Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 647–652
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Probability Theory/Partial Differential Equations

SPDEs in infinite dimension with Poisson noise

Claudia Knoche

Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, Postfach 10 01 31, 33501 Bielefeld, Germany

Received 19 September 2003; accepted after revision 6 September 2004

Available online 18 October 2004

Presented by Paul Malliavin

Abstract

In this Note we investigate stochastic partial differential equations in infinite dimension driven by a compensated Poisson random measure. Apart from the existence and uniqueness of mild solutions our main interest is directed towards their regularity w.r.t. the initial datum. Our main result is the first order Fréchet differentiability of the mild solution as a mapping from L^q to $\mathcal{H}^p$, the space of predictable p-integrable processes, where $q > p \geqslant 2$. Higher order Fréchet differentiability can be proved similarly. As a consequence we obtain gradient estimates in infinite dimensions for the corresponding resolvents. ***To cite this article: C. Knoche, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Résumé

ESDP en dimension infinie avec un bruit de Poisson. Dans cette Note nous analysons des équations stochastiques aux dérivées partielles en dimension infinie avec une diffusion décrite par une intégrale stochastique par rapport à une mesure aléatoire de Poisson compensée par la mesure d'intensité. Outre l'existence et l'unicité de la solution 'mild', notre principal intérêt concerne la régularité par rapport à la condition initiale. Le résultat principal est la différentiabilité au sens de Fréchet de la solution comme application de L^q vers l'espace des processus prévisibles $X(t)$, $t \in [0, T]$, tels que $E[\|X(t)\|^p] < \infty$ où $q > p \geqslant 2$. La différentiabilité d'ordre deux au sens de Fréchet peut être obtenue de la même façon. ***Pour citer cet article : C. Knoche, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Version française abrégée

Nous considérons des équations stochastiques aux dérivées partielles (esdp) en dimension infinie avec une diffusion décrite par une intégrale stochastique par rapport à une mesure aléatoire de Poisson compensée avec la mesure d'intensité.

Introduisons maintenant notre cadre.

E-mail address: cknoche@mathematik.uni-bielefeld.de (C. Knoche).

1631-073X/$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.
doi:10.1016/j.crma.2004.09.004

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité complet avec une filtration $\mathcal{F}_t$, $t \geqslant 0$, telle que $\mathcal{F}_0$ contient tout ensemble P-négligeable.

Soit $(U, \mathcal{B}, \nu)$ un espace mesure σ-fini et soit p un « Poisson point process » stationnaire par rapport a $\mathcal{F}_t$, $t \geqslant 0$, sur U avec mesure characteristique ν. Nous denotons avec Π la mesure aleatoire de Poisson associee a p sur $((0,\infty) \times U, \mathcal{B}(0,\infty) \otimes \mathcal{B})$ avec la mesure d'intensite $\nu \otimes \lambda$ ou λ designe la mesure de Lebesgue.

Soit $T > 0$. Nous considérons l'esdp suivante dans un espace de Hilbert H séparable

$$\begin{cases} \mathrm{d}X(t) = \left[AX(t) + F\big(X(t)\big)\right]\mathrm{d}t + B\big(X(t), y\big)q(\mathrm{d}t, \mathrm{d}y), \\ X(0) = \xi. \end{cases} \tag{1}$$

$q(\mathrm{d}t, \mathrm{d}y)$ et les coefficients A, F et B sont spécifiés en détail dans la version anglaise.

