Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 803–808

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations aux dérivées partielles

Convergence des solutions faibles du système de Vlasov–Maxwell stationnaire vers des solutions faibles du système de Vlasov–Poisson stationnaire quand la vitesse de la lumière tend vers l'infini

Mihai Bostan

Laboratoire de mathématiques de Besançon, UMR CNRS 6623, université de Franche-Comté, 16, route de Gray, 25030 Besançon cedex, France

Reçu le 28 janvier 2005 ; accepté le 5 avril 2005

Disponible sur Internet le 17 mai 2005

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

Nous étudions le comportement des solutions faibles pour le système relativiste de Vlasov–Maxwell stationnaire avec des conditions aux limites dans un domaine borné tridimensionnel dont la frontière est strictement étoilée, lorsque la vitesse de la lumière tend vers l'infini. Nous montrons la convergence vers une solution faible du système classique de Vlasov–Poisson stationnaire. Le problème périodique en temps et le problème avec condition initiale et conditions aux limites peuvent être traités par la même méthode. ***Pour citer cet article : M. Bostan, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

Convergence of weak solutions for the stationary Vlasov–Maxwell system to weak solutions for the stationary Vlasov–Poisson system for infinite light speed. We study here the behavior of weak solutions for the relativistic stationary Vlasov–Maxwell system with boundary conditions in a three-dimensional bounded domain with strictly star-shaped boundary, when the light speed becomes infinite. We prove the convergence toward a weak solution for the stationary Vlasov–Poisson system. The time periodic problem and the problem with initial-boundary conditions can be treated by the same method. ***To cite this article: M. Bostan, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***
© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Adresse e-mail : mbostan@math.univ-fcomte.fr (M. Bostan).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.04.009

Abridged English version

We consider an open bounded set $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ with boundary $\partial\Omega$ regular and strictly star-shaped. We introduce the notations $\Sigma = \partial\Omega \times \mathbb{R}^3_p$ and $\Sigma^{\pm} = \{(x, p) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^3_p \mid \pm(v(p) \cdot n(x)) > 0\}$, where $n(x)$ denotes the unit outward normal to $\partial\Omega$ at x and $v(p)$ is the velocity function associated to some energy function $e(p)$ by $v(p) = \nabla_p e(p)$, $p \in \mathbb{R}^3_p$. For the classical and relativistic cases these functions are given by $e(p) = \frac{|p|^2}{2m}$, $v(p) = \frac{p}{m}$ and respectively $e_c(p) = mc^2((1 + \frac{|p|^2}{m^2c^2})^{1/2} - 1)$, $v_c(p) = \frac{p}{m}(1 + \frac{|p|^2}{m^2c^2})^{-1/2}$, where m is the mass of particles, c is the light speed in the vacuum. We analyze here the behavior of weak solutions for the relativistic stationary Vlasov–Maxwell system when the light speed becomes infinite:

$$v_c(p) \cdot \nabla_x f_c + q\big(E_c(x) + v_c(p) \wedge B_c(x)\big) \cdot \nabla_p f = 0, \quad (x, p) \in \Omega \times \mathbb{R}^3_p, \tag{1}$$

$$-c^2 \cdot \operatorname{rot} B_c = -\frac{j_c}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{rot} E_c = 0, \quad \operatorname{div} E_c = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{div} B_c = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$f_c(x, p) = g(x, p), \quad (x, p) \in \Sigma^-, \quad n \wedge E_c(x) + c \cdot n \wedge \big(n \wedge B_c(x)\big) = h(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{3}$$

where g, h are given functions such that $g \geqslant 0$, $g \in L^\infty(\Sigma^-)$, $(n \cdot h)|_{\partial\Omega} = 0$ and $M^- + K^- := \int_{\Sigma^-} |(v(p) \cdot n(x))|(1 + e(p))g(x, p)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}p < +\infty$, $H := \int_{\partial\Omega} |h(x)|^2\,\mathrm{d}\sigma < +\infty$, $\rho_c(x) = q\int_{\mathbb{R}^3_p} f_c(x, p)\,\mathrm{d}p$, $x \in \Omega$ is the charge density and $j_c(x) = q\int_{\mathbb{R}^3_p} v_c(p) f_c(x, p)\,\mathrm{d}p$, $x \in \Omega$ is the current density. The existence of the solutions $(f_c, E_c, B_c)_{c>0}$ was proved in [3] (see also [5,4]). One of the key point was to estimate the total energy with respect to the boundary data. To simplify, we suppose that (f_c, E_c, B_c) is a regular, stationary solution, compactly supported in momentum. As usual, the conservation law of the mass and the energy gives:

$$\int_{\Sigma^+} \big(v_c(p) \cdot n(x)\big)\gamma^+ f_c(x, p)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}p = -\int_{\Sigma^-} \big(v_c(p) \cdot n(x)\big)g(x, p)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}p, \tag{4}$$

and:

$$\begin{aligned} &\int_{\Sigma^+} \big(v_c(p) \cdot n(x)\big)e_c(p)\gamma^+ f_c(x, p)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}p + \frac{\varepsilon_0 c}{2}\int_{\partial\Omega} \big\{|n \wedge E_c|^2 + c^2|n \wedge B_c|^2\big\}\,\mathrm{d}\sigma \\ &\quad = \frac{\varepsilon_0 c}{2}\int_{\partial\Omega} \big|h(x)\big|^2\,\mathrm{d}\sigma + \int_{\Sigma^-} \big|\big(v_c(p) \cdot n(x)\big)\big|e_c(p)g(x, p)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}p, \end{aligned} \tag{5}$$

where $\gamma^+ f_c$ represents the trace of f_c on Σ^+. By using also the momentum conservation law we obtain an estimate for the total (kinetic and electro-magnetic) energy and the normal traces of the electro-magnetic field. Note that the inequality (5) gives an uniform estimate with respect to c for the tangential traces of the electro-magnetic field (and in particular we have $\|n \wedge B_c\|_{L^2(\partial\Omega)^3} = \mathcal{O}(1/c)$), but not for the outgoing kinetic energy (unless $h = 0$). In order to analyze the behavior of $(f_c, E_c, B_c)_{c>0}$ we need to establish uniform estimates in c. One of the main difficulties consists of removing the dependence on c of the bound for the outgoing kinetic energy. The convergence toward a weak solution for the stationary classical Vlasov–Poisson system follows by using the weak stability result of DiPerna and Lions (cf. [8]).

1. Introduction

Le système des équations de Vlasov–Maxwell est un modèle classique dans la théorie cinétique des plasmas. En négligeant le champ magnétique on obtient l'approximation électrostatique ; ce sont les équations de Vlasov–Poisson. De nombreux résultats on été obtenus pour le problème de Cauchy dans l'espace tout entier [8,1] ainsi que pour le problème avec des conditions aux limites [9,2,10,11]. Dans cette Note on se propose de justifier l'approximation électrostatique pour des solutions faibles des équations stationnaires de Vlasov–Maxwell quand la vitesse de la lumière tend vers l'infini. Rappelons qu'un résultat de ce type a été montré pour des solutions fortes des équations de Vlasov–Maxwell dans l'espace tout entier (voir [7]). Notre résultat s'en déduit des estimations a priori pour des solutions faibles des équations de Vlasov–Maxwell, obtenues dans des travaux précédents (cf. [3]).

2. Le système de Vlasov–Maxwell stationnaire

Dans [3] nous avons montré l'existence de solution faible pour le problème :

$$v_c(p)\cdot\nabla_x f_c + q\big(E_c(x)+v_c(p)\wedge B_c(x)\big)\cdot\nabla_p f = 0,\quad (x,p)\in\Omega\times\mathbb{R}^3_p, \tag{6}$$

$$-c^2\cdot\operatorname{rot}B_c = -\frac{j_c}{\varepsilon_0},\quad \operatorname{rot}E_c = 0,\quad \operatorname{div}E_c = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0},\quad \operatorname{div}B_c = 0,\quad x\in\Omega, \tag{7}$$

