Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 331–336
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Algèbre

Sur l'algèbre enveloppante d'une algèbre pré-Lie

Jean-Michel Oudom, Daniel Guin

Institut de mathématiques et de modélisation de Montpellier, UMR 5149, université Montpellier II, place Eugène-Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, France

Reçu le 15 septembre 2004 ; accepté après révision le 13 janvier 2005

Présenté par Alain Connes

Résumé

Nous construisons un produit associatif sur le module symétrique $S(L)$ de toute algèbre pré-Lie L qui en en fait une algèbre de Hopf isomorphe à $\mathcal{U}(L_{\mathrm{Lie}})$. Nous montrons ensuite, que dans le cas des arbres enracinés, notre construction est duale à celle de Connes et Kreimer. Nous montrons aussi que les structures d'algèbres braces symétriques et d'algèbres pré-Lie sont identiques. Enfin, nous donnons une interprétation analogue de l'algèbre de Hopf des arbres plans enracinés. ***Pour citer cet article : J.-M. Oudom, D. Guin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

On the Lie enveloping algebra of a pre-Lie algebra. We construct an associative product on the symmetric module $S(L)$ of any pre-Lie algebra L. It turns $S(L)$ into a Hopf algebra which is isomorphic to the envelopping algebra of L_{Lie}. Then we prove that in the case of rooted trees our construction is dual to that of Connes and Kreimer. We also show that symmetric brace algebras and pre-Lie algebras are the same. Finally, we give a similar interpretation of the Hopf algebra of planar rooted trees. ***To cite this article: J.-M. Oudom, D. Guin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abridged English version

Definition 0.1. A pre-Lie algebra is a module L equipped with a bilinear product $\circ$ whose associator is symmetric in the two last variables: $X \circ (Y \circ Z) - (X \circ Y) \circ Z = X \circ (Z \circ Y) - (X \circ Z) \circ Y$.

Let us recall that any pre-Lie algebra $(L, \circ)$ becomes a Lie algebra with the following bracket: $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$.

The inspiring example: rooted trees. A rooted tree is a tree with a distinguished vertex, its root. For any rooted tree T, we denote $|T|$ the set of its vertices. Let X be a set. A X-colored rooted tree is a rooted tree T equipped

Adresses e-mail : oudom@math.univ-montp2.fr (J.-M. Oudom), dguin@math.univ-montp2.fr (D. Guin).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.01.010

with a *color* map $|T| \to X$. For two given colored rooted trees T_1 and T_2, and a chosen vertex v of T_1, we can glue T_1 on v, cf. Fig. 1. The rooted tree $T_1 \circ_v T_2$ thus obtained is the poset whose underlying set is the disjoint union $|T_1| \amalg |T_2|$. The order is induced by the orders of T_1 and T_2 and $w > v$ for all w in T_2.

Proposition 0.2 [2]. *Let us denote $\mathcal{PL}(X)$ the free module with basis the set of X-colored rooted trees. We define on $\mathcal{PL}(X)$ the following product* $\circ$: $T_1 \circ T_2 = \sum_{v \in |T_1|} T_1 \circ_v T_2$ *Then* $(\mathcal{PL}(X), \circ)$ *is a pre-Lie algebra.*

Let L be a pre-Lie algebra. We denote by $S(L)$ the symmetric algebra over the underlying k-module of L, with the usual shuffle coproduct denoted Δ. We will use without restraint the classical Sweedler's notation: $\Delta(A) = A_{(1)} \otimes A_{(2)}$.

Proposition 0.3. *There is a unique extension of the product* $\circ$ *to* $S(L)$ *such that*:

(i) $A \circ 1 = A$; (ii) $T \circ BX = (T \circ B) \circ X - T \circ (B \circ X)$; (iii) $AB \circ C = (A \circ C_{(1)})(B \circ C_{(2)})$

where A, B, C *belong to* $S(L)$ *and* X *and* T *are in* L.

Definition 0.4. We define the following $*$ product on $S(L)$: $A * B := (A \circ B_{(1)})B_{(2)}$.

Theorem 0.5. *The product* $*$ *is associative and turns* $(S(L), \Delta)$ *into a Hopf algebra, which is isomorphic to the enveloping algebra* $\mathcal{U}(L_{\mathrm{Lie}})$.

