Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 29–34
COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie différentielle

Quasi-morphisme de Calabi sur les surfaces de genre supérieur

Pierre Py

Unité de mathématiques pures et appliquées, École normale supérieure de Lyon, UMR 5669 CNRS, 46, allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, France

Reçu le 24 mai 2005 ; accepté le 28 mai 2005

Présenté par Étienne Ghys

Résumé

Nous construisons un quasi-morphisme homogène $\mathfrak{Cal}_S$ sur le groupe des difféomorphismes hamiltoniens d'une surface (fermée, connexe, orientée) de genre supérieur ou égal à 2, ayant la propriété suivante. Si U est un ouvert connexe de S difféomorphe à un disque ou à un anneau, la restriction de $\mathfrak{Cal}_S$ au sous-groupe formé des difféomorphismes qui sont le temps 1 d'une isotopie hamiltonienne dans U, est égale au morphisme de Calabi. ***Pour citer cet article : P. Py, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abstract

Calabi quasi-morphism on higher genus surfaces. We construct a homogeneous quasi-morphism $\mathfrak{Cal}_S$ on the group of Hamiltonian diffeomorphisms of a (closed, connected, oriented) surface S of genus greater or equal to 2, with the following property. For each connected open set U in S diffeomorphic to a disk or to an annulus, the restriction of $\mathfrak{Cal}_S$ to the subgroup of diffeomorphisms which are the time 1 map of a Hamiltonian isotopy in U, equals Calabi's homomorphism. ***To cite this article: P. Py, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abridged English version

A *quasi-morphism* on a group Γ is a function $\phi : \Gamma \to \mathbb{R}$, such that the quantity

$$\sup_{x,y\in\Gamma} \left|\phi(xy) - \phi(x) - \phi(y)\right|$$

is finite. The quasi-morphism ϕ is *homogeneous*, if it satisfies moreover $\phi(x^n) = n\phi(x)$ for $x \in \Gamma$ and $n \in \mathbb{Z}$ (see [3] for an introduction to this subject).

Adresse e-mail : Pierre.Py@umpa.ens-lyon.fr (P. Py).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.06.002

Given a closed connected symplectic manifold (V,ω), the group $\mathrm{Ham}(V,\omega)$ of Hamiltonian diffeomorphisms of V is a simple group, according to a theorem of Banyaga [2]. Hence there is no non-trivial homomorphism from $\mathrm{Ham}(V,\omega)$ to $\mathbb{R}$. If (V,ω) is a connected open symplectic manifold, and if ω is exact on V, Calabi defined in [5] a homomorphism

$$\mathfrak{Cal}_V : \mathrm{Ham}(V,\omega) \to \mathbb{R},$$

the kernel of which is a simple group, according to another theorem of Banyaga [2]. If λ is a primitive of ω and is (f_t) is a Hamiltonian isotopy generated by the vector field Z_t, one has:

$$\mathfrak{Cal}_V(f_1) = \int_V \int_0^1 \lambda(Z_t)\,\mathrm{d}t\,\omega.$$

Suppose now that V is closed. To each connected open set $U \subset V$, one can associate the subgroup Γ_U of $\mathrm{Ham}(V,\omega)$ consisting of all the diffeomorphisms which are the time 1 map of a Hamiltonian isotopy in U. If ω is exact on U, we have Calabi's homomorphism $\mathfrak{Cal}_U : \Gamma_U \to \mathbb{R}$. We shall denote by $\mathcal{D}$ the family of connected open sets U such that ω is exact on U, and there exists $f \in \mathrm{Ham}(V,\omega)$ with $f(U) \cap \overline{U} = \emptyset$. In [7], Entov and Polterovich raise the following problem:

Can we construct a homogeneous quasi-morphism $\phi : \mathrm{Ham}(V,\omega) \to \mathbb{R}$, whose restrictions to the subgroups $(\Gamma_U)_{U\in\mathcal{D}}$ equal Calabi's homomorphisms $(\mathfrak{Cal}_U)_{U\in\mathcal{D}}$?