$$f_c(x,p) = g(x,p),\quad (x,p)\in\Sigma^-,\quad n\wedge E_c(x) + c\cdot n\wedge\big(n\wedge B_c(x)\big) = h(x),\quad x\in\partial\Omega, \tag{8}$$

où $0\leqslant g\in L^\infty(\Sigma^-)$, $(n\cdot h)|_{\partial\Omega} = 0$ et $M^- + K^- := \int_{\Sigma^-}|(v(p)\cdot n(x))|(1+e(p))g(x,p)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}p < +\infty$, $H := \int_{\partial\Omega}|h(x)|^2\,\mathrm{d}\sigma < +\infty$. La preuve repose essentiellement sur des estimations a priori pour l'énergie totale en fonction des données g et h. Nous rappelons brièvement ici les calculs qui permettent d'obtenir ces estimations pour des solutions régulières, à suport compact en impulsion. Tout d'abord les conservations de la masse et de l'énergie se traduisent par :

$$\int_{\Sigma^+}\big(v_c(p)\cdot n(x)\big)\gamma^+ f_c(x,p)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}p = -\int_{\Sigma^-}\big(v_c(p)\cdot n(x)\big)g(x,p)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}p, \tag{9}$$

et :

$$\begin{aligned}&\int_{\Sigma^+}\big(v_c(p)\cdot n(x)\big)e_c(p)\gamma^+ f_c(x,p)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}p + \frac{\varepsilon_0 c}{2}\int_{\partial\Omega}\big\{|n\wedge E_c|^2 + c^2|n\wedge B_c|^2\big\}\,\mathrm{d}\sigma\\ &\quad = \frac{\varepsilon_0 c}{2}\int_{\partial\Omega}\big|h(x)\big|^2\,\mathrm{d}\sigma + \int_{\Sigma^-}\big|\big(v_c(p)\cdot n(x)\big)\big|e_c(p)g(x,p)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}p,\end{aligned} \tag{10}$$

où $\gamma^+ f_c$ représente la trace de f_c sur Σ^+. Signalons que l'inégalité précédente nous donne une estimation uniforme par rapport à $c\geqslant 1$ des normes $L^2(\partial\Omega)^3$ des traces tangentielles du champ électromagnétique. Par contre, bien qu'on ait aussi une estimation pour l'énergie cinétique sortante $K_c^+ := \int_{\Sigma^+}(v_c(p)\cdot n(x))e_c(p)\gamma^+ f_c(x,p)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}p$, la borne obtenue dépend de c (sauf si $h=0$). D'autres estimations peuvent être obtenues par la conservation de la quantité de mouvement. On impose une hypothèse géométrique sur la frontière $\partial\Omega$: on suppose que $\partial\Omega$ est strictement étoilée par rapport à un point $x_0\in\Omega$, i.e., $\exists r>0$ tel que $n(x)\cdot(x-x_0)\geqslant r$, $\forall x\in\partial\Omega$. Après translation on peut supposer que $x_0 = 0\in\Omega$ et puisque Ω est borné, il existe $0<r\leqslant R$ tels que $r\leqslant(n(x)\cdot x)\leqslant |x|\leqslant R$, $\forall x\in\partial\Omega$. En utilisant la formulation faible de (6) avec la fonction test $\varphi(x,p) = p\cdot x$ on en déduit :

$$\int_{\Sigma}\big(v_c(p)\cdot n(x)\big)(p\cdot x)\gamma f_c\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}p = \int_\Omega\int_{\mathbb{R}^3_p}\big(v_c(p)\cdot p\big)f_c\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}p + \int_\Omega(\rho_c E_c + j_c\wedge B_c)\cdot x\,\mathrm{d}x. \tag{11}$$

