

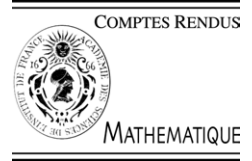


ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com



C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 611–614



<http://france.elsevier.com/direct/CRASSI/>

Probabilités

Schémas d'approximation associés à une équation différentielle dirigée par une fonction höldérienne ; cas du mouvement brownien fractionnaire

Ivan Nourdin

Université Henri-Poincaré, institut de mathématiques Élie-Cartan, B.P. 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy cedex, France

Reçu le 5 juillet 2004 ; accepté après révision le 8 mars 2005

Disponible sur Internet le 18 avril 2005

Présenté par Marc Yor

Résumé

Nous étudions les schémas d'approximation classiques (Euler, Milshtein) associés à une équation différentielle du type $dx_t = \sigma(x_t) dg_t + b(x_t) dt$, $x_t \in \mathbb{R}$, où g est une fonction supposée höldérienne d'ordre α quelconque dans $(0, 1]$. Quand $g = B^H$ est la trajectoire d'un mouvement brownien fractionnaire, nous tirons parti de propriétés probabilistes pour affiner les résultats. *Pour citer cet article : I. Nourdin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Approximation schemes associated to a differential equation governed by a Hölderian function; the case of fractional Brownian movement. We study here classical approximation schemes (Euler, Milshtein) associated with a differential equation of the type $dx_t = \sigma(x_t) dg_t + b(x_t) dt$, $x_t \in \mathbb{R}$, where g is a function, supposed Hölderian of order α somewhere in $(0, 1]$. When $g = B^H$ is the trajectory of fractional Brownian movement, we deduce probability properties to refine the results. *To cite this article : I. Nourdin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

1. Cas d'une fonction g quelconque

Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction höldérienne d'indice $\alpha \in (0, 1]$. Quand $\alpha \leq 1/2$, on ne peut pas utiliser une intégrale de type Stieltjes (considérée par Young [10]) pour intégrer contre g . L'intégrale de Newton–Côtes définie dans [7] permettrait de traiter le cas de tous les indices α mais le plus simple pour cette Note est d'introduire la :

Définition 1.1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^{1,1}$ et $a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée. On pose, pour $t \in [0, 1]$,

Adresse e-mail : nourdin@iecn.u-nancy.fr (I. Nourdin).

$$\int_0^t \partial_1 f(g_s, a_s) \circ dg_s := f(g_t, a_t) - f(g_0, a_0) - \int_0^t \partial_2 f(g_s, a_s) da_s, \tag{1}$$

l’intégrale contre a étant au sens de Stieltjes.

Soit x_0 un réel et $\sigma, b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions régulières. On peut maintenant donner un sens à l’équation formelle

$$dx_t = \sigma(x_t) dg_t + b(x_t) dt, \quad t \in [0, 1], \quad x(0) = x_0. \tag{2}$$

Définition 1.2. Une fonction $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est solution de (2) si : (i) il existe $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^{1,1}$ et $a: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ à variation bornée tels que, pour tout $t \in [0, 1]$, $x_t = f(g_t, a_t)$; (ii) pour tout $t \in [0, 1]$, on a $x_t = x_0 + \int_0^t \sigma(x_s) \circ dg_s + \int_0^t b(x_s) ds$.

Quand σ est de classe C^2 avec ses dérivées première et seconde bornées et quand b est lipschitzienne, l’existence d’une solution de (2) est assurée par la méthode de Doss [4] et Sussmann [8] : posons $x_t = u(g_t, y_t)$ où $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est (l’unique) solution de $\partial_1 u = \sigma(u)$ avec $u(0, z) = z$ pour tout $z \in \mathbb{R}$ et où $y: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est (l’unique) solution de $\frac{dy_t}{dt} = [\partial_2 u(g_t, y_t)]^{-1} b(u(g_t, y_t))$ avec $y_0 = x_0$ (remarquons que $\partial_2 u$ ne s’annule jamais car c’est une exponentielle : voir [6] p. 296). On a noté ∂_1 (resp. ∂_2) la dérivée par rapport à la première (resp. deuxième) variable. On voit immédiatement, en utilisant (1), que x ainsi construite est solution de (2). Pour l’unicité, nous renvoyons à [7], Théorème 4.3.3 p. 82.