Tout d'abord, notre objectif est de montrer l'existence et l'unicité d'une solution « mild » du problème (1). Ceci est fait en appliquant le théorème du point fixe de Banach à l'application

$$\mathcal{F}: L^p \times \mathcal{H}^p(T, H) \to \mathcal{H}^p(T, H)$$
$$(\xi, Y) \mapsto \left(S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)F\big(X(s)\big)\,\mathrm{d}s + \int_0^{t+}\int_U S(t-s)B\big(X(s), y\big)q(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y)\right)_{t\in[0,T]}$$

où

$$L_0^p := L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, P, H) \quad \text{et}$$
$$\mathcal{H}^p(T, H) := \Big\{Y(t), t \in [0,T] \mid Y \text{ est un } H\text{-prévisible processus t.q.}$$
$$\|Y\|^p_{\mathcal{H}^p} := \sup_{t\in[0,T]} E\left[\|Y(t)\|^p\right] < \infty\Big\}, \quad p \geqslant 2.$$

Cette méthode entraîne l'unicité dans l'espace $\mathcal{H}^p(T, H)$, c'est-à-dire au sens des modifications de processus.

Pour appliquer le principe du point fixe de Banach dans le cas décrit ci-dessus, nous avons besoin d'une estimation de $\|X(t)\|_{L^p}$ où

$$X(t) := \int_0^{t+}\int_U \Phi(s, y)\, q(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y), \quad t \in [0, T],$$

où $\Phi \in \mathcal{N}_q^2(T, U, H) = L^2([0,T] \times \Omega \times U, P_T(U), P \otimes \lambda \otimes \nu, H)$.

En utilisant la formule d'Itô, on déduit une version appropriée de l'inégalité de Burkholder, Davis et Gundy pour des processus stochastiques à valeurs réelles, c'est-à-dire que l'on prouve l'existence d'une constante $C_p > 0$ telle que pour tout $\Phi \in \mathcal{N}_q^2(T, U, \mathbb{R})$ et $p \geqslant 2$ on ait

$$E\left[\left|X(T)\right|^p\right]^{1/p} = \sup_{0\leqslant t\leqslant T} E\left[\left|X(t)\right|^p\right]^{1/p} \leqslant C_p\left(\int_0^T\int_U E\left[\left|\Phi(s, y)\right|^p\right]^{2/p}\nu(\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}s\right)^{1/2}. \tag{2}$$

En utilisant l'inégalité de Khintchine, (2) est généralisée pour $\Phi \in \mathcal{N}_q^2(T, U, H)$.

Pour pouvoir démontrer l'existence et l'unicité d'une solution « mild », nous proposons les hypothèses H.0 partant sur les coefficients A, F et B, décrites en détail dans la version anglaise. Nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 0.1. (a) *Supposons que les hypothèses* H.0(i) *et* (ii) *soivent vérifiées. Pour chaque condition initiale $\xi \in L_0^2$ il y a une solution « mild » unique $X(\xi)$ du problème* (1) *dans $\mathcal{H}^2(T, H)$.*

(b) *Soit $p > 2$. Supposons que les hypothèses* H.0(i) *et* (ii′) *soivent vérifiées. Pour chaque condition initiale $\xi \in L_0^p$ il y a une solution « mild » unique $X(\xi)$ du problème* (1) *dans $\mathcal{H}^p(T, H)$.*

De plus nous obtenons que $X : L_0^p \to \mathcal{H}^p(T, H)$, $p \geqslant 2$, est lipchitzien.

Notre but principal est de prouver la différentiabilité de la solution « mild » par rapport à la condition initiale. En particulier, nous nous intéressons à la différentiabilité au sens de Fréchet.

Nous présentons notre résultat principal concernant la régularité de la solution « mild » par rapport à la condition initiale. Les hypothèses H.1 nécessaires portant sur les coefficients A, F et B sont décrites dans la version anglaise.

