Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 263–268
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse complexe

Prolongement d'un courant positif à travers une sous-variété non Levi-plate

Khalifa Dabbek, Fredj Elkhadhra

Faculté des sciences de Monastir, 5019 Monastir, Tunisie

Reçu le 8 août 2004 ; accepté après révision le 29 octobre 2004

Disponible sur Internet le 21 janvier 2005

Présenté par Jean-Pierre Demailly

Résumé

Le but de cette Note est de montrer un résultat de prolongement des courants positifs qui vérifient l'une des conditions suivantes : $dd^cT \leqslant 0$ ou l'un des courants dT ou dd^cT est de masse localement finie, à travers une variété non Levi-plate de classe $\mathcal{C}^2$. On montre dans la première partie qu'un courant positif de dimension p défini en dehors des zéros d'une fonction strictement k-convexe de classe $\mathcal{C}^2$ ($k \leqslant p-1$) et tel que son bord se prolonge en un courant de masse localement finie, se prolonge lui même en un courant de masse localement finie. On retrouve un résultat de S. Giret dans le cas d'une sous-variété Cauchy–Riemann. ***Pour citer cet article : K. Dabbek, F. Elkhadhra, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

Extension of a positive current across a non-Levi-flat submanifold. The purpose of this Note is to prove an extension result for positive currents satisfying one of the following conditions: either $dd^cT \leqslant 0$ or one of the currents dT or dd^cT is of locally finite mass, across of a non-Levi-flat submanifold of class $\mathcal{C}^2$. We prove in the first part that a positive current of dimension p defined in the complement of the zero set of a strictly k-convex function of class $\mathcal{C}^2$ ($k \leqslant p-1$) and such that dT is of locally finite mass, is itself of locally finite mass. We recover a result of S. Giret in the case of a Cauchy–Riemann subvariety. ***To cite this article: K. Dabbek, F. Elkhadhra, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abridged English version

Let Ω be an open subset of $\mathbb{C}^n$ and A a closed subset of Ω. For a current T defined on $\Omega \setminus A$, we say that the trivial extension $\widetilde{T}$ of T exists on Ω if the mass of T is locally finite near every point of A. We say that a current

Adresse e-mail : fredj.elkhadhra@fsm.rnu.tn (F. Elkhadhra).

1631-073X/$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2004.11.010

T satisfy a standard condition of extension if one of the following conditions is satisfied: $dd^cT \leqslant 0$ or one of the currents $\widetilde{dT}$, $\widetilde{dd^cT}$ exists.

Théorème 0.1. *Let Ω be an open set of $\mathbb{C}^n$ and u be a positive strictly k-convex function on Ω. Let $A = u^{-1}(\{0\})$ and T be a positive current of bidimension (p, p) on $\Omega \setminus A$. We suppose that $\widetilde{dT}$ exists on $\Omega \setminus A$. If $p \geqslant k+1$, then $\widetilde{T}$ exists. If $p \geqslant k+2$ and A is of class $\mathcal{C}^2$, then $d\widetilde{T} = \widetilde{dT}$.*

Remark 1. In [1], Theorem 0.1 has been proved when $\widetilde{dd^cT}$ exists or $dd^cT \leqslant 0$.

As a consequence, we recover the following result of Giret [4].

Corollaire 0.2. *Let Ω be an open set of $\mathbb{C}^n$ and let A be a Cauchy–Riemann subvariety of class $\mathcal{C}^2$ in Ω of CR-dimension k. Let T be a positive current of bidimension (p, p) on $\Omega \setminus A$ such that $\widetilde{dT}$ exists. If $p \geqslant k+1$, then $\widetilde{T}$ exists. If $p \geqslant k+2$, then $d\widetilde{T} = \widetilde{dT}$.*

If K is a compact complete pluripolar set K, we prove

Corollaire 0.3. *Let K be a compact complete pluripolar subset of an open set Ω of $\mathbb{C}^n$ and T a positive current of bidimension (p, p), $p \geqslant 1$ on $\Omega \setminus K$ such that $\widetilde{dT}$ exists. Then, $\widetilde{T}$ exists and $d\widetilde{T} = \widetilde{dT}$.*

In Corollary 0.3, K can have a high Hausdorff dimension (cf. [2]). If $\widetilde{dd^cT}$ exists or $dd^cT \leqslant 0$, we prove that $\widetilde{T}$ exists for $p \geqslant 1$, and that $dd^c\widetilde{T} = \widetilde{dd^cT}$ for $p \geqslant 2$ (cf. [1]).