Dans la suite, nous considérerons comme solution de (2) la fonction x donnée par la méthode de Doss et Sussmann. Comme x n’est en général pas explicite, il est intéressant de définir des schémas d’approximation de cette solution.

Intéressons-nous tout d’abord au schéma le plus simple associé à (2), à savoir le schéma d’Euler :

$$\hat{x}_0^{(n)} = x_0 \quad \text{et} \quad \hat{x}_t^{(n)} = \hat{x}_{k/n}^{(n)} + \sigma(\hat{x}_{k/n}^{(n)})(g_t - g_{k/n}) + b(\hat{x}_{k/n}^{(n)})(t - k/n), \quad t \in [k/n, (k+1)/n]. \tag{3}$$

Théorème 1.3. Supposons que σ soit de classe C^2 avec ses deux dérivées bornées et que b soit lipschitzienne. Quand $n \rightarrow +\infty$, on a $\|x - \hat{x}^{(n)}\|_{L^\infty([0,1])} = O(1/n^{2\alpha-1})$.

Remarquons que ce théorème n’a un intérêt que si $\alpha > 1/2$. Lorsque $\alpha \leq 1/2$, nous considérons un schéma de type Milshtein d’ordre $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} \check{x}_0^{(n)} = x_0 \\ \check{x}_t^{(n)} = \check{x}_{k/n}^{(n)} + \sum_{j=1}^{2m} \frac{1}{j!} P_j(\sigma, \sigma', \dots, \sigma^{(j-1)})(\check{x}_{k/n}^{(n)})(g_t - g_{k/n})^j + b(\check{x}_{k/n}^{(n)})(t - k/n), \\ t \in [k/n, (k+1)/n]. \end{cases} \tag{4}$$

Les P_j sont les fonctions polynomiales données par l’identité formelle suivante :

$$g' = f \circ g \Rightarrow \forall j \in \mathbb{N}^*, \quad g^{(j)} = P_j(f, f', \dots, f^{(j-1)}) \circ g \quad \text{avec} \quad P_j \in \mathbb{R}[X_0, \dots, X_{j-1}]. \tag{5}$$

Par exemple, nous avons :

$$g' = f \circ g \Rightarrow P_1 = X_0 \in \mathbb{R}[X_0] \quad \text{et} \quad g'' = g' \times (f' \circ g) = (ff') \circ g \Rightarrow P_2 = X_0 X_1 \in \mathbb{R}[X_0, X_1], \text{ etc.}$$

Théorème 1.4. Supposons que σ soit de classe C^{2m+1} avec toutes ses dérivées bornées et que b soit lipschitzienne. Quand $n \rightarrow +\infty$, on a $\|x - \check{x}^{(n)}\|_{L^\infty([0,1])} = O(1/n^\beta)$ avec $\beta = \inf\{\alpha, (2m+1)\alpha - 1\}$.

Remarque 1. (i) En pratique, on choisit l’entier m le plus petit possible tel que $(2m+1)\alpha - 1 \geq \alpha$ pour obtenir la vitesse optimale $\beta = \alpha$.

(ii) Le cas $m = 1$ (schéma de Milshstein standard) est prouvé dans [9]. Je remercie le rapporteur de cette Note de m’ avoir signalé ce travail.

