



Topologie

# Comportement à l'infini du graphe gordien des nœuds

Julien Marché

*Institut de mathématiques de Jussieu, équipe « topologie et géométries algébriques », case 7012, université Paris VII,  
75251 Paris cedex 05, France*

Reçu le 15 janvier 2005 ; accepté le 21 janvier 2005

Présenté par Étienne Ghys

---

## Résumé

On étudie le graphe gordien des nœuds dans  $\mathbb{R}^3$  : deux nœuds sont adjacents si on passe de l'un à l'autre en changeant un croisement. On prouve que ce graphe contient isométriquement un arbre infini dénombrable de valence infinie et que le complémentaire de tout sous-ensemble fini est connexe. *Pour citer cet article : J. Marché, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**About the Gordian graph at infinity.** We study the Gordian graph of all knots in  $\mathbb{R}^3$ : two knots are adjacent if they differ by a single crossing change. We prove that this graph contains isometrically an infinite countable tree with infinite valency, and that the complement of any finite subset is connected. *To cite this article : J. Marché, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

---

## Abridged English version

Let  $\mathcal{K}$  be the set of isotopy classes of oriented knots in  $\mathbb{R}^3$ . The Gordian graph is the graph whose vertices are the elements of  $\mathcal{K}$  and whose edges are made of couples of knots which differ by a single crossing change. Some of its local structure was studied in [4] and Ghys proposed instead to study its structure at infinity [3]. In that spirit, Gambaudo and him showed that the graph  $\mathcal{K}$  contains subgraphs quasi-isometric to  $\mathbb{Z}^n$  for all integers  $n$  (see [2]). Answering one of his questions, we show the following results:

### Theoreme 0.1.

- Let  $T$  be an infinite countable tree with infinite valency. There is a map  $\phi : T \rightarrow \mathcal{K}$  such that for all  $x, y \in T$ , we have  $d_{\mathcal{K}}(\phi(x), \phi(y)) = 2d_T(x, y)$ , where  $d_{\mathcal{K}}$  and  $d_T$  are the distances on  $\mathcal{K}$  and  $T$  respectively.

---

Adresse e-mail : [marche@math.jussieu.fr](mailto:marche@math.jussieu.fr) (J. Marché).

– The complement of any finite subset of  $\mathcal{K}$  is connected.

The proof is constructive and uses the two following facts:

– There is an invariant of  $K$  called *signature*  $\sigma_K : S^1 \rightarrow \mathbb{Z}$  such that for all  $z \in S^1$  and  $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$  we have the following inequality:

$$|\sigma_{K_1}(z) - \sigma_{K_2}(z)| \leq 2d_{\mathcal{K}}(K_1, K_2).$$

– For every polynomial  $\Delta \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  such that  $\Delta(t^{-1}) = \Delta(t)$  and  $\Delta(1) = 1$ , there is a Gordian knot  $K_{\Delta}$  such that its signature is the function  $z \mapsto 1 - \text{Sign}(\Delta(z))$ . Here, we define  $\text{Sign}(x) = 1$  if  $x > 0$ ,  $\text{Sign}(x) = -1$  if  $x < 0$  and  $\text{Sign}(0) = 0$ .

Let us explain briefly how to construct an embedding of a trivalent tree in  $\mathcal{K}$ . Consider an odd number  $p$  and the polynomial  $D_p = t^{-(p-1)/2}(t^p + 1)/(t + 1)$ . Thanks to the lemma, we can find a Gordian knot  $K_p$  whose signature function is the map  $\sigma_p : \theta \mapsto 1 - \text{Sign}(\cos(p\theta)/\cos(\theta))$ .

By choosing  $p_n = 3 \cdot 5 \cdots (2n + 1)$ , we construct a family of knots  $K_{p_n}$  having the following property: for any finite sequence  $a_1, \dots, a_n$  of elements in  $\{0, 2\}$ , we can find a point  $z \in S^1$  such that  $\sigma_{K_{p_k}}(z) = a_k$  for all  $k \leq n$  (see Fig. 1). These knots will be our building blocks for the construction of the embedding.

