Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 141–145

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse mathématique/Analyse fonctionnelle

Sur l'équation fonctionnelle $\int_{\mathbb{T}}(\psi(t+s)-\psi(s))^3\,\mathrm{d}s = \sin t$

Jean-Pierre Kahane

Département de mathématique, université Paris-sud, 91405 Orsay cedex, France

Reçu et accepté le 10 mai 2005

Disponible sur Internet le 29 juin 2005

Présenté par Haïm Brezis

Résumé

Clairement l'équation proposée dans le titre n'a pas de solution dans C^α, $\alpha > \frac{1}{3}$. On donne une solution explicite appartenant à $C^{1/3}$. La motivation de cette question, et de questions analogues, se trouve dans un futur article de H. Brezis. ***Pour citer cet article : J.-P. Kahane, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abstract

On the functional equation $\int_{\mathbb{T}}(\psi(t+s)-\psi(s))^3\,\mathrm{d}s = \sin t$. Clearly the equation given in the title has no solution in C^α, $\alpha > \frac{1}{3}$. We give an explicit solution in $C^{1/3}$. The motivation for this question, and other questions of the same type, comes from the forthcoming article by H. Brezis. ***To cite this article: J.-P. Kahane, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

L'équation fonctionnelle

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} \big(\psi(t+s)-\psi(s)\big)^3 \frac{\mathrm{d}s}{2\pi} = \sin t, \\ \psi(t+2\pi) = \psi(t) \in \mathbb{R} \quad (t \in \mathbb{R}) \end{cases} \tag{1}$$

apparaît en relation avec un problème posé et étudié par H. Brezis, relatif au calcul de l'indice d'une application de S^1 dans S^1 ; une référence commode est [1], qui est une mise au point du sujet en 2004.

Voici d'abord un aperçu du problème (les questions Q1, Q2, Q3) et de quelques résultats (les propositions P1 et P2), tirés de [1]. La suite (les propositions P3, P4, P5 et les questions Q4 à Q7) est l'objet propre de cette note. Le résultat principal est P5.

Adresse e-mail : jean-pierre.kahane@math.u-psud.fr (J.-P. Kahane).

1631-073X/$ – see front matter © 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2005.05.016

Soit f une application continue de S^1 dans S^1 et ν son indice. On peut identifier S^1 et le cercle unité de $\mathbb{C}$, et écrire

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Si f est de classe C^1, l'expression de ν comme

$$\nu = \int_{S^1} \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi \mathrm{i}} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) \overline{f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)} \frac{\mathrm{d}t}{2\pi}$$

donne

$$\nu = \sum_{-\infty}^{\infty} n|a_n|^2 \tag{2}$$

et la série du second membre est absolument convergente. L'examen de la formule (2) conduit à une série de questions :

Q1. Peut-on calculer ν au moyen de (2) sous des conditions moins exigeantes que $f \in C^1$?

Q2. Peut-on calculer ν au moyen d'un procédé de sommation convenable de la série (2) pour une classe assez étendue de fonctions f ?

Q3. Est-il vrai en toute généralité que la donnée des $|a_n|$ détermine ν ?

La question Q3 est encore ouverte. Voici les réponses apportées par Brezis aux questions Q1 et Q2.

P1 (théorème 4 de [1]). *Sous la condition*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |n||a_n|^2 < \infty, \tag{3}$$

l'indice de f est donné par (2).

La condition (3) s'interprête comme $f \in H^{1/2}(S^1, S^1)$, et la théorie de Brezis et Nirenberg permet de définir l'indice pour les fonctions de cette classe, et plus généralement pour $VMO(S^1, S^1)$ [1]. On ne peut pas remplacer la condition (3) par la convergence de la série de (2) (au sens de la convergence des sommes partielles symétriques), ni même par la sommabilité de cette série au sens d'Abel–Poisson (Korevaar, cité en [1]).