En tenant compte des équations de Maxwell on vérifie que :

$$\rho_c E_c + j_c\wedge B_c = \varepsilon_0(E_c\operatorname{div}E_c - E_c\wedge\operatorname{rot}E_c) + \varepsilon_0 c^2(B_c\operatorname{div}B_c - B_c\wedge\operatorname{rot}B_c),$$

et par conséquent, en utilisant l'identité $u_i \operatorname{div} u - (u \wedge \operatorname{rot} u)_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}|u|^2$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, et en décomposant $(E_c, B_c) = ((n \cdot E_c)n - n \wedge (n \wedge E_c), (n \cdot B_c)n - n \wedge (n \wedge B_c))$ on déduit après intégration par parties :

$$\int_{\Omega} (\rho_c E_c + j_c \wedge B_c) \cdot x \,\mathrm{d}x = -\varepsilon_0 \int_{\partial\Omega} \bigl\{(n \cdot E_c)\bigl(n \wedge (n \wedge E_c)\bigr) + c^2 (n \cdot B_c)\bigl(n \wedge (n \wedge B_c)\bigr)\bigr\} \cdot x \,\mathrm{d}\sigma$$
$$+ \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\partial\Omega} \bigl\{(n \cdot E_c)^2 + c^2 (n \cdot B_c)^2\bigr\}(n \cdot x)\,\mathrm{d}\sigma - \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\partial\Omega} \bigl\{|n \wedge E_c|^2 + c^2 |n \wedge B_c|^2\bigr\}(n \cdot x)\,\mathrm{d}\sigma$$
$$+ \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\Omega} \bigl\{|E_c|^2 + c^2 |B_c|^2\bigr\}\,\mathrm{d}x. \tag{12}$$

Le premier terme de (11) peut s'estimer en utilisant (4), (5) et l'inégalité $|p| \leqslant C(m) \cdot (1 + e_c(p))$, $\forall p \in \mathbb{R}^3_p$, $\forall c \geqslant 1$:

$$\left| \int_{\Sigma} \bigl(v_c(p) \cdot n(x)\bigr)(p \cdot x) \gamma f_c(x,p)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}p \right| \leqslant R \cdot C(m) \int_{\Sigma} \bigl|\bigl(v_c(p) \cdot n(x)\bigr)\bigr|\bigl(1 + e_c(p)\bigr)\gamma f_c(x,p)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}p$$
$$\leqslant R \cdot C(m)\left(2M^- + 2K^- + \frac{\varepsilon_0 c}{2} H\right). \tag{13}$$

En combinant (11)–(13) et en observant que $e_c(p) \leqslant (v_c(p) \cdot p)$, $\forall p \in \mathbb{R}^3_p$, on obtient immédiatement une borne de l'énergie totale ainsi que des traces du champ électromagnétique :

$$\int_{\Omega}\int_{\mathbb{R}^3_p} e_c(p) f_c \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}p + \varepsilon_0 \int_{\Omega} \bigl\{|E_c|^2 + c^2|B_c|^2\bigr\}\,\mathrm{d}x + \int_{\Sigma^+} \bigl(v_c(p) \cdot n(x)\bigr)\bigl(1 + e_c(p)\bigr)\gamma^+ f_c \,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}p$$
$$+ \varepsilon_0 \int_{\partial\Omega} \bigl\{(n \cdot E_c)^2 + c^2 (n \cdot B_c)^2\bigr\}\,\mathrm{d}\sigma + \varepsilon_0 \int_{\partial\Omega} \bigl\{|n \wedge E_c|^2 + c^2 |n \wedge B_c|^2\bigr\}\,\mathrm{d}\sigma$$
$$\leqslant C(m, \varepsilon_0, \Omega, c) \cdot (M^- + K^- + H). \tag{14}$$

D'autre part notons que la seule dépendence de $C(m, \varepsilon_0, \Omega, c)$ par rapport à c vient de (13) et par conséquent l'estimation (14) sera uniforme par rapport à c dès qu'on aura montré une estimation uniforme par rapport à c de K_c^+.