More generally, can we construct such a quasi-morphism on the universal cover $\widetilde{\mathrm{Ham}}(V,\omega)$ of the group of Hamiltonian diffeomorphisms? They give a positive answer to this question for a certain class of symplectic manifolds, including complex projective spaces, in particular the 2-sphere, and using hard tools from symplectic topology. Using methods in the spirit of the constructions in [8], we prove:

Theorem 0.1. *If (S,ω) is a closed oriented surface of genus g greater or equal to 2, endowed with a symplectic form, there exists a homogeneous quasi-morphism $\mathfrak{Cal}_S : \mathrm{Ham}(S,\omega) \to \mathbb{R}$, whose restriction to the subgroup Γ_U equals Calabi's homomorphism, as soon as U is diffeomorphic to a disk or to an annulus. The quasi-morphism $\mathfrak{Cal}_S$ is invariant under conjugacy by symplectic diffeomorphisms.*

Note that many quasi-morphisms on the group $\mathrm{Ham}(S,\omega)$ (for every closed oriented surface) were constructed in [8], but their restrictions to the subgroups Γ_U are not homomorphisms. The nature of our quasi-morphism is certainly quite different from that of Entov and Polterovich, constructed in [7] (see also [4]). Indeed, the condition we require about the open set U is different from the two conditions defining the family $\mathcal{D}$. In dimension 2, the symplectic form is always exact on an open set different from S, but some disks do not satisfy the second one.

The following theorem is motivated by theorem 5.2 in [7], where a similar result is proved on the 2-sphere. We consider a Morse function $F : S \to \mathbb{R}$. We denote by $x_1,\ldots,x_l$ its critical points, $\lambda_j = F(x_j)$ its critical values, and we suppose $\lambda_1 < \cdots < \lambda_l$. Set $\mathcal{F} = \{H\colon S \to \mathbb{R},\ \omega(X_H, X_F) = 0\}$, the space of functions commuting with F (X_H is the Hamiltonian vector field associated with H). The set:

$$\Gamma = \{\varphi_H^1,\ H \in \mathcal{F}\},$$

of time 1 maps of Hamiltonian flows generated by elements in $\mathcal{F}$, is an Abelian subgroup of $\mathrm{Ham}(S,\omega)$. The restriction of the quasi-morphism $\mathfrak{Cal}_S$ to Γ is a homomorphism. We associate a finite graph $\mathcal{G}$ to the Morse function F in the following way. The connected components of level sets $F^{-1}(t)$ are of three kinds:

(i) critical points of F of index 0 or 2;
(ii) simple closed curves;
(iii) immersed closed curves with one self-intersection (corresponding to a critical point of index one of F).

To each component of the first or the third kind we associate a vertex of $\mathcal{G}$. We denote by K the union of all the components of the first or the third kind. The open set $S \setminus K$ is a finite union of cylinders diffeomorphic to $S^1 \times \mathbb{R}$. To each cylinder C we associate an edge of $\mathcal{G}$, whose ends are the vertices associated to the components of level sets containing ∂C. One has a natural map $p_{\mathcal{G}} : S \to \mathcal{G}$, and each $H \in \mathcal{F}$ can be written in the form $H = \overline{H} \circ p_{\mathcal{G}}$. Then, one can define (with respect to the combinatorial properties of the graph $\mathcal{G}$) a set $\mathcal{V}$ of $2g - 2$ vertices of $\mathcal{G}$ corresponding to certain critical points of index 1 of F. We assume, in the following theorem, that the total area of the symplectic form is $2g - 2$.

Theorem 0.2. *For H in $\mathcal{F}$, we have*:

$$\mathfrak{Cal}_S(\varphi_H^1) = \int_S H\omega - \sum_{v \in \mathcal{V}} \overline{H}(v).$$

1. Introduction

Un *quasi-morphisme* sur un groupe Γ est une fonction $\phi : \Gamma \to \mathbb{R}$, telle que la quantité

$$\sup_{x,y \in \Gamma} \left|\phi(xy) - \phi(x) - \phi(y)\right|$$

soit finie. Si en outre ϕ satisfait $\phi(x^n) = n\phi(x)$, pour $x \in \Gamma$ et $n \in \mathbb{Z}$, on dit que ϕ est *homogène*. On pourra consulter [3] pour une introduction à ce sujet.