Théorème 0.2. (a) *Supposons les hypothèses* H.0(i), (ii) *et* H.1(iii), (v) *vérifiées. La solution « mild » $X : L_0^2 \to \mathcal{H}^2(T, H)$ du problème* (1) *est différentiable au sens de Gâteaux et la dérivée au sens de Gâteaux $\partial X : L_0^2 \times L_0^2 \to \mathcal{H}^2(T, H)$ est continue.*

(b) *Soit $q > p \geqslant 2$. Supposons hypothèses* H.0(i), (ii′) *et* H.1(iii′), (iv′) *vérifiées. La solution « mild » $X : L_0^q \to \mathcal{H}^p(T, H)$ du problème* (1) *est différentiable au sens de Fréchet et la dérivée au sens de Fréchet $DX : L_0^q \to L(L_0^q, \mathcal{H}^2(T, H))$ est continue.*

Cet résultat nous permet de donner des estimations de gradients pour la résolvante associée à la solution. Nous définissons la résolvante associée à la solution de la façon suivante.

Soit $f : (H, \mathcal{B}(H)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, bornée. Nous définissons

$$R_\alpha f(x) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t} E\big[f\big(X(x)(t)\big)\big]\,\mathrm{d}t, \quad \alpha \geqslant 0,\ x \in H.$$

Pour pouvoir énoncer nos résultats sur la différentiabilité au sens de Gâteaux de $R_\alpha f : H \to \mathbb{R}$ et pour pouvoir donner une estimation pour $\|\partial R_\alpha f(x)\|_{L(H,\mathbb{R})}$, nous avons besoin des hypothèses H.2 décrites dans la version anglaise.

Proposition 0.3. *Supposons les hypothèses* H.0(i), H.1(iii) *et* H.2(vi)–(ix) *vérifiées. Soit $f \in C_b^1(H, \mathbb{R})$ alors $R_\alpha f : H \to \mathbb{R}$ est différentiable au sens de Gâteaux pour tout $\alpha \geqslant 0$. Pour tout $x, z \in H$, l'identité*

$$\partial R_\alpha f(x)z = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t} E\big[Df\big(X(x)(t)\big)\partial X(x)z(t)\big]\,\mathrm{d}t \quad \textit{pour tout } \alpha \geqslant 0$$

et l'inégalité :

$$\big\|\partial R_\alpha f(x)\big\|_{L(H,\mathbb{R})} \leqslant \frac{1}{\alpha - \omega_0} \sup_{x \in H} \big\|Df(x)\big\|_{L(H)} \quad \textit{pour tout } \alpha > \omega_0$$

sont satisfaits

1. Introduction

We consider stochastic partial differential equations in infinite dimensions driven by a compensated Poisson random measure. SPDE's driven by Gaussian noise have been well studied for a long time (see [10,9,3] and references therein) whereas SPDEs driven by Poisson noise have only been investigated more intensively quite recently. See e.g. [4,1,8,2], where the authors, among other things, analyze SPDEs with Poisson noise in one dimension and show existence and uniqueness of solutions but merely in $\mathcal{H}^2$ (see below). Moreover, in [7] the authors deal with stochastic integral equations driven by non-Gaussian noise on separable Banach spaces and prove existence and uniqueness of pathwise solutions in $\mathcal{H}^1$ and $\mathcal{H}^2$.

Let us now introduce our setting. Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a complete probability space with a right-continuous filtration $\mathcal{F}_t$, $t \geqslant 0$, such that $\mathcal{F}_0$ contains all P-nullsets of $\mathcal{F}$. Let $(U, \mathcal{B}, \nu)$ be a σ-finite measure space and p a stationary $\mathcal{F}_t$-Poisson point process on U with characteristic measure ν. We denote by Π the counting measure of p, i.e. $\Pi(\overline{B}) = \#\{s \in D_p \mid (s, p(s)) \in \overline{B}\}$ for all $\overline{B} \in \mathcal{B}(0,\infty) \otimes \mathcal{B}$. Then Π is a Poisson random measure on $((0,\infty) \times U, \mathcal{B}((0,\infty)) \otimes \mathcal{B})$ with intensity measure $\nu \otimes \lambda$ where λ denotes the Lebesgue measure. Let $T > 0$ and consider the following SPDE in a separable Hilbert space $(H, \langle\,,\,\rangle)$