Then, we consider an infinite tree  $T$  with an extra vertex in the middle of some edge called *root* and we index the edges of  $T$  with the integers. Any point  $x$  of  $T$  distinct from the root has a unique neighbour lying in the geodesic from  $x$  to the root. We call this vertex the *father* of  $x$ .

We explain now how to construct a map  $\phi$  from  $T$  to  $\mathcal{K}$ . We set the image of the root by  $\phi$  to be the trivial knot. Any point  $x$  distinct from the root has a father  $y$ , let  $k$  be the index of the edge  $[x, y]$ . We define  $\phi(x) = \phi(y) \# K_{p_{2k}} \# \overline{K_{p_{2k+1}}}$ , where  $\#$  is the connected sum and  $\overline{K}$  is the mirror image of  $K$ . This construction is represented in Fig. 2.

By construction, if  $y$  is the father of  $x$ , the knot  $\phi(x)$  is obtained from the knot  $\phi(y)$  by taking a connected sum with two Gordian knots. Hence, we have  $d_{\mathcal{K}}(\phi(x), \phi(y)) \leq 2$ . As this is true for all edges, we deduce the formula  $d_{\mathcal{K}}(\phi(x), \phi(y)) \leq 2d_T(x, y)$  for all  $x$  and  $y$  in  $T$ . By using the signature function, we have a lower bound for the Gordian distance. The choice of the building blocks  $K_{p_n}$  is such that for all  $x, y$  in  $T$ , we can find some  $z \in S^1$  such that  $|\sigma_{\phi(x)}(z) - \sigma_{\phi(y)}(z)| = 4d_T(x, y)$ . This implies the equality  $d_{\mathcal{K}}(\phi(x), \phi(y)) = 2d_T(x, y)$  for all  $x, y \in T$ .

## 1. Introduction

Soit  $\mathcal{K}$  l'ensemble des classes d'isotopie de nœuds orientés dans  $S^3$ . On considère le *graphe gordien* dont les sommets sont les éléments de  $\mathcal{K}$  et tel que deux nœuds sont reliés par une arête si on peut passer de l'un à l'autre en changeant un croisement. On notera  $U$  le nœud trivial et  $d_{\mathcal{K}}$  la distance induite sur  $\mathcal{K}$  par le graphe. On appelle gordien tout nœud  $L$  vérifiant  $d_{\mathcal{K}}(L, U) = 1$ .

Depuis que le graphe gordien a été introduit (voir [4]), peu de résultats ont été obtenus sur sa structure. On s'est essentiellement intéressé à la structure locale du graphe en montrant par exemple que chaque arête de  $\mathcal{K}$  fait partie d'un sous-graphe complet infini.

A contrario, Gambaudo et Ghys ont proposé de s'intéresser au comportement à l'infini du graphe, c'est-à-dire, à quasi-ométrie près. Dans cette optique, ils ont prouvé qu'on pouvait plonger le graphe  $\mathbb{Z}^n$  quasi-isométriquement dans  $\mathcal{K}$  pour toute valeur de  $n$  [2,3].

Répondant à une question d'É. Ghys, on prouve dans cet article que l'on peut plonger isométriquement un arbre infini dénombrable de valence infinie dans le graphe gordien. Avec les mêmes techniques, on prouve que le complémentaire de tout ensemble fini dans  $\mathcal{K}$  est connexe.

On rappelle qu’il existe un invariant de  $K$  appelé *signature*  $\sigma_K : S^1 \rightarrow \mathbb{Z}$ . Cet invariant vérifie pour tout  $z \in S^1$  et  $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$  l’inégalité suivante :

$$|\sigma_{K_1}(z) - \sigma_{K_2}(z)| \leq 2d_{\mathcal{K}}(K_1, K_2).$$

## 2. Plongement d’un arbre infini dans le graphe gordien

Soit  $T$  l’arbre trivalent infini dénombrable sur lequel on a ajouté un sommet sur une arête appelé *racine*. De cette manière, chaque sommet a deux *enfants* et tous les sommets ont un unique *parent* sauf la racine.

