Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 15–19

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Algèbre homologique

Une structure de catégorie de modèles de Quillen sur la catégorie des dg-catégories

Goncalo Tabuada [1]

Université Paris 7 – Denis Diderot, UMR 7586 du CNRS, case 7012, 2, place Jussieu, 75251 Paris cedex 05, France

Reçu le 30 juillet 2004 ; accepté après révision le 2 novembre 2004

Disponible sur Internet le 19 décembre 2004

Présenté par Christophe Soulé

Résumé

Nous construisons une structure de catégorie de modèles de Quillen à engendrement cofibrant sur la catégorie des petites catégories différentielles graduées. ***Pour citer cet article : G. Tabuada, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***
© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

A Quillen model structure on the category of dg categories. We construct a cofibrantly generated Quillen model structure on the category of small differential graded categories. ***To cite this article: G. Tabuada, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***
© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Let k be a commutative ring with unit. By a *dg category*, we mean a differential graded k-category [6,2]. Let **DCAT** be the category of small dg categories.

We will introduce a cofibrantly generated Quillen model structure on **DCAT** such that the weak equivalences will be the quasi-equivalences [6]. We will use the recognition theorem stated in [4, 2.1.19]. We now introduce the notations needed to define the sets I (resp. J) of generating cofibrations (resp. acyclic generating cofibrations).

Following [2, 3.7.1], we define $\mathcal{K}$ to be the dg category that has two objects 1, 2 and whose morphisms are generated by $f \in \mathrm{Hom}^0_{\mathcal{K}}(1,2)$, $g \in \mathrm{Hom}^0_{\mathcal{K}}(2,1)$, $r_1 \in \mathrm{Hom}^{-1}_{\mathcal{K}}(1,1)$, $r_2 \in \mathrm{Hom}^{-1}_{\mathcal{K}}(2,2)$ and $r_{12} \in \mathrm{Hom}^{-2}_{\mathcal{K}}(1,2)$ subject to the relations $\mathrm{d}f = \mathrm{d}g = 0$, $\mathrm{d}r_1 = gf - \mathbf{1}_1$, $\mathrm{d}r_2 = fg - \mathbf{1}_2$ and $\mathrm{d}r_{12} = fr_1 - r_2 f$. Let $\mathcal{A}$ be the dg

Adresse e-mail : tabuada@math.jussieu.fr (G. Tabuada).
[1] Soutenu par FCT-Portugal, bourse SFRH/BD/14035/2003.

1631-073X/$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2004.11.007

category with one object 3, such that $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(3,3)=k$. Let F be the dg functor from $\mathcal{A}$ to $\mathcal{K}$ that sends 3 to 1. Let $\mathcal{B}$ be the dg category with two objects 4 and 5 such that $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(4,4)=k$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(5,5)=k$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(4,5)=0$ and $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(5,4)=0$. Let $n\in\mathbb{Z}$. Let S^{n-1} be the complex $k[n-1]$ and let D^n be the mapping cone on the identity of S^{n-1}. We denote by $\mathcal{P}(n)$ the dg category with two objects 6 and 7 such that $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}(n)}(6,6)=k$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}(n)}(7,7)=k$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}(n)}(7,6)=0$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}(n)}(6,7)=D^n$ and with composition given by multiplication. Let $R(n)$ be the dg functor from $\mathcal{B}$ to $\mathcal{P}(n)$ that sends 4 to 6 and 5 to 7. Let $\mathcal{C}(n)$ be the dg category with two objects 8 and 9 such that $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(n)}(8,8)=k$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(n)}(9,9)=k$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(n)}(9,8)=0$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(n)}(8,9)=S^{n-1}$ and composition given by multiplication. Let $S(n)$ be the dg functor from $\mathcal{C}(n)$ to $\mathcal{P}(n)$ that sends 8 to 6, 9 to 7 and S^{n-1} to D^n by the identity on k in degree $n-1$. Finally, let Q be the dg functor from the empty dg category $\mathcal{O}$, which is the initial object in **DCAT**, to $\mathcal{A}$.