Let M be a generic submanifold in Ω of codimension $m \geqslant 2$, such that

$$M = \{z \in \Omega,\ \rho_1(z) = \cdots = \rho_m(z) = 0\}, \tag{1}$$

where $\rho_j \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ and $\partial\rho_1(z) \wedge \ldots \wedge \partial\rho_m(z) \neq 0$ on M. Then, we have:

Théorème 0.4. *Let M be a submanifold of the form* (1) *in an open set Ω of $\mathbb{C}^n$ and let T be a positive current of bidimension (p, p) on $\Omega \setminus M$ such that T satisfies a standard condition of extension. If $p \geqslant \operatorname{def}_z M + 1$ for every $z \in M$, then $\widetilde{T}$ exists.*

If T is closed and positive, this is a result of Rigat [6].

1. Introduction

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $\mathcal{D}_{p,q}(\Omega)$ l'espace des formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ de bidegrés (p, q) et à support compact dans Ω. Un courant T de bidimension (p, p) sur Ω est un élément du dual topologique $\mathcal{D}_{p,p}(\Omega)$. On dit que T est *positif* si pour toutes formes $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ dans l'espace $\mathcal{D}_{1,0}(\Omega)$, la distribution $T \wedge i\alpha_1 \wedge \bar{\alpha}_1 \wedge \cdots \wedge i\alpha_p \wedge \bar{\alpha}_p$ est une mesure positive sur Ω. Soit $\beta = dd^c|z|^2$ la forme de Kähler sur $\mathbb{C}^n$, il existe une constante $c > 0$ qui ne dépend que de n et p telle que, pour chaque ouvert $\Omega_1 \subset \Omega$, la masse de T, $\|T\|_{\Omega_1} := \sup\{|T(\varphi)|;\ \varphi \in \mathcal{D}_{p,p}(\Omega_1),\ \|\varphi\| \leqslant 1\}$, portée par Ω_1, vérifie $\frac{1}{c}T \wedge \beta^p(\Omega_1) \leqslant \|T\|_{\Omega_1} \leqslant cT \wedge \beta^p(\Omega_1)$. Soit A un fermé de Ω. Lorsque T est défini sur $\Omega \setminus A$ on dit que l'extension triviale $\widetilde{T}$ existe si T est de masse localement finie au voisinage des points de A, et on pose alors $\widetilde{T}$ égal à zéro au dessus de A. On dit que T vérifie une condition standard de prolongement à travers A si l'une au moins des conditions suivantes est vérifiée :

$$(\mathrm{CP}_1)\ \widetilde{dT}\ \textit{existe}\ ;\ \ (\mathrm{CP}_2)\ \widetilde{dd^cT}\ \textit{existe}\ ;\ \ (\mathrm{CP}_3)\ \ dd^cT \leqslant 0.$$

2. Prolongement de courants à travers les zéros d'une fonction strictement k-convexe

Dans cette section, on démontre un résultat de prolongement d'un courant positif dont le bord est de masse localement finie à travers les zéros d'une fonction strictement k-convexe.

Définition 2.1. Soit u une fonction continue à valeurs réelles définie dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$, u est dite k-convexe s'il existe une $(1,1)$-forme continue w dans Ω, admettant en chaque point $(n-k)$-valeurs propres strictement positives telle que le courant $dd^c u - w$ soit positif dans Ω.