$$\begin{cases} \mathrm{d}X(t) = \big[AX(t) + F\big(X(t)\big)\big]\,\mathrm{d}t + B\big(X(t), y\big)q(\mathrm{d}t, \mathrm{d}y), \\ X(0) = \xi \end{cases} \tag{3}$$

where

1. $A : D(A) \subset H \to H$ is the infinitesimal generator of a C_0-semigroup $S(t)$, $t \geqslant 0$, of linear, bounded operators on H,
2. $F : H \to H$ is $\mathcal{B}(H)/\mathcal{B}(H)$-measurable,
3. $B : H \times U \to H$ is $\mathcal{B}(H) \otimes \mathcal{B}/\mathcal{B}(H)$-measurable,
4. $q(t, B) := \Pi(t, B) - t\nu(B) := \Pi(]0, t] \times B) - t\nu(B)$, $t \geqslant 0$, $B \in \mathcal{B}$, $\nu(B) < \infty$,
5. ξ is an H-valued, $\mathcal{F}_0$-measurable random variable.

Our first aim is to show the existence and uniqueness of a mild solution of Eq. (3), i.e. of a H-predictable process $X(t)$, $t \in [0, T]$, such that

$$X(t) = S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)F\big(X(s)\big)\,\mathrm{d}s + \int_0^{t+}\!\!\int_U S(t-s)B\big(X(s), y\big)q(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y) \quad P\text{-a.s.}$$

for all $t \in [0, T]$.

This is done by applying Banach's fixed point theorem to the mapping

$$\mathcal{F} : L^p \times \mathcal{H}^p(T, H) \to \mathcal{H}^p(T, H)$$
$$(\xi, Y) \mapsto \left(S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)F\big(X(s)\big)\,\mathrm{d}s + \int_0^{t+}\!\!\int_U S(t-s)B\big(X(s), y\big)q(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y)\right)_{t \in [0,T]}$$

where

$$L_0^p := L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, P, H) \text{ and}$$
$$\mathcal{H}^p(T, H) := \Big\{Y(t), t \in [0, T] \mid Y \text{ is an } H\text{-predictable process s.t. } \|Y\|_{\mathcal{H}^p}^p := \sup_{t \in [0,T]} E\big[\|Y(t)\|^p\big] < \infty\Big\}, \quad p \geqslant 2.$$

This method implies uniqueness in $\mathcal{H}^p(T, H)$, i.e. in the sense of modifications.

To this end we need an estimate for the L^p-norm of the stochastic integral $X(t) := \int_0^{t+}\int_U \Phi(s, y)\, q(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y)$, $t \in [0, T]$, where $\Phi \in \mathcal{N}_q^2(T, U, H) = L^2([0, T] \times \Omega \times U, P_T(U), P \otimes \lambda \otimes \nu, H)$. If $p = 2$ this is given by the isometric property of the stochastic integral and the proof of the existence and uniqueness is straight forward by Banach's fixed point theorem. This result can e.g. be found in [5]. More delicate is the case $p > 2$, since, a priori, we do not have an estimate for $\sup_{t \in [0,T]} E[\|X(t)\|^p]$. By Itô's formula, we can deduce a suitable version of the Burkholder–Davis–Gundy inequality from $\mathbb{R}$, i.e. that there exists $C_p > 0$ such that for all $\Phi \in \mathcal{N}_q^2(T, U, \mathbb{R})$ and $p \geqslant 2$ holds

$$E\big[\big|X(T)\big|^p\big]^{1/p} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} E\big[\big|X(t)\big|^p\big]^{1/p} \leqslant C_p \left(\int_0^T \int_U E\big[\big|\Phi(s, y)\big|^p\big]^{2/p} \nu(\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}s\right)^{1/2}. \tag{4}$$

By Khintchine's inequality the above inequality (4) extends to $\Phi \in \mathcal{N}_q^2(T, U, H)$.

