Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 151–154
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie différentielle

Cohomologie de Poisson en dimension trois

Anne Pichereau

Université de Poitiers, laboratoire de mathématiques, UMR 6086, SP2MI téléport 2, boulevard Marie et Pierre Curie, BP 30 179, 86962 Futuroscope Chasseneuil cedex, France

Reçu le 29 octobre 2004 ; accepté le 24 novembre 2004

Disponible sur Internet le 4 janvier 2005

Présenté par Michèle Vergne

Résumé

Nous décrivons la cohomologie de Poisson pour des structures de Poisson sur l'espace affine $\mathbf{F}^3$, admettant un Casimir quasi-homogène et un lieu singulier réduit à l'origine. ***Pour citer cet article : A. Pichereau, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

Poisson cohomology in dimension three. We describe the Poisson cohomology for Poisson structures on the affine space $\mathbf{F}^3$, which admit a quasi-homogeneous Casimir and a singular locus reduced to the origin. ***To cite this article: A. Pichereau, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

1. Introduction

La cohomologie de Poisson a été introduite, en même temps que les variétés de Poisson, par A. Lichnerowicz [1]. Elle joue un rôle capital dans l'étude des déformations des structures de Poisson et la quantification par déformation. Ces espaces de cohomologie, $H^k(\mathcal{A})$, d'une algèbre de Poisson $(\mathcal{A}, \{\cdot\,,\cdot\})$, admettent les interprétations suivantes : $H^0(\mathcal{A})$ est l'algèbre des Casimirs (éléments du centre du crochet de Poisson), alors que $H^1(\mathcal{A})$ est le quotient des champs de vecteurs de Poisson par les champs hamiltoniens et $H^2(\mathcal{A})$ le quotient des bivecteurs compatibles avec $\{\cdot\,,\cdot\}$ par les dérivées de Lie de ce crochet. On voit donc l'intérêt de calculer la cohomologie de Poisson, mais ce calcul est, en général, très difficile. Il n'a été effectué que pour quelques cas particuliers, comme les variétés symplectiques, le dual de certaines algèbres de Lie, par exemple les semi-simples, ou encore en dimension deux (voir [1–3]).

Adresse e-mail : anne.pichereau@math.univ-poitiers.fr (A. Pichereau).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.11.020

Dans cette Note, nous nous intéressons à la cohomologie de Poisson en dimension trois, pour une classe importante de structures de Poisson. Il s'agit des structures de Poisson sur $\mathcal{A} = \mathbf{F}[x, y, z]$ (où $\mathbf{F}$ est un corps commutatif et de caractéristique nulle) admettant un Casimir φ quasi-homogène et un lieu singulier réduit à l'origine. Nous précisons également la cohomologie de Poisson de la surface singulière $\mathcal{F}: \{\varphi = 0\}$. Nous remarquons que la cohomologie de Poisson de $\mathcal{A}$ est étroitement liée au type de la singularité de $\mathcal{F}$.

2. Le complexe de Poisson sur $\mathcal{A}$

Introduisons d'abord les structures de Poisson sur l'algèbre $\mathcal{A} = \mathbf{F}[x, y, z]$ que nous allons étudier. Pour $\varphi \in \mathcal{A}$, nous pouvons construire naturellement un crochet de Poisson sur $\mathcal{A}$, en posant : $\{\cdot, \cdot\}_\varphi = \imath_{\mathrm{d}\varphi}\Lambda$, où Λ désigne la tridérivation $\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z}$ et $\imath$ la contraction d'une multidérivation par une forme différentielle. Autrement dit, cette structure est définie par :

$$\{x, y\}_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \{y, z\}_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \{z, x\}_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{1}$$

Alors, φ étant un Casimir, la structure de Poisson se restreint à la surface $\mathcal{F} : \{\varphi = 0\}$. Nous allons supposer que φ est un polynôme quasi-homogène et à singularité isolée. Cette hypothèse se traduit géométriquement par le fait que la surface $\mathcal{F}$ admet l'origine comme singularité isolée. D'après (1), cela signifie aussi que le lieu singulier de $\{\cdot, \cdot\}_\varphi$ (c'est-à-dire le lieu où la structure de Poisson s'annule) est réduit à l'origine. On peut d'ailleurs montrer que toute structure de Poisson sur $\mathcal{A}$ à singularité isolée et admettant un Casimir polynomial (respectivement, quasi-homogène) est donnée par un crochet de la forme (1) (respectivement, avec φ quasi-homogène).

