Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 549–554
COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse complexe

# Courants positifs à supports dans une bande

Fredj Elkhadhra, Souad K. Mimouni

*Faculté des sciences de monastir, 5019 Monastir, Tunisie*

Reçu le 1er juin 2005 ; accepté le 1er septembre 2005

Disponible sur Internet le 11 octobre 2005

Présenté par Jean-Pierre Demailly

**Résumé**

Soit $T$ un courant positif de bidimension $(p,p)$ sur $\mathbb{C}^n$ à support dans une bande. Si $T$ est fermé, S. Giret a démontré que $T$ se relève bien par un éclatement de centre lisse. La classe de courants positifs fermés de bidimension $(1,1)$ sur le bidisque unité $\Delta^2$ et à support dans une bande joue un rôle important dans l'étude de la dynamique de certaines applications holomorphes. Dans cette note, on étudie la croissance de la mesure trace de $T$ dans le cas où $dd^cT \leqslant 0$, on montre en particulier que si $T$ est fermé alors il est algébrique. On montre ensuite deux théorèmes de support ; le premier lorsqu'on suppose de plus que $T$ est de *degé* finie et le deuxième dans le cas où $T$ est positif fermé à support tubulaire. Le dernier résultat généralise le cas $p = n - 1$ démontré par M. Blel, S.K. Mimouni et G. Raby et le cas où $T$ est un courant d'intégration sur une hypersurface démontré par M.T. Togni. ***Pour citer cet article : F. Elkhadhra, S.K. Mimouni, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***


**Abstract**

**Positive currents with support in a strip.** Let $T$ be a positive current of bidimension $(p,p)$ on $\mathbb{C}^n$ with support in a strip. If $T$ is closed, S. Giret has proved that $T$ admits a well defined lifting through a blow up with smooth center. The class of positive closed currents with bidimension $(1,1)$ in the unit bidisc $\Delta^2$ and with support in a strip, plays a central role in the study of the dynamics of some holomorphic maps. In this note, we prove some estimates of the trace measure of $T$ when $dd^cT \leqslant 0$, we prove in particular that if $T$ is closed, then it is algebraic. We then prove two support theorems; the first one in the case where the degree of $T$ is finite and the second in the case where $T$ is positive closed and with tubular support. The latter result generalizes the case $p = n - 1$ proved by M. Blel, S.K. Mimouni and G. Raby, which is also a generalization of the case when $T$ is the current of integration on an hypersurface as proved by M.T. Togni. ***To cite this article: F. Elkhadhra, S.K. Mimouni, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***


## Abridged English version

Let $T$ be a positive current of bidimension $(p,p)$ on $\mathbb{C}^n$ and $\nu_T(r) = \frac{1}{r^{2p}} \int_{\{|z|<r\}} T \wedge (dd^c|z|^2)^p$ for $r > 0$. $T$ is said *algebraic* if there exists a positive current $\widetilde{T}$ on $\mathbb{P}^n$ such that $\widetilde{T} = T$ on $\mathbb{C}^n$ and $\widetilde{T} = 0$ on the hyperplane at infinity $H_\infty$.

*Adresses e-mail :* fredj.elkhadhra@fsm.rnu.tn (F. Elkhadhra), souad.khemiri@fsm.rnu.tn (S.K. Mimouni).

1631-073X/$ – see front matter 
doi:10.1016/j.crma.2005.09.003

It was proved in [1] that if $T$ is closed and there exists $c>0$ such that $\nu_T(r)\leqslant c$ for every $r>0$ then $T$ is algebraic. We prove here the following result:

**Theorem 0.1.** *Let $T$ be a positive current, $dd^cT\leqslant 0$ of bidimension $(p,p)$ on $\mathbb{C}^n$ such that* $\operatorname{Supp}T\subset\{z=(z',z'')\in\mathbb{C}^k\times\mathbb{C}^{n-k},\ \|z''\|\leqslant 1\},\ p\geqslant k$. *Then, there exists $c>0$ such that for every $r>0$ we have $\nu_T(r)\leqslant c$. In particular, if $T$ is positive and closed then $T$ is algebraic.*

As a consequence of Theorem 0.1, we have:

**Corollary 0.2.** *Let $T$ be a positive (or negative) psh current of bidimension $(p,p)$ on $\mathbb{C}^n$. If there exists $c>0$ such that $\nu_T(r)\leqslant c$ for every $r>0$, then $dd^cT$ is an algebraic current.*

