Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 103–106
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des nombres

Une approche polynomiale du théorème de Faltings

Bakir Farhi

Département de mathématiques, université du Maine, avenue Olivier Messiaen, 72085 le Mans, France

Reçu le 19 avril 2004 ; accepté le 30 novembre 2004

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

Nous présentons ici une démonstration élémentaire d'une version quantitative améliorée de la conjecture de Mordell, devenue théorème de Faltings. Nous suivons pour le décompte des points de grande hauteur de $C(K)$ (voir ci-dessous pour les notations) la méthode de Vojta, simplifiée par Bombieri, puis T. de Diego, G. Rémond. Pour le décompte des points de petite hauteur de $C(K)$, nous utilisons un résultat de S. David et P. Philippon, qui permet d'estimer le nombre de points de petite hauteur de l'ensemble plus grand $C(\overline{K}) \cap J(K)$. ***Pour citer cet article : B. Farhi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

A polynomial approach to Faltings theorem. We present here an elementary proof of a quantitatively improved version of the Mordell's Conjecture which is now Faltings's Theorem. For the count of the 'large points' of $C(K)$ (see below for the notations) we use Vojta's method which was simplified by Bombieri and then by T. de Diego, G. Rémond. To count the points of small heights of $C(K)$, we use a result of S. David and P. Philippon, allowing to us estimate the number of points of small height of the bigger set $C(\overline{K}) \cap J(K)$. ***To cite this article: B. Farhi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***
© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

1. Notations et résultat principal

Soit C une courbe projective irréductible définie sur un corps de nombres K, de genre $g \geqslant 2$ et plongée dans sa jacobienne J, dont le rang de Mordell–Weil sur K est désigné par r. On fixe un fibré $\mathcal{M}$ sur J que l'on suppose symétrique et ample, associé à la polarisation principale canonique et on identifie J à un tore complexe $\mathbb{C}^g/\Lambda$ pour un réseau $\Lambda = \mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g$ de $\mathbb{C}^g$, où τ désigne un élément de l'espace de Siegel $\mathfrak{S}_g$ de dimension g. Le fibré $\mathcal{M}^{\otimes 16}$, qui est alors très ample et totalement symétrique nous permet de plonger J dans l'espace projectif $\mathbb{P}_n$ (avec $n := 16^g - 1$) via l'application :

Adresse e-mail : Bakir.Farhi@univ-lemans.fr (B. Farhi).

1631-073X/$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2004.11.026

$$\begin{aligned}\widetilde{\Theta}_{\mathcal{M}^{\otimes 16}} : \mathbb{C}^g &\longrightarrow \mathbb{P}_{16^g-1},\\ \underline{z} &\longmapsto \left(\Theta_{(\underline{u},\underline{0})}(16\tau, 16\underline{z})\right)_{\underline{u}\in\frac{1}{16}\mathbb{Z}^g \bmod \mathbb{Z}^g}\end{aligned}$$

où $\underline{0}$ désigne le vecteur nul de $\mathbb{R}^g$ et pour $\underline{u}$, $\underline{v}$ deux éléments de $\mathbb{R}^g$, on a noté $\Theta_{\underline{u},\underline{v}}$ la fonction de $\mathfrak{S}_g \times \mathbb{C}^g$ définie par :

$$\Theta_{\underline{u},\underline{v}}(\tau, \underline{z}) = \sum_{\underline{m}\in\mathbb{Z}^g} \exp\bigl(\mathrm{i}\pi^t(\underline{m}+\underline{u})\tau(\underline{m}+\underline{u}) + 2\mathrm{i}^t(\underline{m}+\underline{u})(\underline{z}+\underline{v})\bigr).$$