Si (V, ω) est une variété symplectique connexe fermée, le groupe $\mathrm{Ham}(V, \omega)$ de ses difféomorphismes hamiltoniens est simple d'après un théorème de Banyaga [2]. Il n'admet donc pas de morphisme non-trivial vers $\mathbb{R}$. Si V est ouverte, et ω exacte sur V, Calabi a défini dans [5] un morphisme :

$$\mathfrak{Cal}_V : \mathrm{Ham}(V, \omega) \to \mathbb{R},$$

dont le noyau est simple d'après un autre théorème de Banyaga [2]. Si λ est une primitive de ω sur V et si (f_t) est une isotopie hamiltonienne engendrée par le champ de vecteurs Z_t, nous avons :

$$\mathfrak{Cal}_V(f_1) = \int_V \int_0^1 \lambda(Z_t)\,\mathrm{d}t\,\omega.$$

Supposons maintenant que V soit fermée. Si $U \subset V$ est un ouvert connexe, on notera Γ_U le sous-groupe de $\mathrm{Ham}(V, \omega)$ formé des difféomorphismes temps 1 d'une isotopie hamiltonienne dans U. On dispose alors, si ω est exacte sur U, du morphisme $\mathfrak{Cal}_U : \Gamma_U \to \mathbb{R}$. On notera $\mathcal{D}$ la famille des ouverts connexes U tels que ω est exacte sur U, et tels qu'il existe $f \in \mathrm{Ham}(V, \omega)$ avec $f(U) \cap \overline{U} = \emptyset$. Dans [7], Entov et Polterovich posent la question suivante :

> *Peut-on construire un quasi-morphisme homogène $\phi : \mathrm{Ham}(V, \omega) \to \mathbb{R}$, dont les restrictions aux sous-groupes $(\Gamma_U)_{U \in \mathcal{D}}$ soient égales aux morphismes de Calabi $(\mathfrak{Cal}_U)_{U \in \mathcal{D}}$?*

Plus généralement, un tel quasi-morphisme peut-il être défini sur le revêtement universel $\widetilde{\mathrm{Ham}}(V, \omega)$ du groupe des difféomorphismes hamiltoniens ? Ils répondent affirmativement à cette question pour une certaine classe de variétés symplectiques, qui inclut notamment les espaces projectifs complexes, en particulier la sphère S^2. Leur méthode utilise des outils sophistiqués de topologie symplectique. Par des méthodes similaires à celles de [8], nous prouvons :

Théorème 1.1. *Si (S, ω) est une surface fermée, orientée, de genre g supérieur ou égal à 2, munie d'une forme symplectique, il existe un quasi-morphisme homogène $\mathfrak{Cal}_S : \mathrm{Ham}(S, \omega) \to \mathbb{R}$ dont la restriction aux sous-groupes*

Γ_U est égale au morphisme de Calabi pour tout ouvert connexe U difféomorphe à un disque ou à un anneau. Le quasi-morphisme $\mathfrak{Cal}_S$ est invariant par conjugaison par tout difféomorphisme symplectique.

Dans [8], on pourra trouver de nombreuses constructions de quasi-morphismes sur les groupes $\mathrm{Ham}(S,\omega)$ (pour toute surface fermée orientée), cependant, ces quasi-morphismes ne se restreignent pas en des homomorphismes sur les sous-groupes Γ_U. Notre quasi-morphisme est certainement de nature très différente de celui construit par Entov et Polterovich dans [7] (voir aussi [4]). En effet, la condition que nous imposons à l'ouvert U est différente des deux conditions qui définissent la famille $\mathcal{D}$. En dimension 2, l'exactitude de la forme symplectique sur un ouvert est une condition vide, en revanche certains disques ne satisfont pas la seconde.