Let $T$ be a positive current of bidimension $(p,p)$ on $\mathbb{C}^n$. We define the *degree* of $T$ by $\delta(T):=\int_{\mathbb{C}^n}T\wedge(dd^c\log(1+|z|^2))^p$. If $T$ is a positive closed algebraic current then $\delta(T)<+\infty$. We give hereafter a result based on an assumption on the degree of $T$:

**Theorem 0.3.** *Let $T$ be a positive current $dd^cT\leqslant 0$ of bidimension $(p,p)$ on $\mathbb{C}^n$ such that* $\operatorname{Supp}T\subset\{z=(z',z'')\in\mathbb{C}^k\times\mathbb{C}^{n-k},\ \|z''\|\leqslant 1\},\ p\geqslant k$. *Then, for every $k+1\leqslant j\leqslant n$ we have $\delta(T\wedge dz_j\wedge d\bar z_j)<+\infty$. Moreover, if $\delta(T)<+\infty$ then $T\wedge dz_j\wedge d\bar z_j=0$.*

Thanks to Choquet's theorem and to the support theorem for positive $\mathbb{C}$-flat currents, we have the following generalization of a result of [1,4].

**Proposition 0.4.** *Let $T$ be a positive psh (resp. $dd^cT\leqslant 0$) current of bidimension $(p,p)$ on an open subset $U$ of $\mathbb{C}^n$ such that $T\wedge dz_j\wedge d\bar z_j=0$ for every $p+1\leqslant j\leqslant n$. Let $\pi:z\mapsto z''=(z_{p+1},\dots,z_n)$ the canonical projection on $\mathbb{C}^{n-p}$. Suppose that the fibers $\pi^{-1}(t)$ are connected. Then, there exists $\mu_U$ a positive Radan mesure on $\pi(U)$ and $v_t$ a positive psh function (resp. $-v_t$ psh) on $[z''=t]$ such that $T=\int_{\pi(U)}v_t[z''=t]\,d\mu_U(t)$.*

By Proposition 0.4, if $T$ is a closed positive current with a *tubular* support we prove:

**Theorem 0.5.** *Let $T$ be a closed positive current of bidimension $(p,p)$ on $\mathbb{C}^n$. Let $P=(P_1,\dots,P_{n-p})$ be a polynômial application on $\mathbb{C}^n$ such that* $\dim P^{-1}(t)=p$ *for every $t\in\mathbb{C}^{n-p}$. Suppose that* $\operatorname{Supp}T\subset\{\|P\|\leqslant C^{te}\}$, *then $T$ is algebraic. Moreover, we denote by $V$ (resp. $V_i$) the space of irreducible components of all different fibers $P^{-1}(t)$ in $\mathbb{C}^n,\ t\in\mathbb{C}^k\setminus P(X)$ (resp. de $P^{-1}(t)$, $t\in P(X)$) where $X$ is the set of critical points of $P$. Then there is a unique positive measure $\mu$ on $\overline{V}=V\amalg(\coprod_i V_i)$, such that $T=\int_{v\in\overline{V}}[P^{-1}(t)]_v\,d\mu(v)$.*

This theorem covers a result of [5] when $T$ is the current of integration on an hypersurface, and another of [1,4] when $p=n-1$.

## 1. Introduction

Dans cette Note nous étudions les propriétés algébriques des courants positifs à support dans une bande. Soit $T$ un courant positif de bidimension $(p,p)$ sur $\mathbb{C}^n$. Le courant $T$ est dit *algébrique* s'il existe un courant positif $\widetilde{T}$ sur $\mathbb{P}^n$ tel que $\widetilde{T}=T$ sur $\mathbb{C}^n$ et $\widetilde{T}=0$ sur l'hyperplan à l'infini $H_\infty$. D'après [1], si $T$ est positif fermé et $\nu_T(r):=\frac{1}{r^{2p}}\int_{\{|z|<r\}}T\wedge\beta^p\leqslant c$ pour tout $r>0$, avec $\beta=dd^c|z|^2$ la forme de Kähler sur $\mathbb{C}^n$, alors $T$ est algébrique.