Étant donnée maintenant une forme P sur $\mathbb{P}_n$ (ou sur une puissance $\mathbb{P}_n^k$ de $\mathbb{P}_n$) à coefficients algébriques, on appellera hauteur de P, que l'on notera $h(P)$, la hauteur unitaire de P (voir par exemple [3]-III). Plus généralement, étant donné une variété algébrique V définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et plongée dans $\mathbb{P}_n$ (resp dans une puissance $\mathbb{P}_n^k$ de $\mathbb{P}_n$) via un plongement φ, on appellera hauteur projective de V, que l'on notera $h_\varphi(V)$ ou simplement $h(V)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté, la hauteur unitaire de la forme résultante f_V de l'idéal de définition de $\varphi(V)$ dans l'anneau des coordonnées $A(\mathbb{P}_n)$ de $\mathbb{P}_n$ (resp $A(\mathbb{P}_n^k)$ de $\mathbb{P}_n^k$). En particulier, la hauteur d'un point $\mathbf{x}$ de $\mathbb{P}_n$ (resp de $\mathbb{P}_n^k$), notée $h(\mathbf{x})$, désignera la hauteur projective de la variété de $\mathbb{P}_n$ (resp de $\mathbb{P}_n^k$) réduite à ce point $\mathbf{x}$. Par ailleurs, il est défini dans [3]-I une hauteur normalisée $\hat{h}$ de sous-variétés algébiques d'une variété abelienne donnée (qui est, en ce qui nous concerne, la jacobienne J de C) satisfaisant un certain nombre de propriétés. Cette hauteur $\hat{h}$ vue comme une application de $J(K)$ dans $\mathbb{R}^+$ (associant à chaque point de $J(K)$, la hauteur normalisée de la sous-variété de J réduite à ce point) se prolonge au $\mathbb{Z}$-module $J(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^r$ en le munissant d'une structure d'espace euclidien via la norme dite de Néron–Tate, notée $|\cdot|$ et définie par $|\cdot| := \sqrt{\hat{h}}$.

On notera respectivement $d(C)$ et $h(C)$ le degré et la hauteur projective de la courbe $C \hookrightarrow \mathbb{P}_n$, et on notera enfin $\mathbf{0}$ l'origine de J et $h_0(\mathbf{0})$ le réel positif $h_0(\mathbf{0}) := [K : \mathbb{Q}] \max\{1, h(\mathbf{0})\}$. Comme version quantitative du théorème de Faltings [2], on obtient le :

Théorème 1.1. *Dans la situation décrite ci-dessus, on a* :

$$\mathrm{card}\bigl(C(K)\bigr) \leqslant 2^{74g^3} h_0(\mathbf{0})^{8g} \bigl(2^{44g^3} h_0(\mathbf{0})^{4g+1/2}\bigr)^r.$$

À partir du paragraphe 2 qui suit, on considère que $C(K)$ est plongé dans $J(K)$ qui est lui même plongé dans $J(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. On se permet ainsi de parler de l'angle séparant deux points $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de $C(K)$ en les considérant comme des vecteurs de l'espace euclidien $J(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. On définit aussi pour tout ce qui suit les constantes positives suivantes : $c_0 := 3\sqrt{n}h(\mathbf{0}) + (2n+5)\log(n+1) + 4$, $R := 2^{40} n^2 d(C)^7 (h(C) + c_0 d(C))$, $\alpha = \epsilon := \frac{1}{2^{15} d(C)^2}$, $\gamma_1 := 9.2^{15} n d(C)^4$ et $\gamma_2 := 1 + \frac{2}{3d(C)}$.

2. Inégalité de Vojta

On a le théorème suivant :

Théorème 2.1 (Inégalité de Vojta). *Pour tout couple de points distincts* $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *de* $C^2(K)$*, satisfaisant* : $\cos(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqslant 1 - \frac{\alpha}{4}$ *et* $\hat{h}(\mathbf{y}) \geqslant \hat{h}(\mathbf{x}) > R$*, on a* : $\hat{h}(\mathbf{y}) \leqslant \gamma_1 \hat{h}(\mathbf{x})$.

Remarque 1. Dans [5], G. Rémond a étudié l'inégalité de Vojta en dimension supérieure (qui s'applique pour démontrer la conjecture plus générale de Lang, initialement établie par Faltings en utilisant la méthode de Vojta). Dans ce cas des courbes, notre Théorème 2.1 est nettement meilleur au niveau des constantes α, R et γ_1, en comparaison avec celui de cette référence, spécialisé en dimension 1.

Démonstration abrégée. Nous procédons par l'absurde. Supposons qu'il existe deux points distincts $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de $C(K)$, contenus dans un petit cône d'angle $\leqslant \arccos(1-\alpha/4)$ de l'espace euclidien $J(K)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$, de hauteur de Néron–Tate plus grandes que R et tels que $\hat{h}(\mathbf{y}) > \gamma_1\hat{h}(\mathbf{x})$. Nous introduisons deux entiers strictement positifs a et b de façon à ce que les points multiples $a\mathbf{x}$ et $b\mathbf{y}$ des points $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ soient suffisamment proches l'un de l'autre pour que le point $\mathbf{z} := a\mathbf{x} - b\mathbf{y} \in J(K)$ satisfasse : $\hat{h}(\mathbf{z}) \leqslant \alpha(a^2\hat{h}(\mathbf{x}) + b^2\hat{h}(\mathbf{y}))$. Nous considérons ensuite le plongement éclatant $\varphi_{a,b}$ suivant :

$$\begin{array}{rcccl} \varphi_{a,b} : J^2 & \overset{\psi_{a,b}}{\hookrightarrow} & J^3 & \overset{\widetilde{\Theta}^3}{\hookrightarrow} & \mathbb{P} := \mathbb{P}_n{}^3, \\ (\mathbf{p},\mathbf{q}) & \longmapsto & (\mathbf{p},\mathbf{q},a\mathbf{p}-b\mathbf{q}) & \longmapsto & \big(\widetilde{\Theta}(\mathbf{p}), \widetilde{\Theta}(\mathbf{q}), \widetilde{\Theta}(a\mathbf{p}-b\mathbf{q})\big). \end{array}$$

On a en particulier : $\psi_{a,b}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$.