**Théorème 2.1.** *Il existe un plongement quasi-isométrique de  $T$  dans  $\mathcal{K}$ .*

**Remarque 1.** La même preuve permet de montrer que l’on peut plonger un arbre régulier de valence infinie. Ce plongement est en fait isométrique si on multiplie par 2 la distance de  $T$ .

Le reste de cette partie consiste à prouver cette proposition. La méthode consiste à construire ce plongement récursivement à partir du nœud trivial qui est associé à la racine. Chaque autre sommet sera obtenu en faisant la somme connexe de son parent avec deux nœuds gordiens de sorte que sa signature soit « assez compliquée ». Pour préciser ceci, on utilise le lemme suivant qui sera prouvé dans la troisième section.

**Lemme 2.2.** *Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

- Soit  $\Delta$  un polynôme normalisé, c’est-à-dire un polynôme  $\Delta \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  vérifiant  $\Delta(t^{-1}) = \Delta(t)$  et  $\Delta(1) = 1$ . Il existe alors un nœud gordien qui admette  $\Delta$  pour polynôme d’Alexander.
- La fonction signature d’un nœud gordien de polynôme d’Alexander normalisé  $\Delta$  est la fonction qui à tout nombre complexe  $z$  de module 1 associe  $1 - \text{Sign}(\Delta(z))$  ou la fonction opposée.

Considérons pour tout  $p$  impair le polynôme normalisé du nœud torique de paramètres  $(p, 2)$  défini par  $D_p(t) = t^{-(p-1)/2}(t^p + 1)/(t + 1)$ . Grâce au lemme on peut choisir un nœud  $K_p$  qui est gordien et a  $D_p$  pour polynôme d’Alexander ( $K_p$  n’est pas le nœud torique de paramètres  $(p, 2)$  car ce dernier n’est pas gordien). On suppose de plus que la signature de  $K_p$  est positive (sinon, on prend son image dans un miroir). Fig. 1 représente les endroits du cercle où la signature de  $K_p$  vaut 2 (elle vaut 0 sur le complémentaire et 1 aux bornes). Notons  $A_p$  ce sous-ensemble du cercle.

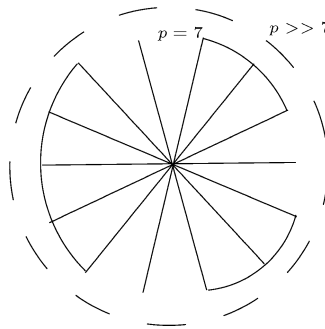


Fig. 1. Signature des nœuds  $K_p$ .

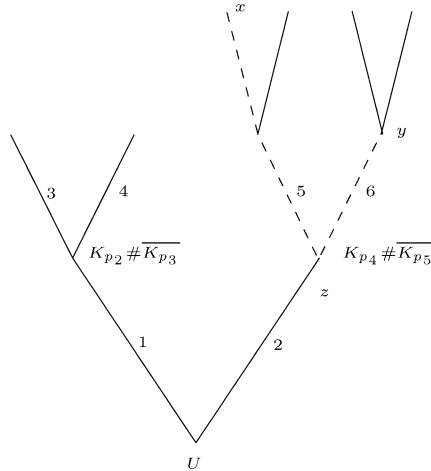


Fig. 2. Le plongement  $\phi$ .

**Lemme 2.3.** On peut trouver une suite strictement croissante de nombres impairs  $p_n$  telle que pour toute suite finie  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$  et  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k \in \{\pm 1\}$ , on ait :

$$A_{p_{i_1}}^{\epsilon_1} \cap \dots \cap A_{p_{i_k}}^{\epsilon_k} \neq \emptyset$$

où  $A_p^1 = A_p$  et  $A_p^{-1}$  est le complémentaire de  $A_p$ .