Theorem 0.6. *The* $*$ *product defined on* $S(\mathcal{PL}(X))$ *by* (0.2) *and* (0.4) *is the dual of the opposite of the Connes–Kreimer coproduct defined in* [4].

Definition 0.7. A symmetric brace algebra, [9], is a vector space V equipped with a brace: $V \otimes S(V) \to V$; $X \otimes A \mapsto X\{A\}$ satisfying the following identity: $X\{1\} = X$, $X\{Y_1, \dots, Y_n\}\{A\} = X\{Y_1\{A_{(1)}\}, \dots, Y_n\{A_{(n)}\}, A_{(n+1)}\}$.

Proposition 0.8. *The categories of symmetric brace algebras and pre-Lie algebras are isomorphic.*

Proposition 0.9. *Let* V *be a brace algebra. We define by induction the following product* $*$ *on* $T(V)$: $1 * B = B$, $XA * B = B_{(1)}X\{B_{(2)}\}(A * B_{(3)})$ *for* A *and* B *in* $T(V)$ *and* X *in* V. *This product is associative and turns* $T(V)$ *into a Hopf algebra.*

Let X be a set and $\mathcal{BR}(X)$ be the module generated by the X-colored planar rooted trees. It is known to be the free brace algebra generated by X, [3].

Theorem 0.10. *The Connes–Kreimer's like coproduct of the Hopf algebra of* X*-colored planar rooted trees* [5] *is dual to the opposite of the* $*$ *product defined in* (0.9).

1. Introduction

Au cours des cinq dernières années, plusieurs algèbres de Hopf de type combinatoire ont été introduites dans différents contextes, en particulier celle de Connes et Kreimer des arbres enracinés [4]. On peut également citer Brouder–Frabetti [1], Foissy [5], Grossman–Larson [6], Loday–Ronco [10], Moerdijk [11], Van der Laan [15]. L'objectif de cette note est de montrer que nombre de ces algèbres de Hopf peuvent être obtenues par une construction algébrique générale. Dans le cas commutatif (ou cocommutatif), la structure algébrique clé est la structure de pré-algèbre de Lie (cf. [2]). Les algèbres 'brace' interviennent dans un contexte non commutatif et non cocommutatif. Plus précisément :

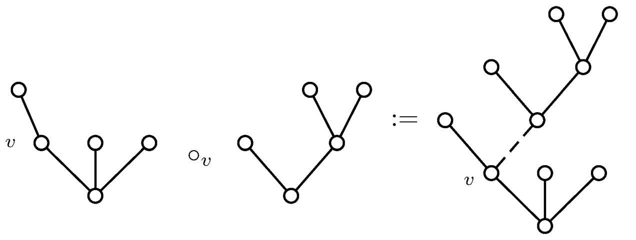


Fig. 1. Les arbres enracinés.

- Nous définissons un produit explicite, noté $*$, sur la (co)algèbre symétrique $S(L)$ d'une algèbre pré-Lie L, tel que $(S(L), *, \Delta)$, où Δ est le coproduit de battage usuel sur $S(L)$, soit une algèbre de Hopf et nous montrons qu'elle est isomorphe à l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(L_{\mathrm{Lie}})$ de l'algèbre de Lie L_{Lie} associée à L.
- Nous étudions le cas où L est l'algèbre pré-Lie des arbres enracinés et nous montrons que notre construction est duale de celle de Connes–Kreimer, [4]. Ceci donne une nouvelle démonstration de la dualité entre les algèbres de Connes–Kreimer et Grossman–Larson, [4,8,12].
- Nous montrons que la catégorie des algèbres "braces symétriques", introduites par Lada et Markl, [9], est isomorphe à la catégorie des algèbres pré-Lie.
- Enfin, par le même type de démarche, nous définissons un produit sur $T(V)$, où V est une algèbre brace, ce qui donne une autre interprétation de l'algèbre de Hopf des arbres planaires enracinés [5,13].

On fixe un anneau commutatif k et toutes les structures linéaires (modules, produits tensoriels) sont prises.

2. Algèbres pré-Lie

Définition 2.1. Une algèbre pré-Lie est un module L muni d'un produit bilinéaire $\circ$ dont l'associateur est symétrique en les deux dernières variables : $X \circ (Y \circ Z) - (X \circ Y) \circ Z = X \circ (Z \circ Y) - (X \circ Z) \circ Y$.