**Théorème 1.1.** *Soit $T$ un courant positif, $dd^cT\leqslant 0$ de bidimension $(p,p)$ sur $\mathbb{C}^n$ tel que* $\operatorname{Supp}T\subset\{z=(z',z'')\in\mathbb{C}^k\times\mathbb{C}^{n-k},\ \|z''\|\leqslant 1\},\ p\geqslant k$. *Alors, il existe $c>0$ telle que pour tout $r>0$ on a $\nu_T(r)\leqslant c$. En particulier, si $T$ est positif fermé alors $T$ est un courant algébrique.*

**Démonstration.** Sans perte de généralité, on peut supposer que $T$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Si $p>k$, alors $T=0$. En effet le courant $T$ est $\mathbb{C}$-plat donc la tranche $\langle T,\pi,z'\rangle$ ($\pi$ c'est la projection sur $\mathbb{C}^k$) existe p.p $z'\in\mathbb{C}^k$ et c'est un courant positif de $dd^c$-négatif de dimension $p-k \geqslant 1$ et à support compact, donc d'aprés [3] $\langle T, \pi, z'\rangle = 0$ p.p $z'$. Par la formule de tranchage pour les courants $\mathbb{C}$-plats (voir [3]) on a $T=0$. Supposons maintenant que $p=k$. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\chi(t)=1$ si $|t| \leqslant 1$ et $\chi=0$ si $|t|>2$. Soit $\beta' = dd^c|z'|^2$, pour $a=(a_1,\dots,a_p)\in\mathbb{C}^p$, on pose $g(a)=\int_{\mathbb{C}^n} T\wedge\chi(|z'+a|^2)\beta'^p$.

$$\begin{aligned}
2\mathrm{i}\frac{\partial^2 g}{\partial a_1\bar\partial a_1} &= \int_{\mathbb{C}^n} T\wedge \frac{2\mathrm{i}\partial^2}{\partial a_1\bar\partial a_1}\chi\big(|z'+a|^2\big)\beta'^p = \int_{\mathbb{C}^n} T\wedge \frac{2\mathrm{i}\partial^2}{\partial z_1\bar\partial z_1}\chi\big(|z'+a|^2\big)\beta'^p\\
&= \int_{\mathbb{C}^n} T\wedge dd^c\big(\chi(|z'+a|^2)\frac{\mathrm{i}}{2}dz_2\wedge d\bar z_2\wedge\cdots\wedge\frac{\mathrm{i}}{2}dz_p\wedge d\bar z_p\big)\\
&= \int_{\mathbb{C}^n} dd^cT\wedge\chi\big(|z'+a|^2\big)\beta'^p \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Il en résulte que $a_1 \to -g(a_1,\cdot)$ est négative et sousharmonique sur $\mathbb{C}$, donc elle est constante par rapport à $a_1$ et vaut $g(0,\cdot)$. Par itération on a $g(a)=g(0)=\int_{\mathbb{C}^n} T\wedge\chi(|z'|^2)\beta'^p$, et donc $\int_{|z'|\leqslant 1, z''} T\wedge\beta'^p \leqslant C$. Soit $j\in\{p+1,\dots,n\}$, on pose $I_j=\int_{\mathbb{C}^n} T\wedge\chi^2(|z'|^2)\,dd^c|z_j|^2\wedge\beta'^{p-1}$, alors

$$\begin{aligned}
I_j &= \int_{\mathbb{C}^n} T\wedge dd^c\big(|z_j|^2\chi^2\big(|z'|^2\big)\beta'^p\big) - \int_{\mathbb{C}^n} |z_j|^2 T\wedge dd^c\big(\chi^2\big(|z'|^2\big)\big)\wedge\beta'^{p-1}\\
&\quad - \int_{\mathbb{C}^n} T\wedge d\chi^2\big(|z'|^2\big)\wedge d^c|z_j|^2\wedge\beta'^{p-1} - \int_{\mathbb{C}^n} T\wedge d|z_j|^2\wedge d^c\chi^2\big(|z'|^2\big)\wedge\beta'^{p-1}\\
&= (1)+(2)+(3)+\overline{(3)}.
\end{aligned}$$

Comme $(1)=\int_{\mathbb{C}^n} T\wedge dd^c(|z_j|^2\chi^2(|z'|^2)\beta'^p)=\int_{\mathbb{C}^n} dd^cT\wedge|z_j|^2\chi^2(|z'|^2)\beta'^p\leqslant 0$, alors on a l'inégalité

$$\int_{\mathbb{C}^n} T\wedge\chi^2\big(|z'|^2\big)\,dd^c|z_j|^2\wedge\beta'^{p-1} \leqslant (2)+(3)+\overline{(3)}. \tag{1}$$