Afin de décrire le complexe de Poisson associé au crochet $\{\cdot, \cdot\}_\varphi$, nous utilisons les isomorphismes naturels : $\mathfrak{X}^0(\mathcal{A}) \simeq \mathfrak{X}^3(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{A}$, $\mathfrak{X}^1(A) \simeq \mathfrak{X}^2(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{A}^3$, où $\mathfrak{X}^k(\mathcal{A})$ désigne le $\mathcal{A}$-module des k-dérivations antisymétriques de $\mathcal{A}$. Ainsi $\{\cdot, \cdot\}_\varphi \in \mathfrak{X}^2(\mathcal{A})$ correspond au gradient $\vec{\nabla}\varphi \in \mathcal{A}^3$ et les opérateurs de cobord de Poisson, $\delta_\varphi^k : \mathfrak{X}^k(\mathcal{A}) \to \mathfrak{X}^{k+1}(\mathcal{A})$, pour $k = 0, 1, 2$ deviennent :

$$\delta_\varphi^0(f) = \vec{\nabla} f \times \vec{\nabla}\varphi, \quad \delta_\varphi^1(\vec{f}) = -\vec{\nabla}(\vec{f} \cdot \vec{\nabla}\varphi) + \operatorname{div}(\vec{f})\vec{\nabla}\varphi, \quad \delta_\varphi^2(\vec{f}) = -\vec{\nabla}\varphi \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}), \tag{2}$$

où $f \in \mathcal{A}$, $\vec{f} \in \mathcal{A}^3$ et $\vec{\nabla} \times \vec{f}$ désigne le rotationnel de $\vec{f}$ tandis que $\operatorname{div}(\vec{f})$ désigne sa divergence.

Le résultat suivant joue un rôle important dans les cohomologies de Poisson associées à φ que nous allons déterminer dans les chapitres suivants.

Proposition 2.1. *Pour $\varphi \in \mathcal{A}$, considérons le diagramme commutatif suivant, dont chaque colonne représente une partie du complexe* (*exact*) *de de Rham.*

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{F} \arrow[d] & \mathcal{A} \arrow[d, "\vec{\nabla}"] & \mathcal{A}^3 \arrow[d, "\vec{\nabla}\times"] & \\
 & 0 \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r, "\vec{\nabla}\varphi"] \arrow[d, "\vec{\nabla}"] & \mathcal{A}^3 \arrow[r, "\times\vec{\nabla}\varphi"] \arrow[d, "\vec{\nabla}\times"] & \mathcal{A}^3 \arrow[r, "\cdot\vec{\nabla}\varphi"] \arrow[d, "\operatorname{div}"] & \mathcal{A} \\
 & \mathcal{A} \arrow[r, "\vec{\nabla}\varphi"] \arrow[d, "\vec{\nabla}"] & \mathcal{A}^3 \arrow[r, "\times\vec{\nabla}\varphi"] \arrow[d, "\vec{\nabla}\times"] & \mathcal{A}^3 \arrow[r, "\cdot\vec{\nabla}\varphi"] \arrow[d, "\operatorname{div}"] & \mathcal{A} & \\
\mathcal{A} \arrow[r, "\vec{\nabla}\varphi"] & \mathcal{A}^3 \arrow[r, "\times\vec{\nabla}\varphi"] & \mathcal{A}^3 \arrow[r, "\cdot\vec{\nabla}\varphi"] & \mathcal{A} & &
\end{tikzcd}$$

Si le polynôme φ est quasi-homogène et à singularité isolée alors chacune des lignes de ce diagramme, qui définit le complexe dit de Koszul, est exacte. De plus, sous cette hypothèse, on a encore la propriété suivante : si $\vec{h} \in \mathcal{A}^3$ vérifie $(\vec{\nabla} \times \vec{h}) \cdot \vec{\nabla}\varphi = 0$, alors il existe $(f, g) \in \mathcal{A}^2$ tel que : $\vec{h} = \vec{\nabla} f + g\vec{\nabla}\varphi$.