3. Estimation uniforme par rapport à c de K_c^+

Dans la suite nous allons utiliser le résultat :

Lemme 3.1. *On suppose que $\Omega \subset \mathbb{R}^3_x$ est un ouvert borné, régulier et simplement connexe. Soit $E \in L^2(\Omega)^3$ vérifiant* $\operatorname{rot} E = 0$ *en distributions sur $\mathcal{D}(\Omega)$ et de trace tangentielle $n \wedge E \in L^2(\partial\Omega)^3$. Alors il existe une fonction $\Phi \in H^1(\Omega)$ telle que $E(x) = -\nabla_x \Phi$, $x \in \Omega$, $\gamma\Phi \in H^1(\partial\Omega)$ et $\|\gamma\Phi\|_{H^1(\partial\Omega)} \leqslant C(\Omega) \cdot \|n \wedge E\|_{L^2(\partial\Omega)^3}$.*

En appliquant la formulation faible du problème de Vlasov avec la fonction test $e_c(p) + q \cdot \Phi(x)$, nous en déduisons :

$$\int_{\Sigma^+} \big(v_c(p)\cdot n(x)\big) e_c(p)\gamma^+ f_c(x,p)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}p = -\int_{\Sigma^-} \big(v_c(p)\cdot n(x)\big) e_c(p) g(x,p)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}p - q\cdot \int_{\Sigma} \big(v_c(p)\cdot n(x)\big)\gamma\Phi(x)\gamma f_c(x,p)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}p. \tag{15}$$

En utilisant des inégalités classiques d'interpolation nous obtenons :

$$\begin{aligned}\Big\| \int_{\mathbb{R}^3_p} \big|\big(v_c(p)\cdot n(x)\big)\big|\gamma f_c(\cdot,p)\,\mathrm{d}p\Big\|_{L^{5/4}(\partial\Omega)} &\leqslant C(m)\|g\|^{1/5}_{L^\infty(\Sigma^-)}\bigg(\int_{\Sigma}\big|\big(v_c(p)\cdot n(x)\big)\big|\big(1+e_c(p)\big)\gamma f_c\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}p\bigg)^{4/5}\\ &\leqslant C(m)\cdot\|g\|^{1/5}_{L^\infty(\Sigma^-)}(2M_c^- + K_c^- + K_c^+)^{4/5}.\end{aligned} \tag{16}$$

En tenant compte du fait que $\gamma\Phi \in H^1(\partial\Omega)$ et en utilisant des inégalités de Sobolev on peut estimer le dernier terme de (15) :

$$\begin{aligned}&\bigg|\int_{\Sigma}\big(v_c(p)\cdot n(x)\big)\gamma\Phi(x)\gamma f_c(x,p)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}p\bigg|\\ &\quad=\bigg|\int_{\partial\Omega}\gamma\Phi(x)\int_{\mathbb{R}^3_p}\big(v_c(p)\cdot n(x)\big)\gamma f_c(x,p)\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}\sigma\bigg| \leqslant \|\gamma\Phi\|_{L^5(\partial\Omega)}\Big\|\int_{\mathbb{R}^3_p}\big|\big(v_c(p)\cdot n(\cdot)\big)\big|\gamma f_c(\cdot,p)\,\mathrm{d}p\Big\|_{L^{5/4}(\partial\Omega)}\\ &\quad\leqslant C(m,\Omega)\|\gamma\Phi\|_{H^1(\partial\Omega)}\cdot\|g\|^{1/5}_{L^\infty(\Sigma^-)}(2M_c^- + K_c^- + K_c^+)^{4/5}.\end{aligned} \tag{17}$$

En utilisant (15), (17) et le Lemme 3.1 on trouve immédiatement une borne pour K_c^+ qui ne dépend pas de c. Par conséquent l'estimation (14) sera uniforme par rapport à c. En particulier nous avons :

$$\|B_c\|_{L^2(\Omega)^3} + \|n\wedge B_c\|_{L^2(\partial\Omega)^3} + \big\|(n\cdot B_c)\big\|_{L^2(\partial\Omega)} = \mathcal{O}\bigg(\frac{1}{c}\bigg).$$