Le terme (2) est égal à

$$\begin{aligned}
&-2\int_{\mathbb{C}^n} |z_j|^2 T\wedge\chi^2\big(|z'|^2\big)\,dd^c\chi\big(|z'|^2\big)\wedge\beta'^{p-1} - 2\int_{\mathbb{C}^n} |z_j|^2 T\wedge d\chi\big(|z'|^2\big)\wedge d^c\chi\big(|z'|^2\big)\wedge\beta'^{p-1}\\
&\quad\leqslant -2\int_{\mathbb{C}^n} |z_j|^2 T\wedge\chi\big(|z'|^2\big)\,dd^c\chi\big(|z'|^2\big)\wedge\beta'^{p-1} \leqslant C\int_{1\leqslant|z'|\leqslant 2} T\wedge\beta'^p \leqslant C_1.
\end{aligned}$$

La constante $C$ résulte du fait que $|\chi'|$ et $|\chi''|$ sont bornées.

Soit $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, $0\leqslant\varphi\leqslant 1$ et $\varphi=1$ sur supp $\chi$. D'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz, le terme $|(3)| = |\int_{\mathbb{C}^n} T\wedge 2\chi(|z'|^2)\varphi(|z'|^2)\,d\chi(|z'|^2)\wedge d^c|z_j|^2\wedge\beta'^{p-1}|$ est majoré par :

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{C}^n} T\wedge 2\varphi^2\big(|z'|^2\big)\,d\chi\big(|z'|^2\big)\wedge d^c\chi\big(|z'|^2\big)\wedge\beta'^{p-1} + \varepsilon\int_{\mathbb{C}^n} T\wedge 2\chi^2\big(|z'|^2\big)\,d|z_j|^2\wedge d^c|z_j|^2\wedge\beta'^{p-1}$$

donc $|(3)| \leqslant \frac{C_2}{\varepsilon}\int_{1\leqslant|z'|\leqslant 2} T\wedge\beta'^p + 4\varepsilon\int_{\mathbb{C}^n} T\wedge\chi(|z'|^2)\,dz_j\wedge d\bar z_j\wedge\beta'^{p-1}$ pour $\varepsilon = 1/8$ et d'après (1), on a

$$\int_{\mathbb{C}^n} T\wedge\chi^2\big(|z'|^2\big)\,dd^c|z_j|^2\wedge\beta'^{p-1} \leqslant C_1 + 8C_2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{C}^n} T\wedge\chi^2\big(|z'|^2\big)\,dz_j\wedge d\bar z_j\wedge\beta'^{p-1} \leqslant C_3$$

donc

$$\int_{\mathbb{C}^n} T\wedge\chi^2\big(|z'|^2\big)\,dd^c|z''|^2\wedge\beta'^{p-1} \leqslant (n-p)C_3. \tag{2}$$

Pour montrer que $\int_{\mathbb{C}^n} T \wedge \chi^2(|z'|^2)(dd^c|z''|^2)^2 \wedge \beta'^{p-2} \leqslant C^{te}$, on utilise (2) et on récrit la preuve avec $dd^c|z''|^2 \wedge \beta'^{p-2}$ à la place de $\beta'^{p-1}$. Donc par récurrence on a $\int_{\mathbb{C}^n} T \wedge \chi^2(|z'|^2)(dd^c|z''|^2)^s \wedge \beta'^{p-s} \leqslant C^{te}$ pour tout $1 \leqslant s \leqslant p$. Il en résulte que $\int_{|z'|\leqslant 1,\ |z''|\leqslant 1} T \wedge \beta^p \leqslant \int_{\mathbb{C}^n} T \wedge \chi^2(|z'|^2)\beta^p \leqslant C^{te}$. Soit $R > 0$, on peut recouvrir $B(0,r) = \{z, |z'| < r\}$ par moins de $([r]+1)^{2p}$ cubes unité. Donc $\int_{B(0,r)} T \wedge \beta^p \leqslant C^{te}([r]+1)^{2p}$. En particulier si $T$ est positif fermé alors d'après [1] $T$ est algébrique. $\square$

**Remarque 1.** Si $T$ est un courant positif psh alors le Théorème 1.1 tombe en défaut. Ceci résulte du contre-exemple suivant :