Hypothesis H.0.

(i) F is Lipschitz continuous.
(ii) There exists $K \in L^1([0,T])$ such that for all $t \in]0,T]$ and $x, z \in H$

$$\int_U \left\| S(t)B(x,y)\right\|^2 \nu(\mathrm{d}y) \leqslant K(t)\big(1+\|x\|\big)^2,$$
$$\int_U \left\| S(t)\big(B(x,y)-B(z,y)\big)\right\|^2 \nu(\mathrm{d}y) \leqslant K(t)\|x-z\|^2.$$

(ii′) There exists $K \in L^1([0,T]\times U, \mathcal{B}([0,T])\otimes\mathcal{B}, \lambda\otimes\nu)$ such that for all $t \in]0,T]$, $x, z \in H$ and $y \in U$

$$\left\| S(t)B(x,y)\right\|^2 \leqslant K(t,y)\big(1+\|x\|\big)^2,$$
$$\left\| S(t)\big(B(x,y)-B(z,y)\big)\right\|^2 \leqslant K(t,y)\|x-z\|^2.$$

Using (4) we get the following existence result.

Theorem 1.1. (a) *Assume that conditions* H.0(i) *and* (ii) *are fulfilled. Then for every initial condition* $\xi \in L_0^2$ *there exists a unique mild solution* $X(\xi)$ *of* (3) *in* $\mathcal{H}^2(T,H)$.

(b) *Let* $p > 2$. *Assume that conditions* H.0(i) *and* (ii′) *are fulfilled. Then for every initial condition* $\xi \in L_0^p$ *there exists a unique mild solution* $X(\xi)$ *of* (3) *in* $\mathcal{H}^p(T,H)$.

In addition, in both cases, we obtain that $X : L_0^p \to \mathcal{H}^p(T,H)$, $p \geqslant 2$, *is Lipschitz continuous.*

Our main concern is, however, differentiability w.r.t. the initial datum $\xi \in L_0^p$, in particular, the Fréchet differentiability.

Hypothesis H.1.

(iii) F is Gâteaux differentiable and its Gâteaux derivative $\partial F : H \times H \to H$ is continuous.
(iii′) F is Fréchet differentiable and its Fréchet derivative $DF : H \to L(H)$ is continuous.
(iv) For all $y \in U$ $B(\cdot, y)$ is Gâteaux differentiable and for all $y \in U$ and $z \in H$ $\partial_1 B(\cdot, y)z : H \to H$ is continuous.
(iv′) For all $y \in U$ $B(\cdot, y)$ is Fréchet differentiable and for all $t \in]0,T]$ and $y \in U$ $S(t)D_1B(\cdot, y) : H \to L(H)$ is continuous.
(v) For all $t \in]0,T]$ and $z \in H$ $S(t)\partial_1 B(\cdot,\cdot)z : H \to L^2(U, \mathcal{B}, \nu, H)$ is continuous.

Theorem 1.2. (a) *Assume that the conditions* H.0 (i), (ii) *and* H.1(iii)–(v) *are fulfilled. Then the mild solution* $X : L_0^2 \to \mathcal{H}^2(T,H)$ *of* (3) *is Gâteaux differentiable and the mapping* $\partial X : L_0^2 \times L_0^2 \to \mathcal{H}^2(T,H)$ *is continuous.*

(b) *Let* $q > p \geqslant 2$. *Assume that the conditions* H.0(i), (ii′) *and* H.1(iii′) *and* (iv′) *are fulfilled. Then the mild solution of* $X : L_0^q \to \mathcal{H}^p(T,H)$ *of* (3) *is continuously Fréchet differentiable.*

Remark 1. Under corresponding assumptions one can prove higher Fréchet differentiability (cf. [6] for details).

As a consequence we obtain a gradient estimate for the resolvent corresponding to the mild solution.