Idées de la preuve du Théorème 1.4. On s’ inspire de la démonstration du Théorème 2.8 de [9]. Posons $\check{y}_t^{(n)} = v(g_t, \check{x}_t^{(n)})$ où v est l’ inverse à droite de u , c’ est-à-dire vérifie $u(x, v(x, y)) = y$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Grâce à l’ hypothèse de régularité sur σ , on peut effectuer le développement de Taylor de $\check{y}_{(k+1)/n}^{(n)} - \check{y}_{k/n}^{(n)}$ à l’ ordre $2m + 1$, autour de $(g_{k/n}, \check{x}_{k/n}^{(n)})$. À l’ aide de relations algébriques du type de celles contenues dans les Lemmes 2.1 et 2.2 de [9], tous les termes dans le développement de Taylor s’ annulent et il reste $\check{y}_{(k+1)/n}^{(n)} - \check{y}_{k/n}^{(n)} = O(1/n^{(2m+1)\alpha})$. En utilisant la Définition 4 d’ une part et en faisant le développement de Taylor d’ ordre $2m + 1$ de $\check{x}_{(k+1)/n}^{(n)} - \check{x}_{k/n}^{(n)}$ en utilisant $\check{x}_t^{(n)} = u(g_t, \check{y}_t^{(n)})$ d’ autre part, nous obtenons $\check{y}_{(k+1)/n}^{(n)} - \check{y}_{k/n}^{(n)} = e^{-\int_0^{g_{k/n}} \sigma'(u(s, \check{y}_{k/n}^{(n)})) ds} b \circ u(g_{k/n}, \check{y}_{k/n}^{(n)}) \frac{1}{n} + O(1/n^{(2m+1)\alpha})$. En utilisant le contrôle (2.3;1) dans [9], il vient $\sup_k |\check{y}_{k/n}^{(n)} - y_{k/n}| = O(1/n^\beta)$ puis, comme u est lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable : $\sup_k |\check{x}_{k/n}^{(n)} - x_{k/n}| = O(1/n^\beta)$. \square

2. Cas où g est la trajectoire d’ un mouvement brownien fractionnaire

De nombreuses applications récentes s’ appuient sur une modélisation faisant intervenir des équations différentielles dirigées par un mouvement brownien fractionnaire (en abrégé, mbf) : voir par exemple [2,3] et leurs références. Nous allons étudier le cas où, dans (2), g est la trajectoire d’ un mbf B^H d’ indice H quelconque dans $(0, 1)$:

$$dX_t = \sigma(X_t) dB_t^H + b(X_t) dt, \quad t \in [0, 1], \quad \text{et} \quad X_0 = x_0. \tag{6}$$

Tous les résultat de la théorie générale précédente s’ appliquent car il est classique que les trajectoires de B^H sont p.s. α -höldériennes, pour tout $0 < \alpha < H$. Toutefois, dans ce cadre particulier, on peut se poser deux questions naturelles. Premièrement, comment simuler les incréments du mouvement brownien fractionnaire ? Un moyen rapide et efficace est d’ utiliser la procédure Matlab proposée par Coeurjolly [1] (voir un exemple d’ application dans [7], pages 17–18). Deuxièmement, quel est le domaine de convergence (par rapport à H) du schéma de Milshstein d’ ordre m associé à (6) ? Un élément de réponse est contenu dans la :

Proposition 2.1. *Sous les hypothèses du Théorème 1.4 pour σ et b , le schéma de Milshstein d’ ordre m associé à (6) converge (resp. ne converge pas) en probabilité vers la solution donnée par la méthode de Doss et Sussmann quand $H > 1/(2m + 1)$ (resp. quand $H \leq 1/(2m + 2)$).*

Quand $H \in (1/(2m + 2), 1/(2m + 1)]$, on ne sait a priori rien dire sur la convergence du schéma. Toutefois, j’ ai de bonnes raisons de penser que le schéma converge bien que cela semble *a priori* difficile à démontrer. Je renvoie le lecteur intéressé à un article à venir.

Preuve de la Proposition 2.1. La convergence du schéma quand $H > 1/(2m + 1)$ est une application directe du Théorème 1.4. Supposons maintenant $H \leq 1/(2m + 2)$ et choisissons $\sigma(x) = x$, $b(x) = 0$ et $x_0 = 1$ dans (4). Un calcul simple montre que

$$\check{X}_1^{(n)} = \prod_{k=0}^{n-1} \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{2m} \frac{1}{j!} (B_{(k+1)/n}^H - B_{k/n}^H)^j \right\}.$$