Soient $D(0,1)$ le disque unité dans $\mathbb{C}$ et $h$ une fonction sousharmonique positive sur $\mathbb{C}$. Soient $f, g \in \mathcal{D}(D(0,1)) \geqslant 0$ de sorte que $g(z_2)dd^c|z_2|^2 \geqslant -dd^c f(z_2)$. Considérons le courant $T = f(z_2)\, dd^c|z_1|^2 + g(z_2)(h(z_1) + |z_1|^2) \times dd^c|z_2|^2$. Alors, $T$ est un courant positif, psh de bidegré $(1,1)$ et à support dans $\{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2,\ |z_2| < 1\}$ mais $\nu_T(r)$ n'est pas majoré indépendamment de $r$.

## 2. Conséquence du Théorème 1.1

Comme conséquence du Théorème 1.1, on montre le résultat suivant :

**Corollaire 2.1.** *Soit $T$ un courant positif (ou négatif) psh de bidimension $(p,p)$ sur $\mathbb{C}^n$. Supposons qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $r > 0$ on a $\nu_T(r) \leqslant c$, alors $dd^cT$ est un courant algébrique.*

Soit $\psi = \log(1+|z|^2)$ et $\alpha = dd^c\psi$. Soit $T$ un courant positif de bidimension $(p,p)$ sur $\mathbb{C}^n$. On note $\delta(T) = \int_{\mathbb{C}^n} T \wedge \alpha^p$ le *degré* de $T$. Si $T$ est fermé et $\varphi$ une fonction psh, Demailly [2] a introduit le *degré généralisé* $\delta(T,\varphi) = \int_{\mathbb{C}^n} T \wedge \varphi^p$. Si $T = [A]$ est le courant d'intégration sur un ensemble algébrique alors $\delta(T) < +\infty$. Ce résultat reste vrai pour le cas où $T$ un courant positif fermé algébrique. Dans ce qui suit on se propose d'étudier quelques propriétés de $\delta(T)$ si $T$ est psh ou $dd^cT \leqslant 0$. Soit $B(r_1,r_2) = \{z,\ r_1 < 1+|z|^2 < r_2\}$.

**Lemme 2.2.** *Soit $T$ un courant positif de bidimension $(p,p)$ sur $\mathbb{C}^n$. On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $r > 0$ on a $\nu_T(r) \leqslant c$, on a :*

(i) *Si $T$ est psh, alors $\delta(T) < +\infty$ et les courant $T$ et $dd^cT$ sont algébriques i.e. les extensions triviaux $\widetilde{T}$ et $\widetilde{dd^cT}$ existent sur $\mathbb{P}^n$. Il existe alors un courant $S$ positif porté par l'hyperplan à l'infini $H_\infty$ tel que $S = dd^c\widetilde{T} - \widetilde{dd^cT}$.*

(ii) *Si $dd^cT \leqslant 0$, alors il existe $c_1, c_2 > 0$ telle que*

$$\int_{B(r_1,r_2)} T \wedge \alpha^p \leqslant c_1 + c_2\left(\left(1-\frac{1}{r_2}\right)^p - \left(1-\frac{1}{r_1}\right)^p\right) + c_1 \log\frac{r_2}{r_1}.$$

Soit $T$ un courant positif $dd^c$-négatif et à support dans une bande, alors par le théorème suivant on construit des courants de même nature que $T$, qui de plus sont de degré fini.

**Théorème 2.3.** *Soit $T$ un courant positif $dd^cT \leqslant 0$ de bidimension $(p,p)$ sur $\mathbb{C}^n$ tel que* $\operatorname{Supp} T \subset \{z = (z',z'') \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k},\ \|z''\| \leqslant 1\}$, *$p \geqslant k$. Alors, pour tout $k+1 \leqslant j \leqslant n$ on a $\delta(T \wedge dz_j \wedge d\bar{z}_j) < +\infty$. Si de plus $\delta(T) < +\infty$, alors $T \wedge dz_j \wedge d\bar{z}_j = 0$.*

