 1$. By Lemma 3.2, $\langle \mathcal{L}_{\varphi x}^F \bar{\omega}, \nu \rangle + \langle \bar{\omega}, \mathcal{L}_{\varphi x}^F \nu \rangle = 0$. Setting $\eta = \xi_E - \varphi^* \xi_F$, we obtain, for all $x \in \Gamma E$,

$$\langle \eta, x \rangle \omega \otimes \nu = \mathcal{L}_x^E \omega \otimes \nu + \omega \otimes \mathcal{L}_{\varphi x}^F \nu. \quad (9)$$

Therefore, the section η of E^* is a representative of the class $\text{Mod}^\varphi(E, F)$. \square

4. The case of Lie algebroids with twisted Poisson structures

A Lie algebroid A equipped with a bivector $\pi \in \Gamma(\wedge^2 A)$ and a d_A -closed 3-form $\psi \in \Gamma(\wedge^3 A^*)$ satisfying

$$\frac{1}{2}[\pi, \pi]_A = (\wedge^3 \pi^\sharp) \psi, \quad (10)$$

is called a *Lie algebroid with a twisted Poisson structure* [7]. The vector bundle A^* is then a Lie algebroid with anchor π^\sharp and Lie bracket of sections $[\cdot, \cdot]_{A^*} = [\cdot, \cdot]_{\pi, \psi}$, as in [11]. Such structures on general Lie algebroids were first studied in [10]. The untwisted case, $\psi = 0$, is that of Poisson structures on Lie algebroids; the pair (A, A^*) is then a Lie bialgebroid, which is called *triangular*.

If $A = TM$, then (M, π, ψ) is called a *twisted Poisson manifold*, for which see [11]. The case when $A = TM$ and $\psi = 0$ is that of Poisson manifolds.

When (A, π, ψ) is a Lie algebroid with a twisted Poisson structure, we may compare two cohomology classes of A^* : the modular class $\text{Mod}(A^*)$ and the modular class defined in [7] which we shall denote by $\theta_{KL}(A, \pi, \psi)$, and whose definition we shall recall in the proof of the following theorem.

Theorem 4.1. *The cohomology classes $\text{Mod}(A^*)$ and $\theta_{KL}(A, \pi, \psi)$ are related by*

$$2\theta_{KL}(A, \pi, \psi) = \text{Mod}^{\pi^\sharp}(A^*, A) = \text{Mod}(A^*) - (\pi^\sharp)^*(\text{Mod } A). \tag{11}$$

Proof. Let λ be a nowhere-vanishing section of $\wedge^{\text{top}} A^*$. By Theorem 3.3, a representative $W \in \Gamma A$ of the relative modular class $\text{Mod}^{\pi^\sharp}(A^*, A)$ satisfies, for all $\alpha \in \Gamma A^*$,

$$\langle \alpha, W \rangle \lambda \otimes \lambda = [\alpha, \lambda]_{\pi, \psi} \otimes \lambda + \lambda \otimes \mathcal{L}_{\pi^\sharp \alpha}^A \lambda. \tag{12}$$

Adopting the notations of [7], we set $\partial_\pi = [d_A, i_\pi]$ and $Y_{\pi, \psi} = \pi^\sharp i_\pi \psi$, and we consider the generator $\partial = \partial_\pi + \underline{\partial}_{\pi, \psi} + i_{Y_{\pi, \psi}}$ of $[\ , \]_{\pi, \psi}$, which is of square 0. (Here $\underline{\partial}_{\pi, \psi}$ is an operator on forms, which vanishes on functions and 1-forms.) Since λ is of top degree, ∂ satisfies the relation $[\alpha, \lambda]_{\pi, \psi} = (\partial\alpha)\lambda - \alpha \wedge \partial\lambda$ for all $\alpha \in \Gamma(A^*)$.

The class $\theta_{KL}(A, \pi, \psi)$ is represented by the modular section $Z_{\pi, \psi, \lambda} = X_{\pi, \lambda} + Y_{\pi, \psi}$, where $X_{\pi, \lambda}$ satisfies $\mathcal{L}_{\pi^\sharp \alpha}^A \lambda = \langle \alpha, X_{\pi, \lambda} \rangle \lambda - (\partial_\pi \alpha)\lambda$, and $Z_{\pi, \psi, \lambda}$ satisfies $\partial\lambda = -i_{Z_{\pi, \psi, \lambda}} \lambda$ (see (6.8) in [7]). Therefore $\langle \alpha, W \rangle \lambda \otimes \lambda = (\partial\alpha)\lambda \otimes \lambda + (\alpha \wedge i_{Z_{\pi, \psi, \lambda}} \lambda) \otimes \lambda + \langle \alpha, X_{\pi, \lambda} \rangle \lambda \otimes \lambda - (\partial_\pi \alpha)\lambda \otimes \lambda$. Since $\partial\alpha - \partial_\pi \alpha = \langle \alpha, Y_{\pi, \psi} \rangle$, we obtain

$$\langle \alpha, W \rangle \lambda \otimes \lambda = \langle \alpha, Y_{\pi, \psi} \rangle \lambda \otimes \lambda + \langle \alpha, Z_{\pi, \psi, \lambda} \rangle \lambda \otimes \lambda + \langle \alpha, X_{\pi, \lambda} \rangle \lambda \otimes \lambda,$$