3. Cohomologie de Poisson de $\left(\mathcal{A}, \{\cdot,\cdot\}_\varphi\right)$

Pour toute cette partie, nous allons nous donner, comme au chapitre précédent, un polynôme $\varphi \in \mathcal{A}$ quasi-homogène, de poids $w_1, w_2, w_3 \in \mathbf{N}^*$, et à singularité isolée. On appelle $|w|$ la somme des poids : $|w| = w_1 + w_2 + w_3$ et $\mathrm{d}^\circ_w(f)$ le degré d'un polynôme $f \in \mathcal{A}$ quasi-homogène. Puis, $\vec{e}_w$ désignera l'élément de $\mathcal{A}^3$ correspondant au champ de vecteurs (à poids) d'Euler : $\vec{e}_w = (w_1x, w_2y, w_3z)$.

On munit l'algèbre $\mathcal{A} = \mathbf{F}[x,y,z]$ de la structure de Poisson liée au polynôme φ et donnée en (1). On notera $\mathcal{A}_{\mathrm{sing}}$ l'algèbre de fonctions sur le lieu singulier de la structure de Poisson :

$$\mathcal{A}_{\mathrm{sing}} = \mathbf{F}[x,y,z] \Big/ \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right\rangle.$$

Puisque φ est à singularité isolée, $\mathcal{A}_{\mathrm{sing}}$ est de dimension de Krull nulle et donc c'est un $\mathbf{F}$-espace vectoriel de dimension finie égale au nombre μ de Milnor. Nous fixons $(u_0 = 1, u_1, \ldots, u_{\mu-1}) \in \mathcal{A}^\mu$ une base du $\mathbf{F}$-espace vectoriel $\mathcal{A}_{\mathrm{sing}}$, formée d'éléments quasi-homogènes.

Comme nous l'avons déjà mentionné, l'espace de cohomologie $H^0(\mathcal{A}, \varphi)$ est l'algèbre des Casimirs, notée aussi $\mathrm{Cas}(\mathcal{A}, \varphi)$ et la Proposition 2.1 nous permet de démontrer que $H^0(\mathcal{A}, \varphi)$ est égal au $\mathbf{F}$-espace vectoriel $\bigoplus_{i\in\mathbf{N}} \mathbf{F}\varphi^i$.

Pour les autres modules de cohomologie de Poisson, notre résultat est donné dans les théorèmes suivants.

Théorème 3.1. *Soit $\mathcal{A} = \mathbf{F}[x,y,z]$, munie de la structure de Poisson liée au polynôme $\varphi \in \mathcal{A}$, quasi-homogène et à singularité isolée. Alors, $H^1(\mathcal{A}, \varphi)$ est un module libre sur* $\mathrm{Cas}(\mathcal{A}, \varphi)$, *avec* :

$$H^1(\mathcal{A}, \varphi) \simeq \begin{cases} \{0\} & \text{si } \mathrm{d}^\circ_w(\varphi) \neq |w|\ ; \\ \mathrm{Cas}(\mathcal{A}, \varphi)\vec{e}_w = \displaystyle\bigoplus_{i\in\mathbf{N}} \mathbf{F}\varphi^i \vec{e}_w & \text{si } \mathrm{d}^\circ_w(\varphi) = |w|. \end{cases}$$