L'énoncé du théorème suivant est inspiré du Théorème 5.2 de [7], où un résultat similaire est prouvé sur la sphère. Nous considérons une fonction de Morse $F : S \to \mathbb{R}$. Notons $x_1, \ldots, x_l$ ses points critiques, $\lambda_i = F(x_i)$ ses valeurs critiques, et supposons $\lambda_1 < \cdots < \lambda_l$. Soit $\mathcal{F} = \{H\colon\ S \to \mathbb{R},\ \omega(X_H, X_F) = 0\}$ l'espace des fonctions qui commutent avec F (X_H désigne le gradient symplectique de la fonction H). L'ensemble

$$\Gamma = \{\varphi_H^1,\ H \in \mathcal{F}\}$$

des temps 1 des flots hamiltoniens engendrés par les éléments de $\mathcal{F}$, est un sous-groupe abélien de $\mathrm{Ham}(S,\omega)$. La restriction de $\mathfrak{Cal}_S$ à Γ est un morphisme que nous calculons. La donnée de la fonction F permet de construire un graphe fini $\mathcal{G}$ de la manière suivante. Parmi les composantes connexes des niveaux $F^{-1}(\mathit{cste})$ on trouve :

(i) les points critiques de F d'indice 0 ou 2,
(ii) des courbes simples plongées,
(iii) des courbes immergées ayant un unique point double (correspondant à un point critique d'indice 1 de F).

À chaque composante de type 1 ou 3 on associe un sommet de $\mathcal{G}$. Notons K la réunion des composantes de type 1 ou 3. L'ouvert $S \setminus K$ est une réunion finie de cylindres difféomorphes à $S^1 \times \mathbb{R}$. A chaque cylindre C on associe une arête dont les extrémités sont les sommets associés aux composantes de niveaux de F qui contiennent ∂C. Nous avons une application naturelle $p_{\mathcal{G}} : S \to \mathcal{G}$, et toute fonction H de $\mathcal{F}$ est de la forme $H = \overline{H} \circ p_{\mathcal{G}}$. On peut alors définir (en fonction de la combinatoire du graphe $\mathcal{G}$) un ensemble $\mathcal{V}$ de $2g-2$ sommets de $\mathcal{G}$ correspondant à certains points critiques d'indice 1 de F. Nous supposons dans le théorème suivant que l'aire totale de la forme ω est égale à $2g-2$.

Théorème 1.2. *Si H est dans $\mathcal{F}$, nous avons* :

$$\mathfrak{Cal}_S(\varphi_H^1) = \int_S H\omega - \sum_{v \in \mathcal{V}} \overline{H}(v).$$

Les résultats annoncés dans cette note font l'objet d'une démonstration complète dans [10].

2. Extension du groupe des difféomorphismes hamiltoniens

Les résultats de ce paragraphe sont dus à Banyaga dans [1].

Soit M une variété (compacte, connexe) munie d'une forme de contact α, dont le champ de Reeb X est induit par une action libre du cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Dans cette situation, la variété V, quotient de M par l'action du cercle, porte une forme symplectique ω telle que $\pi^*\omega = d\alpha$, où $\pi : M \to V$ est la projection canonique. Notons $G_\alpha(M)_0$ le groupe des difféomorphismes de M qui préservent α, isotopes à l'identité via une isotopie qui préserve α. Un élément de $G_\alpha(M)_0$ commute avec l'action du cercle et induit un difféomorphisme hamiltonien de V. On a donc une extension centrale :

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow G_\alpha(M)_0 \longrightarrow \mathrm{Ham}(V,\omega) \longrightarrow 0.$$

Cette extension se scinde au niveau des champs de vecteurs. Si Y est un champ de vecteurs hamiltonien sur V (avec $\iota_Y\omega = \mathrm{d}H_Y$ et $\int_V H_Y\omega^n = 0$) le champ $\theta(Y) = \widehat{Y} - (H_Y \circ \pi)X$ sur M préserve α ($\widehat{Y}$ est le relevé horizontal de Y : $\alpha(\widehat{Y}) = 0$). L'application $Y \mapsto \theta(Y)$ est un morphisme d'algèbres de Lie qui scinde l'extension de l'algèbre des champs hamiltoniens sur V par celle des champs sur M qui préservent α. Si (f_t) est une isotopie hamiltonienne dans V, nous noterons $\Theta(f_t)$ l'isotopie de M obtenue en « intégrant » θ. Sa classe d'homotopie ne dépend que de celle de (f_t).