Lemme 2.2 [3]. *Soit u une fonction strictement k-convexe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$, soit $\gamma \geqslant 0$ une $(1,1)$-forme à coefficients continus dans Ω alors pour tout $z \in \Omega$, il existe un voisinage V_z de z dans Ω et une fonction f strictement plurisoushamonique dans V_z tels que* :

$$dd^c u \wedge (dd^c f)^k - \gamma^{k+1} \quad \textit{soit positif dans } V_z.$$

Théorème 2.3. *Soient u une fonction strictement k-convexe positive sur Ω, $A = u^{-1}(0)$ et T un courant positif de bidimension (p,p) sur $\Omega \setminus A$. Supposons que $\widetilde{dT}$ existe. Alors si $p \geqslant k+1$, le courant $\widetilde{T}$ existe. Si $p \geqslant k+2$ et A de classe $\mathcal{C}^2$, on a $d\widetilde{T} = \widetilde{dT}$.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \setminus A)$. En effet, comme u est k-convexe, il existe un système de coordonnées sur $\mathbb{C}^n$ et $\lambda > 0$ tel que $dd^c u \geqslant -\lambda\beta' + \beta''$ sur Ω (en restreignant Ω si nécessaire), avec $\beta' = dd^c|z'|^2$ et $\beta'' = dd^c|z''|^2$, ($z' = (z_1, \ldots, z_k)$ et $z'' = (z_{k+1}, \ldots, z_n)$). Soit $u_1 = u + (1+\lambda)|z'|^2$, alors u_1 est continue et strictement psh ($dd^c u_1 \geqslant \lambda\beta$). D'après Richberg, il existe v une fonction strictement psh, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\Omega \setminus A$ telle que $u_1(z) \leqslant v(z) \leqslant u_1(z) + d(z,A)$ en tout point z de Ω. Prenons la fonction $v_1 = v - (1+\lambda)|z'|^2$, comme v est strictement psh on a v_1 est k-convexe. De plus, on a $v_1 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \setminus A)$ et pour tout z dans Ω, $u(z) \leqslant v(z) \leqslant u(z) + d(z,A)$, donc $A = v^{-1}(\{0\})$. Dans la suite on travaille avec u à la place de v. Le problème étant local, et en supposant par exemple que $0 \in A$ et que la boule unité $B = B(0,1)$ est incluse dans Ω, il existe d'après le Lemme 2.2 une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ et strictement psh sur B telle que

$$dd^c u \wedge (dd^c f)^k \geqslant \beta^{k+1},$$

donc $T \wedge dd^c u \wedge (dd^c f)^k \wedge \beta^{p-k-1} \geqslant T \wedge \beta^p$ sur $B \setminus A$. Montrons que T est de masse localement finie sur $B(0,1/4)$. Soient $K = \{z \in A,\ 1/2 \leqslant |z| \leqslant 3/4\}$, h une fonction négative de classe $\mathcal{C}^2$ dans B telle que h soit nulle sur $B(0,1/4)$ et égale à -1 sur $B(0,3/4) \setminus B(0,1/2)$. Soit $\delta > 0$ de sorte que sur B on ait $dd^c(u+\delta h) \wedge (dd^c f)^k \geqslant \frac{1}{2}\beta^{k+1}$. Pour $\varepsilon > 0$, posons $\widetilde{u_\varepsilon} = \max(u + \delta h - \varepsilon, 0)$, alors $\widetilde{u_\varepsilon} \equiv 0$ dans un voisinage U de K indépendent de ε. En effet, si $x \in K$ alors $u(x) + \delta h(x) - \varepsilon = -\delta - \varepsilon < -\delta$ et cette fonction est continue donc il existe U un voisinage ouvert de K tel que $u + \delta h - \varepsilon < -\delta/2$.