Théorème 3.2. *Sous les mêmes hypothèses que dans le Théorème* 3.1*, $H^3(\mathcal{A}, \varphi)$ est le* $\mathrm{Cas}(\mathcal{A}, \varphi)$*-module libre donné par* :

$$H^3(\mathcal{A}, \varphi) \simeq \bigoplus_{j=0}^{\mu-1} \mathrm{Cas}(\mathcal{A}, \varphi) u_j \simeq \mathrm{Cas}(\mathcal{A}, \varphi) \otimes_{\mathbf{F}} \mathcal{A}_{\mathrm{sing}},$$

tandis que $H^2(\mathcal{A}, \varphi)$ est le $\mathrm{Cas}(\mathcal{A}, \varphi)$*-module* :

$$H^2(\mathcal{A}, \varphi) \simeq \bigoplus_{\substack{j=1 \\ \mathrm{d}^\circ_w(u_j) \neq \mathrm{d}^\circ_w(\varphi) - |w|}}^{\mu-1} \mathrm{Cas}(\mathcal{A}, \varphi)\vec{\nabla} u_j \oplus \bigoplus_{\substack{j=0 \\ \mathrm{d}^\circ_w(u_j) = \mathrm{d}^\circ_w(\varphi) - |w|}}^{\mu-1} \mathrm{Cas}(\mathcal{A}, \varphi) u_j \vec{\nabla}\varphi \oplus \bigoplus_{\substack{j=1 \\ \mathrm{d}^\circ_w(u_j) = \mathrm{d}^\circ_w(\varphi) - |w|}}^{\mu-1} \mathbf{F}\vec{\nabla} u_j,$$

où les deux premiers termes donnent la partie libre de ce module sur $\mathrm{Cas}(\mathcal{A}, \varphi)$. *En particulier, $H^2(\mathcal{A}, \varphi) \simeq \bigoplus_{j=1}^{\mu-1} \mathrm{Cas}(\mathcal{A}, \varphi)\vec{\nabla} u_j$, si $\mathrm{d}^\circ_w(\varphi) < |w|$ et $H^2(\mathcal{A}, \varphi) \simeq \bigoplus_{j=1}^{\mu-1} \mathrm{Cas}(\mathcal{A}, \varphi)\vec{\nabla} u_j \oplus \mathrm{Cas}(\mathcal{A}, \varphi)\vec{\nabla}\varphi$, si $\mathrm{d}^\circ_w(\varphi) = |w|$.*

Il est intéressant de voir que $H^3(\mathcal{A}, \varphi)$ est exactement l'algèbre des Casimirs tensorisée avec l'algèbre de fonctions du lieu singulier de la structure de Poisson. De plus, l'étude de $H^2(\mathcal{A}, \varphi)$ montre que la structure de Poisson $\{\cdot,\cdot\}_\varphi$ est exacte (i.-e. : triviale dans $H^2(\mathcal{A}, \varphi)$) si et seulement si le degré de φ est différent de la somme des poids, ce qui vient du fait que le cobord du champ de vecteurs d'Euler satisfait à $\delta^1_\varphi(\vec{e}_w) = -(\mathrm{d}^\circ_w(\varphi) - |w|)\vec{\nabla}\varphi$. Dans le cas contraire, les espaces de cohomologie de Poisson sont toujours des modules libres sur les Casimirs. La structure d'anneau sur $H^*(\mathcal{A}, \varphi)$ se retrouve grâce à la formule d'Euler : $\vec{e}_w \cdot \vec{\nabla} f = \mathrm{d}^\circ_w(f) f$, pour $f \in \mathcal{A}$ quasi-homogène.

Pour $\varphi \in \mathcal{A}$, la structure de Poisson $\{\cdot,\cdot\}_\varphi$ est toujours unimodulaire car le champ modulaire est nul (voir [4]). On en déduit que l'homologie et la cohomologie de Poisson de $\mathcal{A}$ sont isomorphes, en ce sens que, pour tout

$0 \leqslant k \leqslant 3$, on a : $H_k(\mathcal{A},\varphi) \simeq H^{3-k}(\mathcal{A},\varphi)$, où $H_k(\mathcal{A},\varphi)$ désigne le k-ième espace d'homologie de Poisson de l'algèbre de Poisson $(\mathcal{A},\{\cdot\,,\cdot\}_\varphi)$.