Dans le cas où V est une surface de genre supérieur ou égal à 2, le groupe $\mathrm{Ham}(V,\omega)$ est simplement connexe [6,9], et l'extension précédente est scindée grâce à l'application Θ. Le scindement est unique puisque le groupe $\mathrm{Ham}(V,\omega)$ est simple.

3. Construction du quasi-morphisme $\mathfrak{Cal}_S$

Nous esquissons ici la preuve du théorème 1.1. Fixons une forme symplectique d'aire totale $2g-2$, et une métrique à courbure constante sur S de forme d'aire associée égale à ω. Notons M le fibré unitaire tangent à S, et X le champ de vecteurs sur M, tangent aux fibres de $\pi : M \to S$, induit par l'action naturelle de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sur M. Choisissons une primitive α de $\pi^*\omega$ sur M, qui soit une forme de contact de champ de Reeb X. On note $\widetilde{S}$ le revêtement universel de S, $\widetilde{M}$ son fibré unitaire tangent, et S^1_∞ le cercle à l'infini déterminé par la métrique hyperbolique. On a une projection naturelle $p_\infty : \widetilde{M} \to S^1_\infty$. Enfin, si $\gamma : [0,1] \to S^1_\infty$ est un chemin continu, nous noterons $n(\gamma)$ l'entier défini comme suit. Si un paramétrage de S^1_∞ par $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est donné, notons $\tilde{\gamma}$ un relevé de γ à $\mathbb{R}$. On pose :

$$n(\gamma) = \big[\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)\big],$$

cet entier ne dépend pas du choix du paramétrage. Si γ et β sont deux chemins dans S^1_∞ avec $\gamma(1) = \beta(0)$ nous avons :

$$\big|n(\gamma * \beta) - n(\gamma) - n(\beta)\big| \leqslant 2. \tag{$*$}$$

Si (f_t) est une isotopie hamiltonienne dans S, on note $\Theta(f_t) : M \to M$ son relèvement de contact construit au paragraphe 2, et $F_t : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ l'isotopie qui relève $\Theta(f_t)$. Considérons un point v de $\widetilde{M}$, de projection $\tilde{\pi}(v) = \tilde{x}$ dans $\widetilde{S}$. À une quantité bornée près, l'entier $n(p_\infty(F_t(v)))$ ne dépend que de $\tilde{x}$, et pas du point v dans la fibre $\widetilde{M}_{\tilde{x}}$. Nous définissons alors une fonction $\widetilde{\mathrm{angle}}(-, f_1)$ sur $\widetilde{S}$ par : $\widetilde{\mathrm{angle}}(\tilde{x}, f_1) = -\inf_{v \in \widetilde{M}_{\tilde{x}}} n(p_\infty(F_t(v)))$. La fonction $\widetilde{\mathrm{angle}}(-, f_1)$ est invariante sous l'action du groupe fondamental de S et définit donc une fonction mesurable bornée $\mathrm{angle}(-, f_1)$ sur S. Une conséquence de l'inégalité $(*)$ est que l'application

$$f_1 \mapsto \int_S \mathrm{angle}(-, f_1)\omega$$

est un quasi-morphisme sur le groupe $\mathrm{Ham}(S,\omega)$. Nous pouvons l'homogénéiser pour définir :

$$\mathfrak{Cal}_S(f_1) = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \int_S \mathrm{angle}(-, f_1^p)\omega.$$

Supposons que U soit un ouvert connexe de S distinct de S. Choisissons une trivialisation du S^1-fibré principal $\pi : M \to S$ au-dessus de U :

$$\psi : U \times S^1 \to \pi^{-1}(U).$$

On note s la coordonnée angulaire sur le cercle, dans cette trivialisation, de sorte que $X = \partial/\partial s$. Supposons que (f_t) soit une isotopie hamiltonienne dans U, engendrée par le champ de vecteurs Z_t, d'hamiltonien H_t (avec

$\mathrm{supp}(H_t) \subset U$). Le fibré en cercles $\pi^{-1}(U) \to U$ est muni de deux feuilletages transverses aux fibres : l'un $\mathcal{F}_1$, est donné par l'équation $\mathrm{d}s = 0$, l'autre, $\mathcal{F}_2$, est le feuilletage horocyclique de S (restreint à U).