4. Convergence vers une solution faible du système de Vlasov–Poisson stationnaire

En utilisant les équations de Maxwell stationnaires et l'équation de continuité $\operatorname{div} j = 0$ on montre tout d'abord que les traces tangentielles du champ électromagnétique satisfont les équations suivantes au sens des distributions :

$$c^2\operatorname{div}_\tau(n\wedge B_c) = -\frac{(n\cdot j_c)}{\varepsilon_0},\quad \Big(\text{multiplier } -c^2\operatorname{rot} B_c = -\frac{j_c}{\varepsilon_0} \text{ par } \nabla_x\varphi,\ \varphi\in C^1(\overline{\Omega})\Big), \tag{18}$$

et :

$$\operatorname{div}_\tau(n\wedge E_c) = 0,\quad \big(\text{multiplier } \operatorname{rot} E_c = 0 \text{ par } \nabla_x\varphi,\ \varphi\in C^1(\overline{\Omega})\big). \tag{19}$$

Ici div_τ représente la divergence au sens des distributions dans $\mathcal{D}(\partial\Omega)$. On peut montrer le résultat suivant :

Théorème 4.1. *On suppose que $\Omega\subset\mathbb{R}^3_x$ est un ouvert borné, régulier, de frontière strictement étoilée. On considère g et h des fonctions vérifiant $0\leqslant g\in L^\infty(\Sigma^-)$, $M^- + K^- := \int_{\Sigma^-}(v(p)\cdot n(x))(1+e(p))g(x,p)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}p < +\infty$, $(n\cdot h)|_{\partial\Omega} = 0$, $H = \int_{\partial\Omega}|h(x)|^2\,\mathrm{d}\sigma < +\infty$ et $(c_r)_r$ une suite divergente vers $+\infty$. On note par (f_r, E_r, B_r) les solutions du système de Vlasov–Maxwell stationnaire avec $c = c_r$ construites à la Section 2. Alors il existe une sous-suite $(c_{r_k})_k$ telle que $f_{r_k}\rightharpoonup f$ faiblement $\star$ dans $L^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^3_p)$, $E_{r_k}\rightharpoonup E$ faiblement dans $L^2(\Omega)^3$, où (f, E) est une solution faible du système de Vlasov–Poisson classique stationnaire :*

$$
\begin{aligned}
&v(p)\cdot\nabla_x f + q\cdot E(x)\cdot\nabla_p f = 0, \quad (x,p)\in\Omega\times\mathbb{R}^3_p,\\
&\operatorname{rot} E = 0, \quad \operatorname{div} E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad x\in\Omega,\\
&f(x,p) = g(x,p), \quad (x,p)\in\Sigma^-, \quad n\wedge E(x) = n\wedge\nabla_\tau h_2, \quad x\in\partial\Omega,
\end{aligned}
\tag{20}
$$

où $h = \nabla_\tau h_1 + n\wedge\nabla_\tau h_2$, $h_1, h_2 \in H^1(\partial\Omega)$ est la décomposition orthogonale dans $L^2(\partial\Omega)^3$ de h en parties irrotationnelle et rotationnelle et ∇_τ est le gradient tangentiel au long de $\partial\Omega$. De plus nous avons :

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega\int_{\mathbb{R}^3_p}\big(1+e(p)\big)f(x,p)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}p + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_\Omega \big|E(x)\big|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\Sigma^+}\big(v(p)\cdot n(x)\big)\big(1+e(p)\big)\gamma^+ f(x,p)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}p\\
&\quad + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\partial\Omega}\big\{|n\wedge E|^2 + (n\cdot E)^2\big\}\,\mathrm{d}\sigma \leqslant C(m,\varepsilon_0,\Omega,M^-,K^-,H).
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Identifions seulement la trace tangentielle du champ limite $E = \lim_{k\to+\infty} E_{r_k}$ faiblement dans $L^2(\Omega)^3$. On note $n\wedge E = \lim_{k\to+\infty}(n\wedge E_{r_k})$ faiblement dans $L^2(\partial\Omega)^3$. Par l'Éq. (19) nous avons $\operatorname{div}_\tau(n\wedge E) = 0$ et comme $\operatorname{div}_\tau(n\wedge\nabla_\tau h_2) = 0$ on en déduit également que $\operatorname{div}_\tau(n\wedge E - n\wedge\nabla_\tau h_2) = 0$ (or $\int_{\partial\Omega}(n\wedge E - n\wedge\nabla_\tau h_2)\cdot\nabla_\tau\varphi_1\,\mathrm{d}\sigma = 0$, $\forall\varphi_1\in C^1(\partial\Omega)$). L'Éq. (18) et la deuxième condition aux limites de (8) impliquent :