Soit U_1 un voisinage de K tel que $U_1 \subset\subset U$ et désignons par u_ε une régularisée $\mathcal{C}^\infty$ de $\widetilde{u_\varepsilon}$ nulle dans U_1 et vérifiant $dd^c u_\varepsilon \wedge (dd^c f)^k \geqslant \frac{1}{4}\beta^{k+1}$ sur $B(0,1/4) \cap \{\widetilde{u_\varepsilon} > \varepsilon\}$. Le courant $u_\varepsilon T$ est bien défini car u_ε est nulle au voisinage de A. Soit $\theta \in \mathcal{D}(B)$, positive, à support dans $B(0,3/4)$ et valant 1 au voisinage de $B(0,1/2)$. On a $\theta dd^c u_\varepsilon = d(\theta d^c u_\varepsilon) - d\theta \wedge d^c u_\varepsilon$. Si $\widetilde{dT}$ existe, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \int\limits_{B(0,1/4)\cap\{\widetilde{u_\varepsilon}>\varepsilon\}} T \wedge \beta^p &\leqslant \int \theta dd^c u_\varepsilon \wedge T \wedge (dd^c f)^k \wedge \beta^{p-k-1} \\
&= \int \theta dT \wedge d^c u_\varepsilon \wedge (dd^c f)^k \wedge \beta^{p-k-1} - \int d\theta \wedge d^c u_\varepsilon \wedge T \wedge (dd^c f)^k \wedge \beta^{p-k-1} \\
&\leqslant C_1 \|dT\|_{(B(0,3/4)\setminus A)} + C_2 \|T\|(V),
\end{aligned}$$

où $V = (B(0,3/4) \setminus B(0,1/2)) \setminus U_1$. On fait tendre ε vers 0, on trouve que $\widetilde{T}$ existe. D'après le choix de θ et u_ε, la forme $d\theta \wedge d^c u_\varepsilon$ est à support loin de l'obstacle.

Si $p \geqslant k+2$, par un argument de tranchage, il suffit de prouver le cas où $k=0$, c'est-à-dire $p \geqslant 2$ et u est strictement psh. Dans ce cas, on peut supposer que A est une variété totalement réelle de classe $\mathcal{C}^2$. Alors d'après ([2], Lemma 3.8), il existe une fonction u positive, psh, de classe $\mathcal{C}^2$, telle que $du^{1/2}, d^c u^{1/2}$ soient à coefficients bornés et $A \subset u^{-1}(0)$. De plus, la fonction $v = u^{1/2} + \|z\|^2$ est psh. D'après la démonstration de l'existence de $\widetilde{T}$, le courant $T \wedge dd^c v$ est de masse localement finie sur Ω. Alors pour tout compact K de Ω, on a

$$\int_{K \smallsetminus A} T \wedge \beta^{p-1} \wedge dd^c u^{1/2} < +\infty,$$

$$\int_{K \smallsetminus A} T \wedge \beta^{p-2} \wedge dd^c u^{1/2} \wedge du^{1/2} \wedge d^c u^{1/2} = \frac{1}{2} \int_{K \smallsetminus A} T \wedge \beta^{p-2} \wedge \frac{dd^c u \wedge du \wedge d^c u}{u^{3/2}}.$$

Comme $du^{1/2} \wedge d^c u^{1/2}$ est à coefficients bornés, l'intégrale précédente est finie. D'autre part,

$$\begin{aligned}\int_{K \smallsetminus A} T \wedge \beta^{p-2} \wedge dd^c u^{1/2} \wedge dd^c u &= \frac{1}{2} \int_{K \smallsetminus A} T \wedge \beta^{p-2} \wedge \frac{(dd^c u)^2}{u^{1/2}} - \frac{1}{4} \int_{K \smallsetminus A} T \wedge \beta^{p-2} \wedge \frac{dd^c u \wedge du \wedge d^c u}{u^{3/2}} \\ &= (A) - (B).\end{aligned}$$

L'intégrale de gauche est finie. Comme (B) est finie, on voit que (A) est encore finie.