Comme on a, pour u proche de 0 :

$$1 + u + \frac{u^2}{2!} + \dots + \frac{u^{2m}}{(2m)!} = \exp\left(u - \frac{u^{2m+1}}{(2m+1)!} + \frac{2m+1}{(2m+2)!} u^{2m+2} + o(u^{2m+2})\right),$$

on en déduit que

$$\check{X}_1^{(n)} = \exp\left(B_1^H - \frac{1}{(2m+1)!} \sum_{k=0}^{n-1} (B_{(k+1)/n}^H - B_{k/n}^H)^{2m+1} + \frac{2m+1}{(2m+2)!} \sum_{k=0}^{n-1} (B_{(k+1)/n}^H - B_{k/n}^H)^{2m+2}\right) + o\left(\sum_{k=0}^{n-1} (B_{(k+1)/n}^H - B_{k/n}^H)^{2m+2}\right).$$

À l'aide d'une régression linéaire, on peut montrer que, dans L^2 et donc en probabilité,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (B_{(k+1)/n}^H - B_{k/n}^H)^{2m+2} \rightarrow \begin{cases} \frac{(2m+2)!}{2^{m+1}(m+1)!} & \text{si } H = \frac{1}{2m+2}, \\ +\infty & \text{si } H < \frac{1}{2m+2} \end{cases}$$

et que $\sum_{k=0}^{n-1} (B_{(k+1)/n}^H - B_{k/n}^H)^{2m+1} \rightarrow 0$ quand $H > 1/(4m+2)$. Quand $H \leq 1/(4m+2)$, en utilisant la même technique que [5], Section 5, preuve de 2.b), on peut montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} (B_{(k+1)/n}^H - B_{k/n}^H)^{2m+1}$ ne converge pas en probabilité. Donc, en probabilité,

$$\check{X}_1^{(n)} \rightarrow \begin{cases} \exp\left(B_1^H + \frac{2m+1}{2^{m+1}(m+1)!}\right) \neq \exp(B_1^H) & \text{si } H = \frac{1}{2m+2}, \\ +\infty & \text{si } \frac{1}{4m+2} < H < \frac{1}{2m+2}, \\ \text{ne converge pas} & \text{si } H \leq \frac{1}{4m+2}. \end{cases}$$

Ainsi, comme la solution donnée par la méthode de Doss et Sussmann est $X_t = \exp(B_t^H)$, le schéma ne converge pas vers elle si $H \leq 1/(2m+2)$. Ceci termine la démonstration de la proposition. \square

Remerciements

Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers Pierre Vallois. Ses suggestions et remarques m'ont apporté une aide précieuse.

Références

- [1] J.-F. Coeurjolly, Simulation and identification of the fractional Brownian motion: a bibliographical and comparative study, *J. Statist. Software* 5 (7) (2000).
- [2] F. Comte, E. Renault, Long memory in continuous time volatility models, *Math. Finance* 8 (1998) 291–323.
- [3] N. Cutland, P. Kopp, W. Willinger, Stock price returns and the Joseph effect: a fractional version of the Black–Schole model, in: *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications*, in: *Progr. Probab.*, vol. 36, 1995, pp. 327–351.
- [4] H. Doss, Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires, *Ann. Inst. H. Poincaré* 13 (1977) 99–125.
- [5] M. Gradinaru, I. Nourdin, F. Russo, P. Vallois, m -order integrals and generalized Itô's formula; the case of a fractional Brownian motion with any Hurst index, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* (2004), à paraître.
- [6] I. Karatzas, S. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, second ed., Springer-Verlag, 1991.
- [7] I. Nourdin, Calcul stochastique généralisé et applications au mouvement brownien fractionnaire; Estimation non paramétrique de la volatilité et test d'adéquation, Thèse de doctorat, Université Nancy I, 2004, disponible en ligne sur <http://www.inourdin.fr.st>.
- [8] H.J. Sussmann, An interpretation of stochastic differential equations as ordinary differential equations which depend on a sample point, *Bull. Amer. Math. Soc.* 83 (1977) 296–298.
- [9] D. Talay, Résolution trajectorielle et analyse numérique des équations différentielles stochastiques, *Stochastics* 9 (1983) 275–306.
- [10] L.C. Young, An inequality of the Hölder type connected with Stieltjes integration, *Acta Math.* 67 (1936) 251–282.