4. Cohomologie de Poisson de la surface singulière

Dans cette partie, $\varphi \in \mathcal{A}$ désigne toujours un polynôme quasi-homogène à singularité isolée. Soit $\mathcal{A}_\varphi = \mathcal{A}/\langle\varphi\rangle$ l'algèbre de fonctions sur la surface singulière $\mathcal{F} : \{\varphi = 0\}$, que l'on munit de la restriction de $\{\cdot\,,\cdot\}_\varphi$ à $\mathcal{F}$. Les $\mathcal{A}_\varphi$-modules des multidérivations antisymétriques sur $\mathcal{A}_\varphi$ sont donnés par :

$$\mathfrak{X}^0(\mathcal{A}_\varphi) \simeq \mathcal{A}_\varphi, \quad \mathfrak{X}^1(\mathcal{A}_\varphi) \simeq \left\{\vec{f} \in \mathcal{A}^3 \mid \vec{f}\cdot\vec{\nabla}\varphi \in \langle\varphi\rangle\right\}, \quad \mathfrak{X}^2(\mathcal{A}_\varphi) \simeq \left\{\vec{f} \in \mathcal{A}^3 \mid \vec{f}\times\vec{\nabla}\varphi \in \langle\varphi\rangle\right\},$$

et $\mathfrak{X}^k(\mathcal{A}_\varphi) \simeq \{0\}$ pour $k \geqslant 3$. Le cobord de Poisson sur $\mathcal{A}_\varphi$ est obtenu par passage au quotient de celui sur $\mathcal{A}$. Pour l'algèbre de Poisson $\mathcal{A}_\varphi$, la Proposition 2.1 nous permet d'écrire : $H^0(\mathcal{A}_\varphi) \simeq \mathbf{F}$. Puis, pour calculer $H^1(\mathcal{A}_\varphi)$, on utilise successivement les calculs de $H^2(\mathcal{A},\varphi)$ et de $H^1(\mathcal{A},\varphi)$ tandis que, dans l'obtention de $H^2(\mathcal{A}_\varphi)$, c'est de nouveau la Proposition 2.1 et la nature des Casimirs de $\mathcal{A}_\varphi$ qui interviennent. Le résultat est précisé dans le théorème suivant.

Théorème 4.1. *On considère l'algèbre quotient $\mathcal{A}_\varphi$ munie de la structure de Poisson naturelle provenant de $\{\cdot\,,\cdot\}_\varphi$. Alors, on a* :

$$H^1(\mathcal{A}_\varphi) \simeq \bigoplus_{\substack{j=0\\ \mathrm{d}^\circ_w(u_j)=\mathrm{d}^\circ_w(\varphi)-|w|}}^{\mu-1} \mathbf{F}u_j\vec{e}_w, \qquad H^2(\mathcal{A}_\varphi) = \bigoplus_{\substack{j=0\\ \mathrm{d}^\circ_w(u_j)=\mathrm{d}^\circ_w(\varphi)-|w|}}^{\mu-1} \mathbf{F}u_j\vec{\nabla}\varphi.$$

On en déduit l'isomorphisme naturel $H^1(\mathcal{A}_\varphi) \xrightarrow{\sim} H^2(\mathcal{A}_\varphi)$, donné par $\vec{e}_w \mapsto \vec{\nabla}\varphi$.

Remerciements

Je suis heureuse de pouvoir ici remercier mon directeur de thèse, Pol Vanhaecke, pour tout le temps et l'aide qu'il m'a donnés et peut-être surtout pour m'avoir initiée à de si jolies Mathématiques. Il est également important pour moi de saluer Claude Quitté dont la connaissance des suites régulières m'a été précieuse et Camille Laurent pour ses explications sur la classe modulaire.

Références

[1] A. Lichnerowicz, Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées, J. Differential Geom. 12 (1977) 253–300.
[2] P. Monnier, Poisson cohomology in dimension two, Israel J. Math. 129 (2002) 189–207.
[3] C. Roger, P. Vanhaecke, Poisson cohomology of the affine plane, J. Algebra 251 (2002) 448–460.
[4] P. Xu, Gerstenhaber algebras and BV-algebras in Poisson geometry, Commun. Math. Phys. 200 (1999) 545–560.