Soit $\rho : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction positive de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\rho(t) = 0$ si $t < 1/2$ et $\rho(t) = 1$, pour $t > 1$. Posons $\rho_r(t) = \rho(t/r)$ alors $\widetilde{T} = \lim_{r \to 0} \rho_r(u) T$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}_{(0,1)}(\Omega)$, on montre que $\lim_{r\to 0} \langle T, d\rho_r(u) \wedge \varphi \wedge \beta^{p-1} \rangle = 0$ (pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_{(p-1,p)}(\Omega)$, on peut l'écrire sous la forme $\varphi = \sum_{j=1}^N \varphi_j \wedge \omega_j$ où $\varphi_j \in \mathcal{D}_{(0,1)}(\Omega)$ et ω_j une $(p-1, p-1)$-forme fortement positive à coefficients constants, voir [2], page 18). D'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz on a

$$\begin{aligned}\left|\left\langle T \wedge \beta^{p-1}, d\rho_r(u) \wedge \varphi \right\rangle\right| &= \left|\left\langle T \wedge \beta^{p-1}, \frac{u}{r} \rho'\left(\frac{u}{r}\right) \frac{du \wedge \varphi}{u} \right|\right. \\ &\leqslant \left|\left\langle T \wedge \beta^{p-1}, \frac{u}{r} \rho'\left(\frac{u}{r}\right) \frac{du \wedge d^c u}{u^{3/2}} \right\rangle\right|^{1/2} \left|\left\langle T \wedge \beta^{p-1}, \frac{u}{r} \rho'\left(\frac{u}{r}\right) \frac{i\bar{\varphi} \wedge \varphi}{u^{1/2}} \right\rangle\right|^{1/2}.\end{aligned}$$

Comme (A) et (B) sont finies et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|t\rho'(t)| \leqslant$ constante (car $\rho'(t)$ est à support compact), le théorème de la convergence dominé montre que les termes de droite tendent vers zéro. Il en résulte que $d\widetilde{T} = \widetilde{dT}$.

Comme conséquence du Théorème 2.3, on retrouve le résultat suivant dû à Giret [4].

Corollaire 2.4. *Soient A une sous-variété $\mathcal{C}^2$ dont la dimension CR est k, et T un courant positif de bidimension (p, p) sur $\Omega \smallsetminus A$. Si $p \geqslant k+1$ et $\widetilde{dT}$ existe, alors $\widetilde{T}$ existe. Si de plus $p \geqslant k+2$, alors $d\widetilde{T} = \widetilde{dT}$.*

Démonstration. D'après El Mir [2], localement il existe une fonction ρ, k-convexe de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $A = \rho^{-1}(\{0\})$. Il suffit alors d'appliquer le Théorème 2.3.

Remarque 1. Pour un courant positif fermé et A de classe $\mathcal{C}^2$, on retrouve ainsi un résultat de El Mir [2] amélioré ultérieurement par Rapp [5] dans le cas où A est de classe $\mathcal{C}^1$.

Corollaire 2.5. *Soient K un compact pluripolaire complet d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ et T un courant positif de bidimension (p, p), $p \geqslant 1$ sur $\Omega \smallsetminus K$ tel que $\widetilde{dT}$ existe. Alors, $\widetilde{T}$ existe et $\widetilde{dT} = d\widetilde{T}$.*

Démonstration. D'après [2], il existe un ouvert strictement pseudoconvexe $\Omega' \subset \mathbb{C}^n$, tel que $K \subset \Omega' \subset\subset \Omega$, et une fonction négative psh u sur Ω' qui vérifie $K = \{z \in \Omega',\ u(z) = -\infty\}$, et telle que e^{-u} soit continue. Soit φ une fonction continue, exhaustive et strictement psh sur Ω' et soit $c = \sup\{\varphi(z), z \in K\}$. On considère la suite

$$u_n = \sup\left(\varphi - c - \frac{1}{n}, e^{(1/n)u+\|z\|^2} - \frac{1}{n}, 0\right).$$

Soit $K_n = \{z \in \Omega';\ u_n(z) = 0\}$. D'après la démonstration du Théorème 1, on peut trouver une constante C telle que $\|T\|_{\Omega' \setminus K_n} < C$ pour tout n. Alors $\widetilde{T}$ existe. D'après [7], on a $\widetilde{dT} = d\widetilde{T}$.