Théorème 0.1. *If we consider for $\mathcal{C}$ the category* **DCAT**, *for W the subcategory of quasi-equivalences, for J the dg functors F and $R(n), n\in\mathbb{Z}$, and for I the dg functors Q and $S(n), n\in\mathbb{Z}$, then the conditions of the recognition theorem* [4, 2.1.19] *are fulfilled. Thus, the category* **DCAT** *admits a Quillen model structure whose weak equivalences are the quasi-equivalences.*

An analogous result for simplicial categories has been obtained in [1]. Our construction is inspired by the main result of [7] first discovered in [5] and by the construction of DG-quotients in [2]. One can easily show that for this structure, every object is fibrant. Using Theorem 0.1 Toën has described the Dwyer–Kan localization [3] of **DCAT** in [9].

1. Préliminaires

Dans toute la suite, k désigne un anneau commutatif avec 1. Le produit tensoriel $\otimes$ désigne toujours le produit tensoriel sur k. Par une *dg-catégorie*, nous entendons une k-catégorie différentielle graduée, voir [6,2]. Soit **DCAT** la catégorie des petites dg-catégories. Un dg-foncteur F de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ est une *quasi-équivalence* si :

– pour tous objects c_1 et c_2 dans $\mathcal{C}$, le morphisme de complexes de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c_1,c_2)$ vers $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c_1),F(c_2))$ est un quasi-isomorphisme et
– le foncteur $\mathrm{H}^0(F)$ de $\mathrm{H}^0(\mathcal{C})$ vers $\mathrm{H}^0(\mathcal{D})$ est essentiellement surjectif.

Pour les catégories de modèles de Quillen, nous renvoyons à [4]. On introduira une structure de catégorie de modèles de Quillen à engendrement cofibrant dans **DCAT** dont les équivalences faibles sont les quasi-équivalences. Pour cela, on se servira du Théorème 2.1.19 de [4].

2. Théorème principal

Suivant [2, 3.7.1], nous définissons $\mathcal{K}$ comme la dg-catégorie avec deux objets 1, 2 et dont les morphismes sont engendrés par $f\in\mathrm{Hom}^0_{\mathcal{K}}(1,2)$, $g\in\mathrm{Hom}^0_{\mathcal{K}}(2,1)$, $r_1\in\mathrm{Hom}^{-1}_{\mathcal{K}}(1,1)$, $r_2\in\mathrm{Hom}^{-1}_{\mathcal{K}}(2,2)$ et $r_{12}\in\mathrm{Hom}^{-2}_{\mathcal{K}}(1,2)$ soumis aux relations $\mathrm{d}f=\mathrm{d}g=0$, $\mathrm{d}r_1=gf-\mathbf{1}_1$, $\mathrm{d}r_2=fg-\mathbf{1}_1$ et $\mathrm{d}r_{12}=fr_1-r_2f$.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "r_1"] \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend left=70, "r_{12}"] & 2 \arrow[l, bend left, "g"] \arrow[loop right, "r_2"] \end{tikzcd}$$

Soit $\mathcal{A}$ la dg-catégorie avec un seul object 3 et telle que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(3,3)=k$. Soit F le dg-foncteur de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{K}$ qui envoie 3 sur 1. Soit $\mathcal{B}$ la dg-catégorie avec deux objects 4 et 5 telle que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(4,4)=k$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(5,5)=k$,