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega}(n\wedge\nabla_\tau h_2 - n\wedge E_k)\cdot(n\wedge\nabla_\tau\varphi_2)\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\partial\Omega}\big(c_k\cdot n\wedge(n\wedge B_k)\big)\cdot(n\wedge\nabla_\tau\varphi_2)\,\mathrm{d}\sigma\\
&\quad = \int_{\partial\Omega} c_k(n\wedge B_k)\cdot\nabla_\tau\varphi_2\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\varepsilon_0 c_k}\int_{\partial\Omega}(n\cdot j_k)\varphi_2\,\mathrm{d}\sigma, \quad \forall k\geqslant 1,\ \forall\varphi_2\in C^1(\partial\Omega),
\end{aligned}
$$

et après passage à la limite pour $k\to+\infty$ on en déduit que $\int_{\partial\Omega}(n\wedge\nabla_\tau h_2 - n\wedge E)\cdot(n\wedge\nabla_\tau\varphi_2)\,\mathrm{d}\sigma = 0$, $\forall\varphi_2\in C^1(\partial\Omega)$. Finalement, comme tout champ tangent $\varphi\in L^2(\partial\Omega)^3$, $(n\cdot\varphi)|_{\partial\Omega} = 0$ se décompose en $\varphi = \nabla_\tau\varphi_1 + n\wedge\nabla_\tau\varphi_2$, $\varphi_1,\varphi_2\in H^1(\partial\Omega)$, on obtient que $n\wedge E = n\wedge\nabla_\tau h_2$.

Les arguments précédents s'adaptent facilement pour traiter des modèles à plusieurs espèces de particules chargées ou des conditions aux limites du type :

$$
\gamma^- f(x,p) = g(x,p) + a(x,p)\cdot\gamma^+ f\big(x, p - 2(p\cdot n)n\big), \quad (x,p)\in\Sigma^-,
$$

avec $0\leqslant a(x,p)\leqslant a_0 < 1$, $\forall(x,p)\in\Sigma^-$. Signalons qu'il est possible d'obtenir un résultat du même type pour des solutions faibles T-périodiques en temps. Nous renvoyons à [6] pour les détails de démonstration.

Références

[1] A. Arseneev, Global existence of a weak solution of the Vlasov system of equations, Comput. Math. Math. Phys. 15 (1975) 131–143.

[2] N. Ben Abdallah, Weak solutions of the initial-boundary value problem for the Vlasov–Poisson system, Math. Methods Appl. Sci. 17 (6) (1994) 451–476.

[3] M. Bostan, Solutions périodiques en temps des équations de Vlasov–Maxwell, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 451–456.

[4] M. Bostan, Boundary value problem for the N dimensional time periodic Vlasov–Poisson system, soumis.

[5] M. Bostan, Boundary value problem for the three dimensional time periodic Vlasov–Maxwell system, soumis.

[6] M. Bostan, Asymptotic behavior of time periodic weak solutions for the relativistic Vlasov–Maxwell system. Convergence toward time periodic weak solutions for the classical Vlasov–Poisson system, en préparation.

[7] P. Degond, Local existence of solutions of the Vlasov–Maxwell equations and convergence to the Vlasov–Poisson equations for infinite light velocity, Math. Methods Appl. Sci. 8 (1986) 533–558.

[8] R.J. Diperna, P.-L. Lions, Global weak solutions of the Vlasov–Maxwell system, Comm. Pure Appl. Math. XVII (1989) 729–757.

[9] C. Greengard, P.-A. Raviart, A boundary value problem for the stationary Vlasov–Poisson equations: the plane diode, Comm. Pure Appl. Math. XLIII (1990) 473–507.

[10] Y. Guo, Global weak solutions of the Vlasov–Maxwell system with boundary conditions, Commun. Math. Phys. 154 (1993) 245–263.

[11] F. Poupaud, Boundary value problems for the stationary Vlasov–Maxwell system, Forum Math. 4 (1992) 499–527.