3. Prolongement de courants à travers des sous variétés non Levi-plates

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et M une variété générique de codimension $m \geqslant 2$,

$$M = \{z \in \Omega,\ \rho_1(z) = \cdots = \rho_m(z) = 0\}, \tag{1}$$

où $\rho_j \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ et $\partial\rho_1(z) \wedge \cdots \wedge \partial\rho_m(z) \neq 0$ sur M.

Notons $\langle \cdots, \cdots \rangle$ le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^m$ et S^{m-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^m$. Pour tout $\beta \in S^{m-1}$, considérons la dimension complexe maximale $s_z(\beta)$ des sous-espaces vectoriels complexes de $H_z(M)$ (l'espace tangent complexe à M en z) inclus dans l'espace des zéros de la fonction $H_z(M) \in w \mapsto L(\langle \beta, \tilde{\rho}\rangle(z))(w)$, où $\tilde{\rho} = (\rho_1, \ldots, \rho_m)$ et $L(\langle \beta, \tilde{\rho}\rangle(z))$ désigne la forme de Levi de la fonction $\langle \beta, \tilde{\rho}\rangle$ au point z. Pour tout $\alpha \in S^{m-1}$, posons $d_z(\alpha) = \inf\{s_z(\beta),\ \beta \in S^{m-1}$ et $\langle \alpha, \beta\rangle = 0\}$ puis $\mathrm{def}_z(M) = \sup\{d_z(\alpha),\ \alpha \in S^{m-1}\}$. On appelle ce nombre le défaut de Levi de la variété M en z. Ce nombre est invariant biholomorphe de M, compris entre 1 et $\dim_{CR} M$ et qui mesure le degré de « Levi-platitude » de M. Par exemple, si les fonctions ρ_j sont pluriharmoniques, $\mathrm{def}_z(M)$ atteint sa valeur maximale $\dim_{CR} M$. Réciproquement, si $\mathrm{def}_z(M)$ est petit par rapport à $\dim_{CR} M$, alors la forme de Levi de M est suffisamment « non dégénérée ».

Exemples 1.

1. Si $M = S^{2n-1} \times S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^{2n}$, alors $\dim_{CR} M = 2n - 2$ et $\mathrm{def}(M) = n - 1$ en tout point de M.
2. Si $M = (S^3)^n \subset \mathbb{C}^{2n}$, alors $\dim_{CR} M = n$ et $\mathrm{def}(M) = 1$ en tout point de M.

Théorème 3.1. *Soit M une sous-variété de la forme* (1) *dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ et soit T un courant positif de bidimension (p, p) sur $\Omega \setminus M$ tel que T vérifie une condition standard de prolongement. Si $p \geqslant \mathrm{def}_z M + 1$ pour tout $z \in M$, alors $\widetilde{T}$ existe.*

Remarque 2. Si T est positif fermé on retrouve le résultat de Rigat [6]. Si M est une sous-variété Cauchy–Riemann de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\dim_{CR} M < p - 1$, on retrouve le Corollaire 2.4.

Tout d'abord rappelons quelques définitions et résultats issus du travail de Sukhov [8].

Définition 3.2. Une variété $\mathcal{C}^2$ générique M vérifie les conditions du Théorème 3.1 est appelée k-pseudoconcave en $z \in M$ si et seulement si 0 est un élément de l'enveloppe convexe conique de l'ensemble des $\alpha \in S^{m-1}$ tels que la forme de Levi de $\langle \alpha, \tilde{\rho}\rangle$ ait au minimum k valeurs propres strictement positives sur $H_z(M)$.

Définition 3.3. Soient V un cône de $\mathbb{R}^m$ et V^* son cône conjugué, i.e. $V^* = \{\alpha \in \mathbb{R}^m,\ \langle \alpha, \beta\rangle \geqslant 0, \forall \beta \in V\}$. Pour $r > 0$, on appelle *domaine standard* $M(z, r, V)$ un domaine de la forme

$$M(z, r, V) = \{\xi \in \mathbb{C}^n,\ \|z - \xi\| < r \text{ et } \rho(\xi) \in V\}.$$

On dit que $M(z,r,V)$ est k-pseudoconcave en $z \in M$ si est seulement si M est k-convexe en z dans la direction d'un $\sigma \in V^* \smallsetminus \{0\}$, i.e. si la forme de Levi de $\langle\sigma,\rho\rangle$ possède au moins k valeurs propres strictement positives sur $H_z(M)$.