Ces algèbres ont également été appelées algèbres symétriques à droite, algèbres de Koszul–Vinberg ou algèbres de Vinberg. Nous utilisons la terminologie de Chapoton et Livernet [2]. On rappelle que si $(L, \circ)$ est une algèbre pré-Lie, le crochet défini par $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$ munit L d'une structure d'algèbre de Lie, notée L_{Lie}.

2.1. L'exemple fondamental : les arbres enracinés

Un arbre enraciné est un arbre avec un sommet distingué, sa racine. Si T est un arbre enraciné, on désigne par $|T|$ l'ensemble de ses sommets. Soit X un ensemble. Un arbre enraciné X-coloré est un arbre enraciné T muni d'une application *couleur* $|T| \to X$. Pour deux arbres enracinés colorés T_1 et T_2 et un sommet donné v de T_1, on peut greffer T_2 sur T_1 en reliant la racine de T_2 à v (voir Fig. 1).

Proposition 2.2 [2]. *Soit $\mathcal{PL}(X)$ le module libre de base l'ensemble des arbres enracinés X-colorés. On définit sur $\mathcal{PL}(X)$ le produit $\circ$ suivant :* $T_1 \circ T_2 = \sum_{v \in |T_1|} T_1 \circ_v T_2$. *Alors* $(\mathcal{PL}(X), \circ)$ *est une algèbre pré-Lie.*

3. Les produits $\circ$ et $*$ sur $S(L)$

Soient L une algèbre pré-Lie et $S(L)$ l'algèbre symétrique du module sous-jacent à L, munie du coproduit de battage usuel, noté Δ. Nous utiliserons la notation classique de Sweedler : $\Delta(A) = A_{(1)} \otimes A_{(2)}$. Nous allons étendre le produit $\circ$ de L à $S(L)$, ce qui nous permettra de définir un produit associatif $*$ sur $S(L)$.

Proposition 3.1. *Il existe une unique extension du produit $\circ$ à $S(L)$ telle que* :

$$\begin{cases} \text{(i)} & A \circ 1 = A, \\ \text{(ii)} & T \circ BX = (T \circ B) \circ X - T \circ (B \circ X), \\ \text{(iii)} & AB \circ C = (A \circ C_{(1)})(B \circ C_{(2)}) \end{cases}$$

où A, B, C sont dans $S(L)$ et X et T sont dans L.

Proposition 3.2. *Soient A, B, C dans $S(L)$ et X dans L. On a* :

(i) $1 \circ A = \varepsilon(A)$,

(ii) $\varepsilon(A \circ B) = \varepsilon(A)\varepsilon(B)$,

(iii) $\Delta(A \circ B) = (A_{(1)} \circ B_{(1)}) \otimes (A_{(2)} \circ B_{(2)})$,

(iv) $A \circ BX = (A \circ B) \circ X - A \circ (B \circ X)$,

(v) $(A \circ B) \circ C = A \circ ((B \circ C_{(1)})C_{(2)})$.

Définition 3.3. On définit le produit $*$ sur $S(L)$ par : $A * B := (A \circ B_{(1)})B_{(2)}$.

Lemme 3.4. *Le produit $*$ est associatif et $(S(L), *, \Delta)$ est une algèbre de Hopf.*

Démonstration. La compatibilité entre $*$ et Δ provient de (3.2(iii)). L'associativité du produit $*$ provient des égalités ci-dessous :

$$\begin{aligned} (A * B) * C &= (((A \circ B_{(1)})B_{(2)}) \circ C_{(1)})C_{(2)} && \text{par définition de } *, \\ &= ((A \circ B_{(1)}) \circ C_{(1)})(B_{(2)} \circ C_{(2)})C_{(3)} && \text{d'après (3.1(iii))}, \\ &= (A \circ ((B_{(1)}) \circ C_{(1)})C_{(2)}))(B_{(2)} \circ C_{(3)})C_{(4)} && \text{d'après (3.2(v))}, \\ &= (A \circ ((B_{(1)}) \circ C_{(1)})C_{(3)}))(B_{(2)} \circ C_{(2)})C_{(4)} && \text{par cocommutativité de } \Delta, \\ &= A * ((B \circ C_{(1)})C_{(2)}) && \text{par définition of } * \text{ et (3.2(iii))}, \\ &= A * (B * C). \end{aligned}$$