**Démonstration.** On construit cette suite récursivement. Prenons par exemple  $p_1 = 3$ . En choisissant  $p_2$  assez petit, on peut s’assurer que chaque composante connexe de  $A_{p_1}$  et  $A_{p_1}^{-1}$  intersecte à la fois  $A_{p_2}$  et  $A_{p_2}^{-1}$ . On continue cette construction à partir de  $p_2$ , ce qui prouve le lemme. On peut par exemple définir  $p_n$  par la formule  $p_n = (2n + 1)(2n - 1) \dots 3$  pour  $n \geq 1$ . □

On construit maintenant une application  $\phi : T \rightarrow \mathcal{K}$ . On numérote toutes les arêtes de  $T$ . Chaque sommet  $x$  de  $T$  différent de la racine est relié à son parent  $y$  par une arête numérotée  $n$ . Notons  $\#$  la somme connexe et  $\overline{K}$  l’image miroir d’un nœud  $K$ . On pose

$$\phi(x) = \phi(y) \# K_{p_{2n}} \# \overline{K_{p_{2n+1}}}$$

Cette construction est résumée dans la Fig. 2.

Comme pour tout  $p$  le nœud  $K_p$  est gordien, on a  $d_{\mathcal{K}}(\phi(x), \phi(y)) \leq 2$ . Ainsi, on a  $\forall x, y \in T, d_{\mathcal{K}}(\phi(x), \phi(y)) \leq 2d_T(x, y)$ . On passe maintenant à l’autre inégalité. Prenons deux éléments quelconques  $x$  et  $y$  de  $T$  et notons  $z$  leur premier parent commun. Les nœuds  $\phi(x)$  et  $\phi(y)$  sont obtenus à partir de  $\phi(z)$  par une suite de sommes connexes. Pour expliciter celle-ci, supposons que

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi(z) \# K_{p_{2n_1}} \# \overline{K_{p_{2n_1+1}}} \# \dots \# K_{p_{2n_k}} \# \overline{K_{p_{2n_k+1}}} \quad \text{et} \\ \phi(y) &= \phi(z) \# K_{p_{2m_1}} \# \overline{K_{p_{2m_1+1}}} \# \dots \# K_{p_{2m_l}} \# \overline{K_{p_{2m_l+1}}} \quad \text{de sorte que } d_T(y, z) = k + l. \end{aligned}$$

D’après le lemme,  $A_{p_{2n_1}} \cap A_{p_{2n_1+1}}^{-1} \cap \dots \cap A_{p_{2n_k}} \cap A_{p_{2n_k+1}}^{-1} \cap A_{p_{2m_1}}^{-1} \cap A_{p_{2m_1+1}} \cap \dots \cap A_{p_{2m_l}}^{-1} \cap A_{p_{2m_l+1}} \neq \emptyset$ . On choisit  $\theta$  dans cet ensemble de sorte que  $\sigma_{\phi(x)}(\theta) = \sigma_{\phi(z)}(\theta) + 4k$  et  $\sigma_{\phi(y)}(\theta) = \sigma_{\phi(z)}(\theta) - 4l$ .

L’identité  $|\sigma_{\phi(x)}(\theta) - \sigma_{\phi(y)}(\theta)| = 4(k + l) = 4d_T(x, y)$  prouve que  $d_{\mathcal{K}}(\phi(x), \phi(y)) \geq 2d_T(x, y)$ . L’application  $\phi$  vérifie ainsi  $\forall x, y \in T, d_{\mathcal{K}}(\phi(x), \phi(y)) = 2d_T(x, y)$ . C’est donc bien une quasi-isométrie.