**Démonstration.** On peut supposer que $p = k$. On commence par le cas où $\delta(T) < +\infty$. On considère $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\chi = 1$ sur $]-\infty, 1{,}1]$, $\chi = 0$ sur $[1{,}9, +\infty[$ et $0 \leqslant -\chi' \leqslant 2$. Alors si on considère la suite $(\psi_\nu)_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, définie par $\psi_\nu(z) = \chi(2^{-\nu-1}\psi(z))$. Soit $K_\nu = \{z \in \mathbb{C}^n;\ \psi(z) \leqslant 2^{\nu+1}\}$, alors $\mathbb{C}^n = \bigcup K_\nu$ et $K_\nu$ contenu dans l'intérieur de $K_{\nu+1}$ pour tout $\nu$. Comme $2^{-\nu-1}\psi(z) \leqslant 1$ sur $K_\nu$ et $\geqslant 2$ sur $\mathbb{C}^n \setminus K_{\nu+1}$, on a $0 \leqslant \psi_\nu \leqslant 1$, $\psi_\nu = 1$ sur un voisinage de $K_\nu$, $\operatorname{Supp}\psi_\nu \subset K_{\nu+1}^\circ$. De plus

$$-dd^c\psi_\nu = -\frac{\chi''(2^{-\nu-1}\psi(z))}{2^{2(\nu+1)}}\, d\psi \wedge d^c\psi - \frac{\chi'(2^{-\nu-1}\psi(z))}{2^{\nu+1}}\, dd^c\psi \leqslant C\left(\frac{1}{2^{2(\nu+1)}}\, d\psi \wedge d^c\psi + \frac{1}{2^\nu}\, dd^c\psi\right).$$

Alors, on a

$$\int_{\mathbb{C}^n} dd^c \log\bigl(1+|z_j|^2\bigr) \wedge T \wedge \alpha^{p-1} = \lim_{\nu\to\infty} \int_{\mathbb{C}^n} \psi_\nu \, dd^c \log\bigl(1+|z_j|^2\bigr) \wedge T \wedge \alpha^{p-1}. \tag{3}$$

La formule de Stokes et le fait que $\psi_\nu \log(1+|z_j|^2)$ est à support compact entraîne que le terme négatif $\int_{\mathbb{C}^n} \psi_\nu \log(1+|z_j|^2) \wedge dd^c T \wedge \alpha^{p-1} = \int_{\mathbb{C}^n} dd^c(\psi_\nu \log(1+|z_j|^2)) \wedge \alpha^{p-1}$ est égal à

$$\int_{K_{\nu+1}} \psi_\nu \, dd^c \log\bigl(1+|z_j|^2\bigr) \wedge T \wedge \alpha^{p-1} + \int_{K_{\nu+1}\setminus K_\nu} \log\bigl(1+|z_j|^2\bigr) \, dd^c \psi_\nu \wedge T \wedge \alpha^{p-1}$$
$$- \int_{K_{\nu+1}\setminus K_\nu} d^c \log\bigl(1+|z_j|^2\bigr) \wedge d\psi_\nu \wedge T \wedge \alpha^{p-1} + \int_{K_{\nu+1}\setminus K_\nu} d \log\bigl(1+|z_j|^2\bigr) \wedge d^c\psi_\nu \wedge T \wedge \alpha^{p-1}.$$

Il en résulte que le terme

$$\int_{K_{\nu+1}} \psi_\nu \, dd^c \log\bigl(1+|z_j|^2\bigr) \wedge T \wedge \alpha^{p-1} \tag{4}$$

est majoré par :

$$\int_{K_{\nu+1}\setminus K_\nu} -\log\bigl(1+|z_j|^2\bigr) \, dd^c \psi_\nu \wedge T \wedge \alpha^{p-1} + \int_{K_{\nu+1}\setminus K_\nu} d^c \log\bigl(1+|z_j|^2\bigr) \wedge d\psi_\nu \wedge T \wedge \alpha^{p-1}$$
$$- \int_{K_{\nu+1}\setminus K_\nu} d \log\bigl(1+|z_j|^2\bigr) \wedge d^c\psi_\nu \wedge T \wedge \alpha^{p-1}.$$

On note ces trois termes respectivement $(a)$, $(b)$ et $(c)$. Comme $\log(1+|z_j|^2)$ est bornée sur $\operatorname{Supp} T$ et d'après la majoration de $-dd^c\psi_\nu$, on a l'inégalité suivante :

$$(a) \leqslant c_1 \Biggl( \frac{1}{2^{2(\nu+1)}} \int_{\{2^{\nu+1} \leqslant \psi \leqslant 2^{\nu+2}\}} d\psi \wedge d^c\psi \wedge T \wedge \alpha^{p-1} + \frac{1}{2^\nu} \int_{\{2^{\nu+1} \leqslant \psi \leqslant 2^{\nu+2}\}} T \wedge \alpha^p \Biggr). \tag{5}$$