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(4,5)=0$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(5,4)=0$. Soit $n\in\mathbb{Z}$. On note S^{n-1} le complexe $k[n-1]$ et D^n le cône sur le morphisme identique de S^{n-1}. On note $\mathcal{P}(n)$ la dg-catégorie avec deux objets 6 et 7 et telle que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}(n)}(6,6)=k$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}(n)}(7,7)=k$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}(n)}(7,6)=0$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}(n)}(6,7)=D^n$. Soit $R(n)$ le dg-foncteur de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{P}(n)$ qui envoie 4 sur 6 et 5 sur 7. On considère la dg-catégorie $\mathcal{C}(n)$ avec deux objects 8 et 9 telle que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(n)}(8,8)=k$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(n)}(9,9)=k$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(n)}(9,8)=0$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(n)}(8,9)=S^{n-1}$. Soit $S(n)$ le dg-foncteur de $\mathcal{C}(n)$ vers $\mathcal{P}(n)$ qui envoie 8 sur 6, 9 sur 7 et S^{n-1} dans D^n par l'identité sur k en degré $n-1$. Soit finalement Q le dg-foncteur de la dg-catégorie vide $\mathcal{O}$, qui est l'objet initial dans **DCAT**, vers $\mathcal{A}$.

Théorème 2.1. *Si on considère pour catégorie $\mathcal{C}$ la catégorie* **DCAT**, *pour classe W la sous-catégorie de* **DCAT** *des quasi-équivalences, pour classe J les dg-foncteurs F et $R(n)$, $n\in\mathbb{Z}$, et pour classe I les dg-foncteurs Q et $S(n)$, $n\in\mathbb{Z}$, alors les conditions du théorème* [4, 2.1.19] *sont satisfaites.*

Remarque 1. Un résultat analogue pour les catégories simpliciales a été obtenu dans [1]. Notre construction est inspirée par le résultat principal de [7] montré d'abord dans [5] et par la construction des dg-quotients dans [2]. On peut montrer aisément que pour la structure obtenue, tout objet est fibrant et qu'un dg-foncteur F de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ est une fibration si et seulement si :

- pour tous objects c_1 et c_2 dans $\mathcal{C}$, le morphisme de complexes de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c_1,c_2)$ vers $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c_1),F(c_2))$ est surjectif en chaque composante et
- pour tout objet c_1 dans $\mathcal{C}$ et tout isomorphisme v de $F(c_1)$ vers d dans $\mathrm{H}^0(\mathcal{D})$, il existe un isomorphisme u de c_1 vers c_2 dans $\mathrm{H}^0(\mathcal{C})$ tel que $F(u)=v$.

En s'appuyant sur le Théorème 2.1 B.Toën a décrit la localization de Dwyer–Kan [3] de **DCAT** dans [9].

On observe facilement que les conditions (i), (ii) et (iii) de [4, 2.1.19] sont verifiées.

Lemme 2.2. *On a* $J-\mathrm{cell}\subseteq W$.

Soit $n\in\mathbb{Z}$. Soit $T:\mathcal{B}\to\mathcal{J}$ un dg-foncteur quelconque dans **DCAT**. On considère la somme amalgamée suivante

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "R(n)"'] & \mathcal{J} \arrow[d, "\mathrm{inc}"] \\ \mathcal{P}(n) \arrow[r] & \mathcal{U} \arrow[ul, phantom, "\ulcorner", very near start] \end{tikzcd}$$

dans **DCAT**. Il s'agit de vérifier que inc est une quasi-équivalence. La dg-catégorie $\mathcal{U}$ s'obtient à partir de la dg-catégorie $\mathcal{J}$ en rajoutant un nouveau morphisme j de $T(4)$ vers $T(5)$ de degré $n-1$ et un nouveau morphisme l de $T(4)$ vers $T(5)$ de degré n tels que $\mathrm{d}l=j$. Pour des objets X et Y de $\mathcal{J}$, on a donc une décomposition de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(X,Y)$ en somme directe de complexes