### 3. Connexité à l’infini

Toujours à l’aide du lemme, on peut prouver le résultat suivant :

**Proposition 3.1.** *Le complémentaire de tout ensemble fini de  $\mathcal{K}$  est connexe.*

**Démonstration.** Soit  $\{L_1, \dots, L_n\}$  un sous-ensemble fini de  $\mathcal{K}$ . On note alors  $\Delta_i$  le polynôme d’Alexander de  $K_i$  et  $l(\Delta_i)$  la plus petite distance entre deux racines de  $\Delta_i$  consécutives sur le cercle unité. Enfin, on pose  $l = \min_i l(\Delta_i)$ . Pour  $p$  assez grand, on peut trouver comme dans la section précédente un nœud gordien  $K_p$  de polynôme d’Alexander  $D_p$  tel que  $l(D_p) < l$ .

Par des simples considérations de signature, on remarque que pour tout  $i$  entre 1 et  $n$ , on a  $L_i \# K_p \notin \{L_1, \dots, L_n\}$ .

On conclut alors de la façon suivante : soit  $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_n\}$  un sous-ensemble fini de  $\mathcal{K}$ , et  $L_\alpha, L_\beta \notin \mathcal{L}$ . Par connexité de  $\mathcal{K}$ , il existe un chemin  $L_\alpha = L_{\alpha_0}, L_{\alpha_1}, \dots, L_{\alpha_k} = L_\beta$  de nœuds contigus.

Appliquant la remarque ci-dessus à l’ensemble  $\mathcal{L} \cup \{L_{\alpha_i}\}$ , on trouve un nœud gordien  $K_p$  qui vérifie  $L_{\alpha_i} \# K_p \notin \mathcal{L}$  pour tout  $i$ . Le chemin  $L_{\alpha_0}, L_{\alpha_0} \# K_p, \dots, L_{\alpha_k} \# K_p, L_{\alpha_k}$  est un chemin qui relie  $L_\alpha$  et  $L_\beta$  dans le complémentaire de  $\mathcal{L}$ .  $\square$

### 4. Démonstration du Lemme 2.2

Ce résultat utilise des techniques très classiques et, bien que non publié à notre connaissance, il est certainement connu des spécialistes. Par souci de complétude, on donne ici une preuve.

Un nœud gordien  $K$  se défait par changement d’un croisement. Cela signifie qu’il existe une courbe parallélisée  $L$  homologue à 0 dans le complémentaire du nœud trivial qui donne par chirurgie la variété  $S^3 \setminus K$ .

L’interprétation de la signature et du polynôme d’Alexander de  $K$  en fonction de la matrice d’enlacement équivariant des composantes de chirurgie (voir [1]) nous donne l’information clé suivante : soit  $P$  l’auto-enlacement équivariant de  $L$ . C’est un polynôme de Laurent en  $t$  qui vérifie  $\Delta(K) = P(1).P$  et  $\sigma_K(z) = \text{Sign}(P(z)) - \text{Sign}(P(1)) = \pm(1 - \text{Sign}(\Delta(z)))$ .

Il reste donc à établir le premier point. Cela revient à prouver que pour tout polynôme normalisé  $P$ , on peut construire une composante de chirurgie non nouée et homologue à 0 dans le complémentaire du nœud trivial qui a  $P$  pour auto-enlacement équivariant.

Fixons une famille d’entiers  $a_0, \dots, a_n$  et considérons la courbe de la Fig. 3 dans laquelle on a identifié la partie supérieure et la partie inférieure. De cette manière, la courbe est naturellement plongée dans un tore plein.

On calcule l’auto-enlacement équivariant de cette courbe en comptant le nombre de points d’intersections avec l’information relative au plongement. Utilisant le formalisme des diagrammes de cordes, on code les croisements à l’aide du diagramme de la Fig. 4.