whence $W = 2Z_{\pi, \psi, \lambda}$. \square

It was proved in [7] that $\theta_{KL}(A, \pi, \psi)$ is the characteristic class of the Lie algebroid A^* with representation D^∂ in $\wedge^{\text{top}}(A^*)$, where $D_\alpha^\partial \lambda = -\alpha \wedge \partial\lambda$. It is easy to show that $D^{\pi^\sharp}(\lambda \otimes \lambda) = D^\partial \lambda \otimes \lambda + \lambda \otimes D^\partial \lambda$, i.e., D^{π^\sharp} is the ‘square’ of D^∂ . This remark leads to an alternate proof of Theorem 4.1.

Define the *modular class of a twisted Poisson manifold* (M, π, ψ) to be $\theta_{KL}(TM, \pi, \psi)$. Applying Theorem 4.1 to $A = TM$ we recover the following result of [7].

Corollary 4.2. *Let (M, π, ψ) be a twisted Poisson manifold. Then $2\theta_{KL}(TM, \pi, \psi) = \text{Mod}(T^*M)$.*

When both $A = TM$ and $\psi = 0$, the class $\theta_{KL}(TM, \pi, \psi)$ reduces to the modular class of the Poisson manifold (M, π) . Thus, this corollary generalizes to the twisted case the property of the modular class of a Poisson manifold that we recalled in Section 2.

5. The case of Lie algebras

If \mathfrak{a} and \mathfrak{b} are Lie algebras, they can be considered as Lie algebroids with base a point. Thus, if $\varphi: \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$ is a homomorphism of Lie algebras, $\text{Mod}^\varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ is a class in the Lie algebroid cohomology of \mathfrak{a} of degree 1, i.e., a 1-cocycle in \mathfrak{a}^* .

When \mathfrak{h} is a Lie subalgebra of \mathfrak{g} and φ is the canonical injection ι , then $\text{Mod}^\iota(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) = \chi^\mathfrak{h} - \iota^*(\chi^\mathfrak{g})$. When H is a connected closed Lie subgroup with Lie algebra \mathfrak{h} of a connected Lie group G with Lie algebra \mathfrak{g} , the vanishing of the relative modular class $\text{Mod}^\iota(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ is necessary and sufficient for the existence of a G -invariant measure on the homogeneous space G/H . This follows from the fact, proved in [12], that there exists a G -invariant measure on G/H if and only if $\Delta^H - \iota^* \Delta^G = 0$, where Δ^G (resp., Δ^H) is the modular function of G (resp., H), and the relation $\text{Det}(\text{Ad}_{\exp tX}^G) = \exp(t\chi^\mathfrak{g}(x))$.

References

- [1] J.-P. Dufour, A. Haraki, Rotationnels et structures de Poisson quadratiques, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 312 (1991) 137–140.
- [2] S. Evens, J.-H. Lu, A. Weinstein, Transverse measures, the modular class and a cohomology pairing for Lie algebroids, Quart. J. Math. Ser. 2 50 (1999) 417–436.
- [3] J. Grabowski, G. Marmo, A.M. Perelomov, Poisson structures: towards a classification, Modern Phys. Lett. A 8 (1993) 1719–1733.
- [4] J. Grabowski, G. Marmo, P.W. Michor, Homology and modular classes of Lie algebroids, math.DG/0310072.
- [5] J. Huebschmann, Duality for Lie–Rinehart algebras and the modular class, J. Reine Angew. Math. 510 (1999) 103–159.
- [6] Y. Kosmann-Schwarzbach, Modular vector fields and Batalin–Vilkovisky algebras, in: J. Grabowski, P. Urbanski (Eds.), Poisson Geometry, in: Banach Center Publ., vol. 51, 2000, pp. 109–129.
- [7] Y. Kosmann-Schwarzbach, C. Laurent-Gengoux, The modular class of a twisted Poisson structure, math.QA/0505663.

- [8] J.-L. Koszul, Crochet de Schouten–Nijenhuis et cohomologie, in : *Élie Cartan et les mathématiques d’aujourd’hui*, in : *Astérisque hors série*, Soc. Math. France, 1985, pp. 257–271.
- [9] Z.-J. Liu, P. Xu, On quadratic Poisson structures, *Lett. Math. Phys.* 26 (1992) 33–42.
- [10] D. Roytenberg, Quasi-Lie bialgebroids and twisted Poisson manifolds, *Lett. Math. Phys.* 61 (2002) 123–137.
- [11] P. Ševera, A. Weinstein, Poisson geometry with a 3-form background, *Progr. Theoret. Phys. Suppl.* 144 (2001) 145–154.
- [12] A. Weil, *L’intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann, Paris, 1940; deuxième édition, 1965.
- [13] A. Weinstein, The modular automorphism group of a Poisson manifold, *J. Geom. Phys.* 23 (1997) 379–394.
- [14] P. Xu, Gerstenhaber algebras and BV-algebras in Poisson geometry, *Comm. Math. Phys.* 200 (1999) 545–560.