Si $v \in M$ et $\pi(v) = x \in U$, notons $\gamma_1(t)$ et $\gamma_2(t)$ les relevés du chemin $(f_t(x))$, issus de v, tangents aux feuilletages $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ respectivement. La comparaison des angles (dans la fibre $M_{f_t(x)}$) entre les courbes $\Theta(f_t)(v)$ et $\gamma_1(t)$ d'une part et $\Theta(f_t)(v)$ et $\gamma_2(t)$ d'autre part, quand t varie de 0 à 1, fournit deux fonctions $\varrho_1(v)$, $\varrho_2(v)$. A une quantité bornée près, ces fonctions ne dépendent que de $\pi(v)$. Nous avons $\mathrm{angle}(x, f_1) = \inf_{M_x} \varrho_2$. La fonction $x \mapsto \inf_{M_x} \varrho_1$ (prolongée en dehors de U par la constante $-\frac{1}{2g-2} \int_0^1 \int_U H_t \,\mathrm{d}t\, \omega$) a une intégrale égale à l'invariant de Calabi de f_1 (à une erreur bornée près). Le défaut $\mathfrak{Cal}_S(f_1) - \mathfrak{Cal}_U(f_1)$ est donc issu de la comparaison entre les deux horizontales fournies par les feuilletages $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$. On montre qu'il est nul si U est un disque ou un anneau.

L'invariance $\mathfrak{Cal}_S(hf_1h^{-1}) = \mathfrak{Cal}_S(f_1)$, pour un difféomorphisme symplectique h, vient essentiellement du fait suivant. La classe d'Euler du fibré en cercles M au-dessus de S ne dépend pas de la métrique hyperbolique, de même le type topologique de l'action du groupe $\pi_1(S)$ sur le cercle S^1_∞ ne dépend pas de la métrique. On peut donc transporter par h les divers objets utiles à notre construction.

Remerciements

Je tiens à remercier Étienne Ghys qui m'a proposé de réfléchir à ce sujet et m'a encouragé, ainsi qu'Emmanuel Giroux pour de nombreuses discussions. Je voudrais également remercier vivement Leonid Polterovich qui m'a signalé une erreur dans une version antérieure du théorème 1.2.

Références

[1] A. Banyaga, The group of diffeomorphisms preserving a regular contact form, in: Topology and Algebra (Proc. Colloq., Eidgenoss. Tech. Hochsch., Zurich, 1977), in: Monograph. Enseign. Math., vol. 26, 1978, pp. 47–53.
[2] A. Banyaga, Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique, Comment. Math. Helv. 53 (1978) 174–227.
[3] C. Bavard, Longeur stable des commutateurs, Enseign. Math. (2) 37 (1991) 109–150.
[4] P. Biran, M. Entov, L. Polterovich, Calabi quasimorphisms for the symplectic ball, Commun. Contemp. Math. 6 (2004) 793–802.
[5] E. Calabi, On the group of automorphisms of a symplectic manifold, in: Problems in Analysis (Symposium in Honour of S. Bochner), Princeton University Press, 1970.
[6] C.J. Earle, J. Eells, A fibre bundle description of Teichmüller theory, J. Differential Geom. 3 (1969) 19–43.
[7] M. Entov, L. Polterovich, Calabi quasimorphism and quantum homology, Int. Math. Res. Notices 1 (2003) 1635–1676.
[8] J.-M. Gambaudo, É. Ghys, Commutators and diffeomorphisms of surfaces, Ergodic Theory Dynam. Systems 24 (2004) 1591–1617.
[9] D. McDuff, D. Salamon, Introduction to Symplectic Topology, second ed., Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 1998.
[10] P. Py, Quasi-morphismes et invariant de Calabi, prépublication, 2005.