On a $\delta(T) < +\infty$, d'où l'inégalité suivant :

$$\int_{\{2^{\nu+1} \leqslant \psi \leqslant 2^{\nu+2}\}} d\psi \wedge d^c\psi \wedge T \wedge \alpha^{p-1} = \int_{2^{\nu+1}}^{2^{\nu+2}} dt \int_{\{\psi = t\}} d^c\psi \wedge T \wedge \alpha^{p-1}$$
$$= \int_{2^{\nu+1}}^{2^{\nu+2}} dt \int_{\{\psi < t\}} T \wedge \alpha^p - \int_{2^{\nu+1}}^{2^{\nu+2}} dt \int_{\{\psi < t\}} d^c\psi \wedge dT \wedge \alpha^{p-1} \leqslant \delta(T) 2^{\nu+1}. \tag{6}$$

L'inégalité résulte du fait que la deuxième intégrale est négative. Il en résulte que $(a) \leqslant \frac{c_2 \delta(T)}{2^{\nu+1}}$. D'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz et (6), on a

$$\bigl|(b)\bigr| \leqslant \varepsilon \int_{K_{\nu+1}\setminus K_\nu} d \log(1+|z_j|^2) \wedge d^c \log(1+|z_j|^2) \wedge T \wedge \alpha^{p-1} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{K_{\nu+1}\setminus K_\nu} d\psi_\nu \wedge d^c\psi_\nu \wedge T \wedge \alpha^{p-1}$$
$$\leqslant 2\varepsilon \int_{K_{\nu+1}\setminus K_\nu} dz_j \wedge d\bar{z}_j \wedge T \wedge \alpha^{p-1} + \frac{1}{2^{2(\nu+1)}\varepsilon} \int_{K_{\nu+1}\setminus K_\nu} \chi'^2\bigl(2^{-\nu-1}\psi(z)\bigr) \, d\psi \wedge d^c\psi \wedge T \wedge \alpha^{p-1}$$
$$\leqslant 2\varepsilon \int_{K_{\nu+1}\setminus K_\nu} dz_j \wedge d\bar{z}_j \wedge T \wedge \alpha^{p-1} + \frac{c_3 \delta(T)}{2^{(\nu+1)}\varepsilon}.$$

Comme $(c)=\overline{(b)}$ et d'après (3), (4) et la majoration de $(a)$, on a

$$\int\limits_{K_{\nu+1}} \psi_\nu\, dd^c \log\bigl(1+|z_j|^2\bigr)\wedge T\wedge\alpha^{p-1} \leqslant 4\varepsilon \int\limits_{K_{\nu+1}\setminus K_\nu} dz_j\wedge d\bar z_j\wedge T\wedge\alpha^{p-1}+\frac{2c_3\delta(T)}{2^{(\nu+1)}\varepsilon}+\frac{c_2\delta(T)}{2^{\nu+1}}.$$

Soit $\varepsilon=1/8$. On a $dd^c\log(1+|z_j|^2)\geqslant\frac{dz_j\wedge d\bar z_j}{4}$ sur $\operatorname{Supp} T$, d'où $\frac14\int_{K_{\nu+1}}(\psi_\nu-\frac12)\,dz_j\wedge d\bar z_j\wedge T\wedge\alpha^{p-1}\leqslant\frac{2c_3\delta(T)}{2^{\nu+1}}+\frac{c_2\delta(T)}{2^{\nu+1}}$. Par passage à la limite, on a $\int_{\mathbb{C}^n} dz_j\wedge d\bar z_j\wedge T\wedge\alpha^{p-1}=0$.