P2 (théorème 5 de [1]). *Sous la condition*

$$\iint_{S_1^2} \frac{|f(x) - f(y)|^3}{|x-y|^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \infty \tag{4}$$

(*c'est-à-dire $f \in W^{1/3,3}(S_1)$*), *l'indice est donné par la formule*

$$\nu = \lim_{t \to 0} \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \frac{\sin^2 nt}{nt^2}. \tag{5}$$

Il sera commode d'écrire

$$f\left(e^{it}\right)=e^{i\nu t}\,e^{i\psi(t)}, \tag{6}$$

où ψ est réelle et 2π-périodique. On va se restreindre à ψ continue. Le rôle des $|a_n|$ apparaît dans la formule

$$\int_0^{2\pi} f\left(e^{i(t+s)}\right)\overline{f\left(e^{is}\right)}\,\frac{ds}{2\pi}=\int_0^{2\pi} e^{i\nu t}\,e^{i(\psi(t+s)-\psi(s))}\,\frac{ds}{2\pi}=\sum_{-\infty}^{\infty}|a_n|^2\,e^{int}. \tag{7}$$

Posons

$$\begin{aligned} g(t)&=\int_0^{2\pi} e^{i(\psi(t+s)-\psi(s))}\,\frac{ds}{d\pi}\\ &=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int_0^{2\pi}\big(\psi(t+s)-\psi(s)\big)^n\,\frac{ds}{2\pi}\\ &=1-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\big(\psi(t+s)-\psi(s)\big)^2\,\frac{ds}{2\pi}-\frac{i}{6}\int_0^{2\pi}\big(\psi(t+s)-\psi(s)\big)^3\,\frac{ds}{2\pi}+\cdots \end{aligned} \tag{8}$$

On introduit naturellement la condition

$$\int_0^{2\pi}\big|\psi(t+s)-\psi(s)\big|^3\,ds=o(t)\quad (t\to 0). \tag{9}$$

Sous cette condition, jointe à la continuité de ψ, on a $\operatorname{Im} g(t)=o(t)$ $(t\to 0)$ et $\lim_{t\to 0}\operatorname{Re} g(t)=1$, donc

$$\operatorname{Im}\Big(\sum|a_n|^2\,e^{int}\Big)=\nu t+o(t)\quad (t\to 0).$$

Enonçons le résultat

P3. *Sous la condition* (9), *jointe à ψ continue, on peut calculer l'indice de f par la formule*

$$\nu=\lim_{t\to 0}\sum_{-\infty}^{\infty}|a_n|^2\frac{\sin nt}{t}. \tag{10}$$

Il n'est pas difficile de vérifier que (4) implique (9) et que (10) implique (5). Donc, si l'on se borne aux fonctions continues, P2 est un corollaire de P3. Remarquons que (9) a lieu lorsque f est höldérienne d'ordre $1/3$.

L'objet de cette note est de montrer que la condition (9) est substantiellement la meilleure possible en vue d'avoir (10), ou même (5).

P4. *Pour tout λ réel, il existe une $f: S^1\to S^1$ continue, d'indice nul, donc de la forme* (6) *avec $\nu=0$, höldérienne d'ordre* $1/3$, *c'est-à-dire*

$$\big|\psi(t+s)-\psi(s)\big)\leqslant C|t|^{1/3}\quad (C=C(\psi)<\infty), \tag{11}$$

et telle que

$$\lambda=\lim_{t\to 0}\sum_{-\infty}^{\infty}|a_n|^2\frac{\sin nt}{t} \tag{12}$$

((12) *signifiant que la limite existe*).

La preuve de P4 est fournie par une solution de l'Éq. (1).

P5. *L'équation fonctionnelle* (1) *a pour solution* (*non unique*)

$$\psi(t) = \frac{2^{1/9}}{3^{1/3}} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j/3} \sin 2^j t, \tag{13}$$

dont on vérifie facilement que c'est une fonction höldérienne d'ordre $1/3$.

Supposons P5 établie. Quitte à multiplier ψ par une constante, on a, outre (11),

$$\int_0^{2\pi} \bigl(\psi(t+s) - \psi(s)\bigr)^3 \frac{\mathrm{d}s}{2\pi} = -6\lambda \sin t$$

donc, en se référant à (8)

$$\operatorname{Im} g(t) = \lambda t + \mathrm{o}(t) \quad (t \to 0)$$

c'est-à-dire (12), dont P4 est établie.