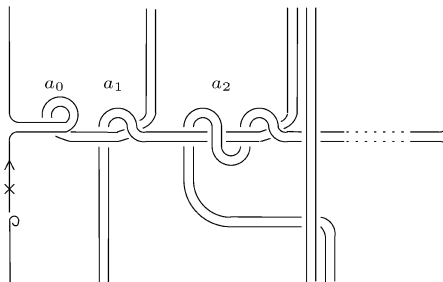


Fig. 3. Courbe de chirurgie.

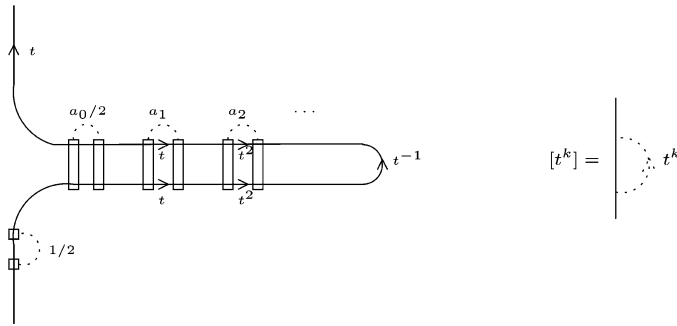


Fig. 4. Calcul de l’auto-enlacement équivariant.

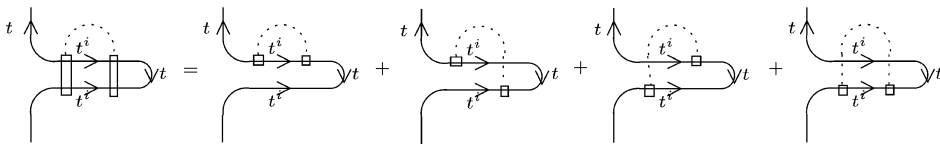


Fig. 5. Contributions à l’auto-intersection.

Le symbole  $t$  désigne le générateur du groupe fondamental du tore plein dirigé vers le haut. Les boîtes reliées par une ligne pointillée désignent l’ensemble des arêtes devant être relié par un diagramme de cordes. Chaque corde relie deux points sur la courbe  $L$  : le coloriage de la corde désigne la classe d’homotopie du cycle formé par la composante coupée et la corde.

En développant ces diagrammes, on obtient le calcul détaillé dans la Fig 5.

Dans les notations de la Fig. 4, le diagramme de corde de la Fig. 5 est égal à l’expression  $[t^i] - [t^i t] - [t^{-i} t] + [t^{-i}] = [(t^i + t^{-i})(1 - t)]$ .

Au final, le diagramme de corde associé à la figure 4 est  $\frac{1}{2}[1] + \frac{a_0}{2}[2(1 - t)] + \sum_{i \geq 1} a_i [(t^i + t^{-i})(1 - t)]$ .

On obtient le polynôme d’Alexander en prenant la partie symétrique de cette expression à savoir  $1 + a_0(2 - t - t^{-1}) + \sum_{i \geq 1} a_i (t^i + t^{-i})(2 - t - t^{-1})$ . Or, il est clair que tout polynôme normalisé s’écrit de manière unique sous cette forme pour un choix convenable des coefficients  $a_i$ . Cela prouve bien que tout polynôme normalisé est le polynôme d’Alexander d’un nœud gordien.

**Remerciements**

Je tiens à remercier É. Ghys pour avoir initié et suivi cette étude, ainsi que G. Masbaum et P. Vogel pour leurs remarques utiles.

**Références**

[1] S. Garoufalidis, A. Kricker, A surgery view of boundary links, *Math. Ann.* 327 (1) (2003) 103–115.  
 [2] J.M. Gambaudo, É. Ghys, Braids and signatures, *Bull. Soc. Math. France* (2005), à paraître.  
 [3] É. Ghys, Communication privée, 2004.  
 [4] M. Hirasawa, Y. Ushida, The Gordian complex of knots, *J. Knot Theory Ramifications* 11 (3) (2002) 363–368.