



Probabilités

Étude en temps petit des solutions d'EDS conduites par des mouvements browniens fractionnaires

Fabrice Baudoin, Laure Coutin

Laboratoire de probabilités et statistiques, université Paul-Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 4, France

Reçu le 18 mai 2004 ; accepté après révision le 3 mai 2005

Disponible sur Internet le 28 juin 2005

Présenté par Marc Yor

Résumé

Nous étudions les propriétés en temps petit de l'opérateur $\mathbf{P}_t(f)(x) = \mathbb{E}(f(X_t^x))$ où $(X_t^x)_{t \geq 0}$ est la solution d'une équation différentielle stochastique conduite par des mouvements browniens fractionnaires de même paramètre de Hurst $H > \frac{1}{4}$. **Pour citer cet article :** F. Baudoin, L. Coutin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

SDE solutions, at small times, driven by fractional Brownian motions. We study, in small times, the properties of the operator $\mathbf{P}_t(f)(x) = \mathbb{E}(f(X_t^x))$, where $(X_t^x)_{t \geq 0}$ is the solution of a stochastic differential equation driven by fractional Brownian motions with the same Hurst parameter $H > \frac{1}{4}$. **To cite this article :** F. Baudoin, L. Coutin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

Soit $(X_t^x)_{t \geq 0}$ la solution de l'EDS au sens de Stratonovitch

$$dX_t = \sum_{i=1}^n V_i(X_t) \circ dB_t^i, \quad X_0 = x, \quad (1)$$

où $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien d dimensionnel et les V_i , $i = 1, \dots, n$, sont des champs de vecteurs C_b^∞ . Il est bien connu que $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Markov de semi-groupe $\mathbf{P}_t = e^{\frac{1}{2}t \sum_{i=1}^n V_i^2}$. Lorsque $(B_t)_{t \geq 0}$ n'est

Adresses e-mail : fbaudoin@cict.fr (F. Baudoin), coutin@cict.fr (L. Coutin).

plus un mouvement brownien mais un mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H > \frac{1}{4}$, une notion de solution pour (1) a été définie par Coutin et Qian [1], (voir aussi Nualart et Răşcanu, [5] et les références contenues dans cet article lorsque $H > \frac{1}{2}$). Le but de cette Note est d'étudier l'opérateur $\mathbf{P}_t(f)(x) = \mathbb{E}(f(X_t^x))$, $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Dans ce cas $(\mathbf{P}_t)_{t \geq 0}$ n'est plus un semi-groupe et donc les techniques usuelles ne peuvent plus s'appliquer. Néanmoins, nous montrons un développement asymptotique quand $t \rightarrow 0$ du type

$$\mathbf{P}_t = \mathbf{Id} + \frac{1}{2}t^{2H} \left(\sum_{i=1}^d V_i^2 \right) + t^{4H} \Gamma + o(t^{5H}),$$

où Γ est un opérateur différentiel homogène du 4 ème ordre. En corollaire nous en déduisons un équivalent de la densité en temps petit.

2. Développement asymptotique de \mathbf{P}_t

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien fractionnaire d -dimensionnel ($d \geq 1$) de paramètre de Hurst $\frac{1}{4} < H \leq 1$. Nous nous intéressons à l'étude d'équations différentielles stochastiques de la forme

$$X_t^{x_0} = x_0 + \sum_{i=1}^d \int_0^t V_i(X_s^{x_0}) dB_s^i \tag{2}$$

où les V_i sont des champs de vecteurs C^∞ -bornés sur \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Les intégrales apparaissant dans (2) sont comprises au sens de l'intégrale de Lyons, [3]. Il est facile de démontrer en utilisant le Théorème 6.3.1 page 179 de [3] d'existence et d'unicité des équations différentielles, et [1] que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique processus $(X_t^{x_0})_{t \geq 0}$ solution de (2). Lorsque $d = 1$ on peut également citer les travaux de Nourdin [4].

Introduisons la famille d'opérateurs $\mathbf{P}_t f(x_0) = \mathbb{E}(f(X_t^{x_0}))$, $t \geq 0$, définis sur l'espace des fonctions C^∞ bornées, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Proposition 2.1. *Si les champs de vecteurs V_i commutent, c'est à dire si les crochets de Lie $[V_i, V_j] = 0$ pour $1 \leq i, j \leq d$, alors*

$$\mathbf{P}_t = \exp\left(\frac{1}{2}t^{2H} \sum_{i=1}^d V_i^2\right), \quad t \geq 0.$$

En d'autres termes la fonction $\varphi(t, x) = \mathbb{E}(f(X_t^x))$, satisfait l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = Ht^{2H-1} \sum_{i=1}^d V_i^2 \varphi,$$

avec la condition initiale $\varphi(0, x) = f(x)$.