Théorème 3.5. *L'algèbre de Hopf $(S(L), *, \Delta)$ est isomorphe à l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(L_{\mathrm{Lie}})$.*

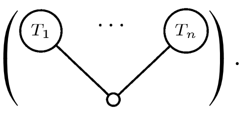
Démonstration. Nous nous contentons de donner une preuve lorsque k est un corps de caractéristique nulle. Le cas général s'obtient classiquement par filtration et passage au gradué associé. Pour tous X et Y dans L, on a : $X * Y - Y * X = XY + X \circ Y - YX - Y \circ X = [X, Y]$. La partie primitive de $(S(L), *, \Delta)$ est donc L_{Lie}. De plus $(S(L), \Delta)$ est connexe. Le théorème de Cartier–Kostant–Milnor–Moore permet donc de conclure.

4. Le cas de $\mathcal{PL}$(X) et l'algèbre de Hopf de Connes–Kreimer

L'algèbre de Hopf de Connes et Kreimer, [4], est l'algèbre symétrique $S(\mathcal{PL}(X))$, munie du coproduit Δ_{CK} défini par récurrence à l'aide de l'identité :

$$\text{(CK)} \quad \Delta_{\mathrm{CK}} B^+ = B^+ \otimes \eta + (1 \otimes B^+)\Delta_{\mathrm{CK}},$$

où η est l'unité de $S(\mathcal{PL}(X))$ et B^+ est l'application qui consiste à ajouter une racine à une forêt :

$B^+(T_1 \cdots T_n) =$ 

.

Théorème 4.1. *Le produit* $*$ *défini sur* $S(\mathcal{PL}(X))$ *par* (3.3.) *est le dual de l'opposé du coproduit de Connes et Kreimer.*

Démonstration. Il suffit de vérifier l'identité $\mathcal{B}_-(A*B)=\varepsilon(A)\mathcal{B}_-(B)+\mathcal{B}_-(A)*B$, où $\mathcal{B}_-$ est la transposée de $\mathcal{B}^+$. C'est une conséquence de (3.2(v)).

5. Le lien avec les algèbres brace symétriques

Les algèbres brace symétriques ont été introduites par Lada et Markl dans [9]. Nous montrons, comme application de la Section 2, que les algèbres brace symétriques et les algèbres pré-Lie coïncident.

Définition 5.1 [9]. Une algèbre brace symétrique est un espace vectoriel V muni d'une opération multilinéaire d'arité $(n+1)$, pour tout n, $n \geqslant 1$

$$V\otimes V^{\otimes n}\longrightarrow V,\qquad X\otimes Y_1\cdots Y_n\longmapsto X\{Y_1,\ldots,Y_n\}$$

qui est symétrique en les variables Y et satisfaisant l'identité suivante, pour tout n :

$$X\{Y_1,\ldots,Y_n\}\{A\}=X\bigl\{Y_1\{A_{(1)}\},\ldots,Y_n\{A_{(n)}\},A_{(n+1)}\bigr\}.$$

Proposition 5.2 [9]. *Soient* V *une algèbre brace symétrique et* $\circ$ *le produit défini sur* V *par* : $X\circ Y=X\{Y\}$.
Alors $(V,\circ)$ *est une algèbre pré-Lie.*

Inversement, on définit une structure brace sur une algèbre pré-Lie :

Définition 5.3. Soit $(L,\circ)$ une algèbre pré-Lie, on pose : $X\{Y_1,\ldots,Y_n\}=X\circ Y_1\cdots Y_n$, où $X,Y_1,\ldots,Y_n$ sont dans L et où $\circ$ est le produit défini en (3.1).

Proposition 5.4. *Si* L *est une algèbre pré-Lie, le produit défini ci-dessus munit* L *d'une structure d'algèbre brace symétrique.*

Démonstration. C'est une conséquence évidente de (3.2(v)) et (3.1(iii)).

Proposition 5.5. *Les catégories des algèbres brace symétriques et des algèbres pré-Lie sont isomorphes.*

6. Algèbres brace et algèbre de Hopf des arbres planaires enracinés

Dans cette section nous étendons les résultats de la Section 2 au cadre des algèbres brace et nous retrouvons par ce procédé l'algèbre de Hopf de type Connes–Kreimer des arbres planaires enracinés [5,13].