Théorème 3.4 [8]. *Soit M une sous-variété comme dans le Théorème* 3.1, *alors M est $(n-m-\mathrm{def}_z M)$-pseudoconcave pour tout $z \in M$. Par suite il existe $r > 0$ et un nombre fini de cônes $V_j \subset \mathbb{R}^m$, $j = 1,\dots,N$, tels que les $M(z,r,V_j)$ sont $(n-m-\mathrm{def}_z M)$-pseudoconcave en z et tels que $B(z,r) \smallsetminus M = \bigcup_{j=1}^N M(z,r,V_j)$.*

Démonstration. La démonstration va se faire en deux étapes. Tout d'abord montrons que T est de masse localement finie au voisinage des points de M. Soit $z \in M$. D'après le Théorème 3.4, il suffit de montrer que la masse de T est bornée dans chaque $M(z,r,V_j)$ au voisinage de M. Pour cela, soit $j \in \{1,\dots,N\}$ et $\sigma_j \in V^* \smallsetminus \{0\}$ tels que la forme de Levi $\langle\sigma_j,\rho\rangle$ ait au moins $(n-m-\mathrm{def}_z M)$-valeurs propres strictement positives sur $H_z(M)$. Il existe $C_j > 0$ tel que la forme de Levi de $\phi_j = \langle\sigma_j,\rho\rangle + C_j \sum_{k=1}^m \rho_k^2$ ait au moins $(n-\mathrm{def}_z M-1)$-valeurs propres strictement positives sur l'espace tangent à l'hypersurface $\{\xi \in B(z,r),\ \phi_j(\xi) = 0\}$ en z. On a $d\phi_j = \langle\sigma_j + 2C_j\rho, d\rho\rangle$ et donc l'hypothèse $\sigma_j \neq 0$ implique que $d\phi_j \neq 0$. En particulier, il existe $\lambda_j > 0$ tel que la forme de Levi de $\psi_j = \mathrm{e}^{\lambda_j\phi_j} - 1$ ait $(n-\mathrm{def}_M)$-valeurs propres > 0 sur $\mathbb{C}^n$. Soit $D_j(r) = \{z \in B(\xi,r),\ \psi_j(z) > 0\}$; on a $M(\xi,r'_j,V_j) \subset D_j(r_j)$ pour $r'_j \ll 1$. D'après les Théorèmes 1 et 4 de [1], T est de masse bornée au voisinage des points de M, car le complémentaire de M sera la réunion des $D_j(r'_j)$, de plus ψ_j est strictement def_z-convexe sur $D_j(r'_j)$ dans les trois cas et $p \geqslant \mathrm{def}_z M + 1$.

Références

[1] K. Dabbek, F. Elkhadhra, H. El Mir, Extension of plurisubharmonic currents, Math. Z. 245 (2003) 455–481.
[2] H. El Mir, Sur le prolongement des courants positifs fermés, Acta. Math. 153 (1984) 1–45.
[3] H. El Mir, Prolongement des courants positifs fermés et fonctions k-convexe, in: Complex Analysis and Applications '85, Sofia, 1986.
[4] S. Giret, Sur le tranchage et le prolongement de courants, Thèse d'université, Poitiers, 1998.
[5] M. Rapp, Continuation of positive, closed currents and analytic sets, Math. Z. 214 (1993) 155–178.
[6] S. Rigat, Prolongement des courants positifs fermés à travers des variétés CR, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 330 (2000) 663–668.
[7] N. Sibony, Quelques problèmes de prolongement de courants en analyse complexe, Duke Math. J. 52 (1985) 157–197.
[8] A.B. Sukhov, On removable singularities of complex analytic sets, Indiana Univ. Math. J. 41 (3) (1992) 741–754.