Démonstration. En effet, si les champs de vecteurs commutent, alors il est facile de voir par une application itérée de la formule de changement de variable (Théorème 5.4.1 de [3])

$$X_t^{x_0} = (e^{V_1 B_t^1} \circ \dots \circ e^{V_d B_t^d})(x_0).$$

Pour plus de détails, dans le cas brownien, nous référons à Doss [2], Süßmann [7]. D'autre part, d'après la formule d'Itô pour le mouvement brownien fractionnaire, pour $f \in C^\infty$ bornée,

$$\mathbb{E}(e^{V_i B_t^i} f(x_0)) = f(x_0) + H \int_0^t s^{2H-1} \mathbb{E}(e^{V_i B_s^i} V_i^2 f(x_0)) ds. \quad \square$$

Remarque 1. Le théorème précédent est donc toujours vrai pour $d = 1$.

Si les champs de vecteurs V_i ne commutent plus, alors contrairement à ce qui se passe dans le cas des équations différentielles stochastiques conduites par un mouvement brownien standard, la formule précédente n'est plus vraie. Néanmoins,

Théorème 2.2. Pour tout V_i champs de vecteurs C_b^∞ , $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}^n$, quand $t \rightarrow 0$,

$$\mathbf{P}_t(f)(x) = f(x) + \frac{1}{2}t^{2H} \left(\sum_{i=1}^d (V_i^2 f)(x) \right) + \sum_{i,j,k,l=1}^n t^{4H} a_{i,j,k,l} (V_l V_k V_j V_i f)(x) + o(t^{5H}),$$

où, pour $H \neq \frac{1}{2}$,

$$a_{i,j,k,l} = \delta_{k,l} \delta_{j,i} (H/2) \beta(2H, 2H + 1) + \delta_{j,k} \delta_{i,l} (2H - 1) / (8(4H - 1)) + \delta_{i,k} \delta_{j,l} ((H/4) \beta(2H, 2H) - (2H - 1) / (8(4H - 1)))$$

avec $\beta(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$, et $\delta_{i,j}$ symbole de Kronecker.

Démonstration. La preuve s'appuie très fortement sur des résultats déterministes contenus dans le livre de Lyons et Qian [3] auquel nous nous référerons pour les notations et les définitions, sans les rappeler ici.

Soit $w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ une trajectoire C^1 par morceau et x la solution de l'équation différentielle ordinaire $x_t = x_0 + \int_0^t \sum_{i=1}^d V_i(x_s) dW^i(s)$ où $V^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ sont des champs de vecteurs de classe C_b^∞ . En utilisant la formule du changement de variables plusieurs fois, pour toute fonction f de classe C_b^∞ nous avons

$$f(x_t) = f(x_0) + \sum_{l=1}^5 \sum_{i_1, \dots, i_l \in \{1, \dots, d\}} [V_{i_1} \cdots V_{i_l} f](x) \int_{\Delta^k[0, T]} dw^{i_1, \dots, i_l} + R(V, f, t) \tag{3}$$

où $R(V, f, t) = \int_{0 < u_6 < \dots < u_1 < t} \sum_{i_1, \dots, i_6 \in \{1, \dots, d\}} [V_{i_1} \cdots V_{i_6} f](x_{u_6}) dw_{u_6}^{i_6} \cdots dw_{u_1}^{i_1}$. Nous remarquons que $R(V, f, t)$ est l'une des composantes du terme d'ordre 6, de la fonctionnelle régulière construite au dessus de la trajectoire $y = (w, x, \int_0^\cdot [V_{i_1} \cdots V_{i_6} f](x_u) dw_u, i_1, \dots, i_6 \in \{1, \dots, d\})$.

À présent, nous supposons que w est h\"olderienne d'ordre $1/p$, $p < 4$, telle qu'il existe une fonctionnelle $\mathbf{w} = (1, \mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^{[p]})$ dans $\Omega GP(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $|\mathbf{w}_{s,t}^i| \leq C_w^i |t - s|^i p$ et $\mathbf{w}_{s,t}^1 = w(t) - w(s)$.