Nous construisons – dans un premier temps, par un lemme de Siegel classique – une forme non identiquement nulle P_1 sur la variété $\varphi_{a,b}((C-\mathbf{x})\times(C-\mathbf{y}))$, s'annulant à un ordre suffisamment élevé en $(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0})$, qui soit de multidegré $(\frac{1}{2}\epsilon\delta a^2, \frac{1}{2}\epsilon\delta b^2, \frac{1}{2}\delta)$ et de hauteur relativement petite par rapport à son degré total. On doit préciser que le fait $g \geqslant 2$ intervient dans cette construction via la non nullité du multidegré $d_{(0,0,2)}\varphi_{a,b}(C^2)$ (il est même $\geqslant a^2b^2$). Ce nombre d'inconnues – du système linéaire auquel on applique le lemme de Siegel de [7] – est ainsi beaucoup plus grand que le nombre de conditions. On considère ensuite la forme $P := \tau^*_{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})}P_1$ translatée de P_1 par le point $(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$, qui est alors une forme non identiquement nulle sur la variété $\varphi_{a,b}(C^2)$, s'annule au point $(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$ avec le même ordre d'annulation que P_1 en l'origine de J^3, de degré $(\epsilon\delta a^2, \epsilon\delta b^2, \delta)$ et satisfait (en tenant compte du fait crucial $\hat{h}(\mathbf{z}) \leqslant \alpha(a^2\hat{h}(\mathbf{x}) + b^2\hat{h}(\mathbf{y})))$ que $h(P)/d^oP$ est négligeable par rapport aux hauteurs des points $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$. Finalement, on tire cette forme P en une forme Q sur C^2 en substituant dans P des formes représentant le morphisme $\varphi_{a,b}$ au voisinage de $\{\mathbf{x}\}\times\{\mathbf{y}\}$. La forme Q ainsi obtenue est alors non identiquement nulle sur C^2, s'annule au point $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ avec un ordre suffisamment élevé, de bidegré $((2+\epsilon)\delta a^2, (2+\epsilon)\delta b^2)$ et $h(Q)/d^oQ$ est négligeable par rapport aux hauteurs des points $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$.

Finalement, le théorème du produit, dont l'hypothèse principale-exigeant l'espacement des degrés de Q-est satisfaite (grâce au fait que ces derniers degrés sont inversement proportionnels aux hauteurs des points $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$, lesquelles sont assez espacées par l'hypothèse $\hat{h}(\mathbf{y}) > \gamma_1\hat{h}(\mathbf{x})$) montre l'existence d'une sous-variété propre et produit V de C^2 contenant le point $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ et dont la hauteur est bien contrôlée. Ce contrôle de la hauteur de V aboutit dans chacun des cas $V = \{\mathbf{x}\}\times C$, $V = C\times\{\mathbf{y}\}$ et $V = \{\mathbf{x}\}\times\{\mathbf{y}\}$ à une contradiction avec le fait que $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont de hauteur assez grande ($\hat{h}(\mathbf{y}) \geqslant \hat{h}(\mathbf{x}) > R$). Ce qui achève la démonstration. □

3. Inégalité de Mumford

On a le théorème suivant :

Théorème 3.1 (Inégalité de Mumford). *Pour tout couple de points* $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *de* $C^2(K)$ *tel que le point différence* $\mathbf{y}-\mathbf{x}$ *de* $J(K)$ *n'appartient pas au stabilisateur de* C *dans* J *(que l'on note* $\mathrm{stab}_J(C)$*) et satisfaisant* : $\cos(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geqslant 1-\alpha/4$ *et* $\hat{h}(\mathbf{y}) \geqslant \hat{h}(\mathbf{x}) > R$, *on a* : $\hat{h}(\mathbf{y}) \geqslant \gamma_2\hat{h}(\mathbf{x})$.