Définition 6.1. Soit V un espace vectoriel. Une structure d'algèbre brace sur V est donnée par une application :

$$V\otimes T(V)\longrightarrow V,\qquad X\otimes A\longmapsto X\{A\}$$

satisfaisant aux relations suivantes :

$$X\{1\}=X,\qquad X\{Y_1\cdots Y_n\}\{A\}=X\bigl\{A_{(1)}Y_1\{A_{(2)}\}A_{(3)}\cdots A_{(2n-1)}Y_n\{A_{(2n)}\}A_{(2n+1)}\bigr\},$$

où la notation de Sweedler est utilisée pour le produit de déconcaténation sur $T(V)$:

$$\Delta(X_1\cdots X_n)=\sum_{i=0}^{n}X_1\cdots X_i\otimes X_{i+1}\cdots X_n.$$

On définit un produit similaire à celui de (3.3) sur la cogèbre $T(V)$ d'une algèbre brace V :

Proposition 6.2. *Soit V une algèbre brace. On définit, par récurrence, le produit $*$ suivant sur $T(V)$:*

$$1 * B = B, \qquad XA * B = B_{(1)} X\{B_{(2)}\}(A * B_{(3)})$$

pour A et B dans $T(V)$ et X dans V. Ce produit est associatif et munit $T(V)$ d'une structure d'algèbre de Hopf.

Remarque 1. Cette proposition exprime le fait que toute algèbre brace est naturellement une $\mathcal{B}_\infty$-algèbre. C'est un fait bien connu qui a été, utilisé par Tamarkin dans sa preuve du théorème de formalité de Kontsevich, [14,7].

On sait que l'espace des arbres planaires enracinés est une algèbre brace, [3].

Théorème 6.3. *Le coproduit de l'algèbre de Hopf des arbres planaires enracinés vérifiant l'identité* (CK), [5], *est en dualité avec l'opposé du produit défini en* (6.2).

La démonstration est similaire à celle de (4.1).

Références

[1] C. Brouder, A. Frabetti, QED Hopf algebras on planar binary trees, preprint, math.QA/0112043.
[2] F. Chapoton, M. Livernet, Pre-Lie algebras and the rooted trees operad, Int. Math. Res. Notices 8 (2001) 395–408.
[3] F. Chapoton, Un théorème de Cartier–Milnor–Moore–Quillen pour les digèbres dendriformes et les algèbres braces, J. Pure Appl. Algebra 168 (2002) 1–18.
[4] A. Connes, D. Kreimer, Hopf algebras, renormalization and noncommutative geometry, Commun. Math. Phys. 199 (1) (1998) 203–242.
[5] L. Foissy, Les algèbres de Hopf des arbres enracinés décorés, thèse de l'université de Reims, 2002.
[6] R. Grossman, R.-G. Larson, Hopf algebraic structure of families of trees, J. Algebra 126 (1) (1989) 184–210.
[7] V. Hinich, Tamarkin's proof of Kontsevich formality theorem, preprint, math.QA/0003052.
[8] M. Hoffman, Combinatorics of rooted trees and Hopf algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 355 (9) (2003) 3795–3811.
[9] T. Lada, M. Markl, Symmetric brace algebras with application to particles of high spin, preprint, math.QA/0307054.
[10] J.-L. Loday, M. Ronco, Hopf algebra of the planar binary trees, Adv. Math. 139 (2) (1998) 293–309.
[11] I. Moerdijk, On the Connes–Kreimer construction of Hopf algebras, Contemp. Math. 271 (2001) 311–321.
[12] F. Panaite, Relating the Connes–Kreimer and the Grossman–Larson Hopf algebras built on rooted trees, Lett. Math. Phys. 51 (3) (2000) 211–219.
[13] M. Ronco, Eulerian idempotents and Milnor–Moore theorem for certain non cocommutative Hopf algebras, J. Algebra 254 (2002) 152–172.
[14] D. Tamarkin, An another proof of M. Kontsevich formality theorem for $\mathbb{R}^n$, preprint, math.QA/9803025.
[15] P. van der Laan, Some Hopf algebras of trees, preprint, math.QA/0106244.