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(X,Y)=\bigoplus_{m\geqslant 0}\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}^{(m)}(X,Y)$$

avec

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}^{(m)}(X,Y)=\underbrace{(T(5),Y)\otimes D^n\otimes(T(5),T(4))\otimes D^n\otimes\cdots\otimes D^n\otimes(X,T(4))}_{m\ \text{facteurs}\ D^n},$$

où l'on écrit $(\,,\,)$ pour $\mathrm{Hom}_{\mathcal{J}}(\,,\,)$. Puisque le complexe D^n est contractile, l'inclusion

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{J}}(X,Y)\hookrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(X,Y)$$

est un quasi-isomorphisme. Comme le dg-foncteur d'inclusion est l'identité au niveau des objets, c'est une quasi-équivalence. Soit maintenant $N:\mathcal{A}\to\mathcal{L}$ un dg-foncteur quelconque dans **DCAT**. On considère la somme amalgamée suivante

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "N"] \arrow[d, "F"'] & \mathcal{L} \arrow[d, "\mathrm{inc}"] \\ \mathcal{K} \arrow[r] & \mathcal{M} \end{tikzcd}$$

dans **DCAT**. Il s'agit de montrer que inc est une quasi-équivalence. La dg-catégorie $\mathcal{M}$ s'obtient à partir de la dg-catégorie $\mathcal{L}$ en rajoutant la dg-catégorie $\mathcal{K}$ à $\mathcal{L}$ en identifiant les objets $N(3)$ et $F(3)$. Soit $\mathcal{L}_0$ la dg-catégorie $\mathcal{L}$ à laquelle on rajoute un morphisme s avec $ds=0$ de $N(3)$ vers un nouvel objet H. Notons $\mathrm{Mod}\,\mathcal{L}_0$ la dg-catégorie des dg-modules (à droite) sur $\mathcal{L}_0$. On considère le plongement de Yoneda

$$\mathcal{L}_0 \hookrightarrow \mathrm{Mod}\,\mathcal{L}_0, \qquad X\mapsto \hat{X}.$$

Soit $\mathcal{L}_1$ la sous-dg-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}\mathcal{L}_0$ dont les objets sont le cône C sur $\hat{s}$ et les dg-foncteurs représentables. Soit $\mathcal{L}_2$ la dg-catégorie obtenue en rajoutant dans $\mathcal{L}_1$ un morphisme h de degré 1 à l'anneau d'endomorphismes de C tel que dh est égal à l'identité de C. Notre dg-catégorie $\mathcal{M}$ s'identifie naturellement à la sous-dg-catégorie pleine de $\mathcal{L}_2$ dont les objets sont les images dans $\mathcal{L}_2$ des objets de $\mathcal{L}_0$. En effet, la dg-catégorie $\mathcal{K}$ représente le foncteur de **DCAT** vers la catégorie des ensembles qui, à une dg-catégorie $\mathcal{C}$, associe l'ensemble des couples (s,h) avec d$s=0$, où s est un morphisme de degrée 0 dans $\mathcal{C}$ et h est une contraction du cône de $\hat{s}$ dans $\mathrm{Mod}\mathcal{C}$. Soient X et Y des objets de $\mathcal{L}$. On a alors une décomposition de k-modules gradués comme dans [2, 3.1]

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X,Y)\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_2}(\hat{X},\hat{Y})=\bigoplus_{n\geqslant 0}\mathrm{Hom}^{(n)}_{\mathcal{L}_2}(\hat{X},\hat{Y}),$$

où

$$\mathrm{Hom}^{(n)}_{\mathcal{L}_2}(\hat{X},\hat{Y})=\underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_1}(C,\hat{Y})\otimes S^2\otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_1}(C,C)\otimes S^2\otimes\cdots\otimes S^2\otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_1}(\hat{X},C)}_{n\ \text{ facteurs } S^2}.$$