Sans supposer que $\delta(T)<+\infty$, on montre que $\delta(T\wedge dz_j\wedge d\bar z_j)<+\infty$. En effet : on reprend la majoration de $(a)$. D'après Théorème 1 on a $\nu_T(r)\leqslant c$ pour tout $r>0$, alors Lemme 4 implique qu'il existe $c'>0$ tel que $\int_{B(r_1,r_2)} T\wedge\alpha^p\leqslant c'+c'\log\frac{r_2}{r_1}$ on a $\frac{1}{2^\nu}\int_{\{2^{\nu+1}\leqslant\psi\leqslant 2^{\nu+2}\}} T\wedge\alpha^p\leqslant\frac{c'}{2^\nu}+2c'$ et $\int_{\{\psi<t\}} T\wedge\alpha^p=\int_{\{1\leqslant 1+|z|^2<e^t\}} T\wedge\alpha^p\leqslant c'+c't$. Il résulte de (6) que

$$\int\limits_{\{2^{\nu+1}\leqslant\psi\leqslant 2^{\nu+2}\}} d\psi\wedge d^c\psi\wedge T\wedge\alpha^{p-1}\leqslant c_1' 2^{\nu+1}+c_2' 2^{2\nu+2}.$$

D'après (5), on a $(a)\leqslant\frac{c_3'}{2^{\nu+1}}+c_4'$. Le reste de la démonstration est la même, donc par passage à la limite on trouve $\delta(T\wedge dz_j\wedge d\bar z_j)\leqslant c_4'$.

En utilisant le théorème de support pour les courants positifs $\mathbb{C}$-plats et le théorème de Choquet, on a le résultat suivant démontré par [1,4] dans le cas où $T$ est positif fermé et $p=n-1$. □

**Proposition 2.4.** *Soit $T$ un courant positif psh (resp. $dd^cT\leqslant 0$) de bidimension $(p,p)$ sur un ouvert $U$ de $\mathbb{C}^n$ tel que $T\wedge dz_j\wedge d\bar z_j=0$, pour tout $p+1\leqslant j\leqslant n$. Soit $\pi: z\mapsto z''=(z_{p+1},\dots,z_n)$ la projection canonique sur $\mathbb{C}^{n-p}$. On suppose que les fibres $\pi^{-1}(t)$ sont connexes. Alors, il existe $\mu_U$ une mesure de Radon positive sur $\pi(U)$ et $v_t$ une fonction positive psh (resp. $-v_t$ psh) sur $[z''=t]$ tel que $T=\int_{\pi(U)} v_t[z''=t]\,d\mu_U(t)$.*

D'après Théorème 2.3 si $T$ est un courant positif, $dd^c$-négatif, à support dans une bande de $\mathbb{C}^n$ et de degré fini alors on a la conclusion de la Proposition 2.4.

Dans le cas d'un courant $T$ positif fermé de bidimension $(p,p)$ à support *tubulaire*, en utilisant Proposition 2.4 on montre

**Théorème 2.5.** *Soit $T$ un courant positif fermé de bidimension $(p,p)$ sur $\mathbb{C}^n$. Soit $P=(P_1,\dots,P_{n-p})$ une application polynômiale sur $\mathbb{C}^n$ tels que $\dim P^{-1}(t)=p$ pour tout $t\in\mathbb{C}^{n-p}$. Si $\operatorname{Supp} T\subset\{\|P\|\leqslant C^{te}\}$, alors $T$ est algébrique. De plus si on note par $V$ (resp. $V'$) l'espace des composantes connexes des différentes fibres $P^{-1}(t)$ dans $\mathbb{C}^n$, $t\in\mathbb{C}^k\setminus P(X)$, (resp. de $P^{-1}(t)$, $t\in P(X)$) où $X$ est l'ensemble des valeurs critiques de $P$. Alors, il existe une unique mesure positive $\mu$ sur $\overline{V}=V\amalg V'$, telle que $T=\int_{v\in\overline{V}}[P^{-1}(t)]_v\,d\mu(v)$.*

Si $T=[X]$ où $X$ est une hypersurface alors [5] montre que $T$ est algébrique. Le Théorème 2.5 généralise un résultat de [1,4] dans le cas où $p=n-1$.

## Remerciements

Nous remercions H. El Mir pour d'utiles conversations qui ont contribué à dégager les idées de ce travail.

## Références

[1] M. Blel, S.K. Mimouni, G. Raby, Courants algébriques et courants de Liouville, Prépublication de l'Université de Poitiers, 2000.
[2] J.-P. Demailly, Potential theory in several complex variables, Cours CIMPA, Nice, juillet 1989.
[3] K. Dabbek, F. Elkhadhra, H. El Mir, On the extension of PSH currents, Math. Z. 245 (2003) 455–481.
[4] S.K. Mimouni, Théorème de type Liouville pour les courants positifs fermés, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I (2000) 611–616.
[5] M.T. Togni, Sur les espaces de Liouvilles, Thèse d'Université de Bordeaux I, 1996, pp. 361–376.