Démonstration abrégée. On procède par l'absurde. La géométrie euclidienne sur $J(K)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ montre que le point différence $\mathbf{y}-\mathbf{x}$ est de hauteur relativement petite par rapport aux hauteurs des points $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$. Par ailleurs, on construit (sans utiliser un lemme de Siegel !) deux formes Q_1 et Q_2 sur C^2, s'annulant au point $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ et tel que Q_2 ne soit identiquement nulle sur aucune composante, contenant $(\mathbf{x},\mathbf{y})$, du cycle intersection $C^2.Z(Q_1)$. L'hypothèse $\mathbf{y}-\mathbf{x} \notin \mathrm{stab}_J(C)$ intervient justement dans la construction de Q_2. Notons que ces deux formes Q_1 et Q_2 sont obtenues à partir de deux premières formes sur $C-C$ s'annulant au point $\mathbf{y}-\mathbf{x}$, en tirant ces formes sur C^2 (où le morphisme considéré ici de C^2 dans $C-C$ est le morphisme de soustraction). Par conséquent, les hauteurs de nos formes Q_1 et Q_2 dépendent de la hauteur du point $\mathbf{y}-\mathbf{x}$ mais elles sont indépendantes des hauteurs des points $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$.

En appliquant par suite le théorème de Bézout arithmétique de [6] pour le cycle intersection $(C^2.Z(Q_1)).Z(Q_2)$ dont le point $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ est une composante isolée (par construction même des formes Q_1 et Q_2), on aboutit à une majoration de $h(\mathbf{y})$ par une expression linéaire en $h(\mathbf{y}-\mathbf{x})$ et en combinant cette majoration avec celle qui exprime le fait que $\mathbf{y}-\mathbf{x}$ est de hauteur relativement petite par rapport à la hauteur du point $\mathbf{y}$, on aboutit à une contradiction avec l'hypothèse $\hat{h}(\mathbf{y}) > R$. Ceci achève cette démonstration. □

4. Décompte des points de $C(K)$

Pour majorer le cardinal de $C(K)$, on répartit les points de hauteur $> R$ de $C(K)$ (deux à deux distincts modulo le stabilisateur de $C(K)$ dans $J(K)$) en un nombre fini de cônes d'angles $\leqslant \arccos(1-\alpha/4)$; les inégalités de Vojta et de Mumford montrent alors que dans un tel petit cône, il y a au plus $\frac{\log \gamma_1}{\log \gamma_2}+1$ tels points. Sachant que le nombre minimal de cônes d'angles $\leqslant \arccos(1-\alpha/4)$, suffisant pour recouvrir l'espace euclidien $J(K)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}\simeq\mathbb{R}^r$ est majoré par $(1+8/\sqrt{2\alpha})^r$ et que $\mathrm{stab}_{J(K)}C(K)$ est un groupe fini de cardinal majoré par $d(C)^2$, on obtient le décompte de tous les points de $C(K)$ qui sont de hauteur $> R$. Par ailleurs, les Théorèmes 1.3 et 1.4 de [1] nous fournissent une majoration pour le nombre de points de hauteur $\leqslant R$ de l'ensemble $C(\overline{K})\cap J(K)$; comme ce dernier contient $C(K)$, un premier décompte des points de $C(K)$ en résulte. Afin d'aboutir au Théorème 1.1, il reste finalement à éliminer la dépendance en $d(C)$ et $h(C)$ du dernier décompte obtenu. Concernant le degré de C, on a (vu le plongement $C\hookrightarrow\mathbb{P}_n$ considéré) $d(C)=16g$ et concernant la hauteur de C, on utilise le Lemme 3.1 de [4].

Remerciement

Je tiens à remercier M. Patrice Philippon pour son aide tout au long de ce travail.

Références

[1] S. David, P. Philippon, Minoration des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abeliennes 2, Comment. Math. Helv. 77 (4) (2002) 639–700.
[2] G. Faltings, Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern, Invent. Math. 73 (1983) 349–366.
[3] P. Philippon, Sur des hauteurs alternatives I; II; III, Math. Ann. 289 (1991) 255–283; Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 44 (4) (1994) 1043–1065; J. Math. Pures Appl. 74 (4) (1995) 345–365.
[4] G. Rémond, Décompte dans une conjecture de Lang, Invent. Math. 142 (2000) 513–545.
[5] G. Rémond, Inégalité de Vojta en dimension supérieure, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 29 (2000) 101–151.
[6] G. Rémond, Élimination multihomogène, in: Y.V. Nesterenko, P. Philippon (Eds.), Introduction to Algebraic Independence Theory, in: Lecture Notes in Math., vol. 1752, Springer, 2001, pp. 53–81.
[7] P. Vojta, Siegel's theorem in the compact case, Ann. Math. 133 (1991) 509–548.