En combinant le Théorème 3.1.2 page 35 d'extension des fonctionnelles a des degrés d'ordre superieurs, le Théorème 5.5.2 page 143, avec le Théorème 6.3.1 page 179 de [3] d'existence et d'unicité des équations différentielles, l'égalité (3) reste vraie avec de plus $|R(V, f, t)| \leq C(V, f, C_w) |t - s|^{6/p}$. En relisant attentivement les preuves des Théorèmes 3.1.2, 5.5.2 et 6.3.1 de [3], nous pouvons montrer que la constante $C(V, f, C_w)$ est un polynôme en C_w , la norme $1/p$ Hölder de la fonctionnelle \mathbf{w} , à coefficients dépendants de V, f .

Dans [1], les auteurs ont construit une fonctionnelle géométrique au dessus du mouvement brownien de paramètre de Hurst $H > \frac{1}{4}$, qui est à valeurs dans le chaos de Wiener d'ordre 3. En utilisant le lemme de Kolmogorov, on peut montrer que sa norme $1/p$ h\"olderienne, $p > 1/H$, admet des moments de tous ordres. Nous pouvons appliquer ce résultat déterministe au mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H > \frac{1}{4}$ et prendre l'espérance de chaque terme de l'égalité (3), ce qui achève la preuve. Il est à noter que le coefficient $a_{i,j,k,l} = \mathbb{E}(\int_{\Delta^4[0,1]} dB^{i,j,k,l})$. \square

Remarque 2. Plus généralement, il est possible d'obtenir un développement asymptotique à n'importe quel ordre du type $\mathbf{P}_t \sim_{t \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2kH} \Gamma_k^H$, où $(\Gamma_k^H)_{k \geq 0}$ est une suite d'opérateurs différentiels appartenant à l'algèbre universelle enveloppante construite sur les V_i et dépendant analytiquement du paramètre H .

Remarque 3. Remarquons que pour $H = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}_t = \mathbf{Id} + \frac{1}{2}t(\sum_{i=1}^d V_i^2) + \frac{1}{8}t^2(\sum_{i=1}^d V_i^2)^2 + o(t^3)$, qui est bien le développement du \mathbf{P}_t correspondant au cas brownien. En effet, dans ce cas, d'après la théorie de Hille–Yosida $\mathbf{P}_t = \exp(\frac{1}{2}t \sum_{i=1}^d V_i^2)$, $t \geq 0$. Pour plus de détails, voir Rogers et Williams [6], pp. 46.

Du théorème précédent, on peut déduire un corollaire intéressant.

Proposition 2.3. *Supposons qu'en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la famille $(V_1(x_0), \dots, V_d(x_0))$ est une base de \mathbb{R}^n , alors la variable aléatoire $X_t^{x_0}$, $t > 0$, admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue et*

$$p_t(x_0) \sim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{d/2} t^{Hd} m(x_0)}$$

où $m(x_0) = |\det(V_1(x_0), \dots, V_d(x_0))|$.

3. Conclusion

Dans de futurs travaux nous nous proposons d'étudier plus en profondeur la géométrie de l'application d'Itô $\mathcal{I} : B \rightarrow X$ où B est un mouvement brownien fractionnaire et X la solution de (1). Notamment, nous étudierons la signification géométrique des fonctions $a_i(x)$ intervenant dans le développement asymptotique de la densité :

$$p_t(x) \sim_{t \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n \frac{a_k(x)}{t^{nH-kH}}.$$

Références

- [1] L. Coutin, Z. Qian, Stochastic rough path analysis and fractional Brownian motion, Probab. Theory Related Fields 122 (2002) 108–140.
- [2] H. Doss, Lien entre équations différentielles stochastiques et ordinaires, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 13 (1977) 99–125.
- [3] T. Lyons, Differential equations driven by rough signals, Rev. Mat. Iberoamericana 14 (2) (1998) 215–310.
- [4] I. Nourdin, One-dimensional differential equations driven by a fractional Brownian motion with any Hurst index $H \in (0, 1)$, preprint, 2003.
- [5] D. Nualart, A. Răşcanu, Differential equations driven by fractional Brownian motion, Collect. Math. 53 (1) (2002) 55–81.
- [6] L.C.G. Rogers, D. Williams, Diffusions, Markov Processes and Martingales, vol. 1, second ed., Cambridge University Press, 2000.
- [7] H. Süßmann, On the gap between deterministic and stochastic ordinary differential equations, Ann. Probab. 6 (1978) 19–41.