Mais dans cette situation, on n'a pas une somme directe de complexes. Soit $g_{n+1}\cdot h\cdot g_n\cdot h\cdots h\cdot g_1\in \mathrm{Hom}^{(n)}_{\mathcal{L}_2}(\hat{X},\hat{Y})$. Comme on a d$h=\mathbf{1}$, l'image par d de cet élément est égale à

$$\mathrm{d}(g_{n+1})\cdot h\cdot g_n\cdot h\cdots h\cdot g_1+\underbrace{(-1)^{|g_{n+1}|}\cdot g_{n+1}\cdot \mathbf{1}\cdot g_n\cdot h\cdots h\cdot g_1}_{(n-1)\ \text{ facteurs } h}+\cdots.$$

On remarque que, pour tout $m\geqslant 0$, la somme

$$\bigoplus_{n\geqslant 0}^{m}\mathrm{Hom}^{(n)}_{\mathcal{L}_2}(\hat{X},\hat{Y})$$

est un sous-complexe de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_2}(\hat{X},\hat{Y})$ et on dispose donc d'une filtration exhaustive de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_2}(\hat{X},\hat{Y})$. Le n-ième sous-quotient s'identifie à $\mathrm{Hom}^{(n)}_{\mathcal{L}_2}(\hat{X},\hat{Y})$. Le complexe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_1}(\hat{X},C)$ s'identifie au cône sur l'isomorphisme

$$s_*:\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_0}\big(\hat{X},\widehat{N(3)}\big)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_0}(\hat{X},\hat{H}).$$

Il est donc contractile et l'inclusion

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(X,Y)\hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X,Y)\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_2}(\hat{X},\hat{Y})$$

est un quasi-isomorphisme. Comme s devient un isomorphisme dans $\mathrm{H}^0(\mathcal{M})$ et que le dg-foncteur d'inclusion est l'identité au niveau des objets, il est bien une quasi-équivalence.

Pour demontrer que $J-\mathrm{inj}\cap W=I-\mathrm{inj}$ on considère la classe **Surj** formée des dg-foncteurs $G:\mathcal{H}\to\mathcal{I}$ dans **DCAT** qui vérifient :

– G induit une surjection de l'ensemble des objets de $\mathcal{H}$ sur l'ensemble des objets de $\mathcal{I}$
– G induit des quasi-isomorphismes surjectifs dans les complexes de morphismes.

Lemme 2.3. *On a* $I-\mathrm{inj}=\mathbf{Surj}=J-\mathrm{inj}\cap W$.

Ce lemme est démontré dans [8].

Nous avons vérifié que $J-\mathrm{cell}\subseteq W$ (Lemme 2.2) et que $I-\mathrm{inj}$ est égal à $J-\mathrm{inj}\cap W$ (Lemme 2.3). Ces conditions impliquent celles du théorème de Hovey [4, 2.1.19].

Remerciements

Je tiens à remercier B. Keller pour des conversations utiles et un rapporteur anonyme pour ses commentaires sur une version antérieure de cette note.

Références

[1] J. Bergner, A model category structure on the category of simplicial categories, math.AT/0406507.
[2] V. Drinfeld, DG quotients of DG categories, J. Algebra 272 (2004) 643–691.
[3] W.G. Dwyer, D.M. Kan, Simplicial localizations of categories, J. Pure Appl. Algebra 17 (1980) 267–284.
[4] M. Hovey, Model Categories, Math. Surveys Monographs, vol. 63, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
[5] A. Joyal, M. Tierney, Strong stacks and classifying spaces, in: Category Theory, in: Lecture Notes in Math., vol. 1488, Springer, Berlin, 1991.
[6] B. Keller, Deriving DG categories, Ann. Sci. École Norm. Sup. 27 (1994) 63–102.
[7] C. Rezk, A note on a certain model category structure on the category of categories, available at http://www.math.uiuc.edu/~rezk.
[8] G. Tabuada, Une structure de catégorie de modèles de Quillen sur la catégorie des dg-catégories, math.KT/0407338.
[9] B. Töen, The homotopy theory of dg-categories and derived Morita theory, math.AG/0408337.