Let $f : (H, \mathcal{B}(H)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, bounded. Define the corresponding semigroup and resolvent as follows

$$p_t f(x) := E\big[f\big(X(x)(t)\big)\big], \quad t \in [0,T],\ x \in H, \quad \text{and}$$

$$R_\alpha f(x) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t} p_t f(x)\,\mathrm{d}t, \quad \alpha \geqslant 0,$$

where $X(x)$ is the mild solution of (3) with initial condition $x \in H$.

Hypothesis H.2.

(vi) $(A, D(A))$ is the generator of a quasi-contractive C_0-semigroup $S(t)$, $t \geqslant 0$, on H, i.e. there exists $\omega_0 \geqslant 0$ such that $\|S(t)\|_{L(H)} \leqslant \mathrm{e}^{\omega_0 t}$ for all $t \geqslant 0$.
(vii) $\nu(U) < \infty$.
(viii) F is dissipative, i.e. for all $x, y \in H$ holds $\langle \partial F(x)y, y\rangle \leqslant 0$.
(ix) $B : H \times U \to H$, $(x, y) \mapsto z \in H$ is constant.

Proposition 1.3. *Assume that the conditions* H.0(i), H.1(iii) *and* H.2(vi)–(ix) *are fulfilled. Let* $f \in C_b^1(H, \mathbb{R})$ *then* $R_\alpha f : H \to \mathbb{R}$ *is Gâteaux differentiable for all* $\alpha \geqslant 0$ *and for all* $x, z \in H$ *holds*

$$\partial R_\alpha f(x)z = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t} E\big[Df\big(X(x)(t)\big)\partial X(x)z(t)\big]\,\mathrm{d}t \quad \textit{for all } \alpha \geqslant 0$$

and

$$\big\|\partial R_\alpha f(x)\big\|_{L(H,\mathbb{R})} \leqslant \frac{1}{\alpha - \omega_0} \sup_{x \in H} \big\|Df(x)\big\|_{L(H)} \quad \textit{for all } \alpha > \omega_0.$$

References

[1] S. Albeverio, J.-L. Wu, T.-S. Zhang, Parabolic SPDEs driven by Poisson white noise, Stochastic Process. Appl. 74 (1998) 21–36.
[2] D. Applebaum, J.-L. Wu, Stochastic partial differential equations driven by Lévy space–time white noise, Random Operators Stochastic Equations 8 (2000) 245–261.
[3] G. Da Prato, J. Zabczyk, Ergodicity for Infinite Dimensional Systems, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
[4] N. Ikeda, S. Watanabe, Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, North-Holland, Amsterdam, 1981.
[5] C. Knoche, Stochastic integrals and stochastic differential equations with respect to compensated Poisson random measures in infinite dimensional Hilbert spaces, Preprint No. 03-06-119 des Forschungszentrums BiBoS (Bielefeld-Bonn-Stochastics), Universität Bielefeld, 2003.
[6] C. Knoche, Mild solutions of SPDE's driven by Poisson noise in infinite dimensions and their dependence on initial datum, Doctor-degree thesis, Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, 2004, in preparation.
[7] V. Mandrekar, B. Rüdiger, Existence and uniqueness of path wise solutions for stochastic integral equations driven by non Gaussian noise on separable Banach spaces, Preprint No. 61 des SFB 611, Fakultät für Mathematik, Universität Bonn, 2003.
[8] C. Müller, The heat equation with Lévy noise, Stochastic Process. Appl. 74 (1998) 67–82.
[9] S. Peszat, Existence and uniqueness of the solution for stochastic equations on Banach spaces, Stochastic Stochastics Reports 55 (1995) 167–193.
[10] J.B. Walsh, An introduction to stochastic partial differential equations, in: École d'Été de Probabilité de St. Flour XIV, in: Lecture Notes in Math., vol. 1180, Springer-Verlag, Berlin, 1986, pp. 266–439.