Le lecteur peut vérifier P5 directement. Il peut aussi y être conduit en cherchant à résoudre

$$\int_0^{2\pi} \bigl(\psi(t+s) - \psi(s)\bigr)^3 \frac{\mathrm{d}s}{2\pi} = A(t) \tag{14}$$

en se bornant à ψ impaire (lorsque ψ est paire le premier membre est nul)

$$\psi(t) = \sum_1^{\infty} \beta_k \sin kt. \tag{15}$$

Le premier membre de (14) s'écrit successivement

$$\int_0^{2\pi} \left(2 \sum_1^{\infty} \beta_k \cos ks \sin k\frac{t}{2}\right)^3 \frac{\mathrm{d}s}{2\pi},$$

$$\sum_{k,\ell,m} \beta_k \beta_\ell \beta_m \bigl(\#\bigl\{\{\pm\}\colon \pm k \pm \ell \pm m = 0\bigr\}\bigr) \sin\frac{kt}{2} \sin\frac{\ell t}{2} \sin\frac{mt}{2},$$

$$-6 \sum_{k,\ell} \beta_k \beta_\ell \beta_{k+\ell} \sin\frac{kt}{2} \sin\frac{\ell t}{2} \sin\frac{(k+\ell)t}{2},$$

et (14) se traduit en

$$\frac{3}{2} \sum_{k,\ell} \beta_k \beta_\ell \beta_{k+\ell} \bigl(\sin kt + \sin \ell t - \sin(k+\ell)t\bigr) = A(t). \tag{16}$$

Le choix $\beta_k = \gamma_j$ quand $k = 2^j$ et $\beta_k = 0$ quand k n'est pas une puissance de 2 réduit la sommation à $k = \ell = 2^j$, donc (16) à

$$\frac{3}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j^2 \gamma_{j+1} \bigl(2 \sin 2^j t - \sin 2^{j+1} t\bigr) = A(t), \tag{17}$$

soit

$$3\gamma_0^2\gamma_1 \sin t + \frac{3}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\bigl(2\gamma_j^2\gamma_{j+1} - \gamma_{j-1}^2\gamma_j\bigr)\sin 2^j t = A(t) \tag{18}$$

et le choix $\gamma_j = c2^{-j\alpha}$ avec $\alpha = \frac{1}{3}$ s'impose lorsque $A(t) = \sin t$.

On obtient également des solutions de (14) lorsque $A(t)$ est de la forme $\sum_{j=0}^{\infty} c_j \sin 2^j t$. On peut présumer que (14) a toujours des solutions quand $A(t)$ est une fonction impaire, mais l'étude semble délicate.

Q4. Pour quelles fonctions $A(\cdot)$ impaires peut-on résoudre l'Éq. (14), et dans quelles classes de fonctions peut-on choisir ψ ?

Une solution de Q4 pourrait permettre d'aborder une question plus proche de Q3, à savoir

Q5. Peut-on résoudre l'équation

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin\bigl(\psi(t+s) - \psi(s)\bigr)\frac{\mathrm{d}s}{2\pi} = \sin t \\ \psi \text{ réelle et continue, } 2\pi\text{-périodique ?} \end{cases} \tag{19}$$

Si la solution est positive, il en résulte que l'indice de f ne peut pas être obtenu à partir de la partie imaginaire de (7), ou, ce qui revient au même, à partir de la suite $(|a_n|^2 - |a_{-n}|^2)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Pour répondre négativement à la question de Brezis Q3, on pourrait songer à résoudre l'équation

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\psi(t+s)-\psi(s))}\frac{\mathrm{d}s}{2\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \\ \psi \text{ réelle et continue, } 2\pi\text{-périodique.} \end{cases} \tag{20}$$

Cependant, en considérant d'abord la partie réelle, il est facile de voir que (20) n'a pas de solution. La question qui se pose, équivalente à la négation de Q3, est la suivante :

Q6. Existe-t-il un entier $\nu \neq 0$ et deux fonctions ψ_1 et ψ_2 réelles, continues et 2π-périodiques, telles que

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\psi_2(t+s)-\psi_2(s))}\frac{\mathrm{d}s}{2\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu t}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\psi_1(t+s)-\psi_1(s))}\frac{\mathrm{d}s}{2\pi} ? \tag{21}$$

Nous venons de voir que (21) n'a pas de solution quand $\nu = 1$ et $\psi_1 = 0$, donc plus généralement quand $\nu \neq 0$ et ψ_1 est constant. La question se pose, d'élargir cette observation à d'autres fonctions ψ_1.

Q7. Quelles sont les fonctions ψ_1 pour lesquelles l'Éq. (21), avec $\nu \neq 0$, n'a aucune solution ψ_2 ?

Autrement dit, quelles sont les fonctions f, applications continues de S^1 dans S^1, dont l'indice est bien déterminé par la seule donnée des valeurs absolues des coefficients de Fourier ?

Références

[1] H. Brezis, New questions related to the topological degree, in: Proceedings of the Conference Celebrating the 90th Birthday of I.M. Gelfand, in press.