Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 705–708

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations aux dérivées partielles

Régularité höldérienne des poches de tourbillon visqueuses

Taoufik Hmidi

Centre de Mathématiques, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France

Reçu le 9 juillet 2004 ; accepté le 12 juillet 2004

Présenté par Jean-Michel Bony

Résumé

Nous étudions la propagation de la régularité höldérienne dans une équation de transport–diffusion relative à un champ lipschitzien, généralisant un résultat déjà établi pour les espaces de Besov $B^s_{p,\infty}$, avec p fini et $s \in (-1,1)$. Comme application, nous montrons dans le cadre du système de Navier–Stokes 2-D que si le tourbillon initial est une poche dont le bord est de classe $C^{1+\epsilon}$, alors son transporté par le flot visqueux préserve pour tout temps cette régularité avec un contrôle uniforme par rapport à la viscosité. Nous prouvons également des résultats de limite non visqueuse. ***Pour citer cet article : T. Hmidi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abstract

Hölderian regularity of the viscous vortex patches. We study the evolution of the Hölderian regularity for some convection–diffusion equation with respect to Lipschitzian vector field, generalizing an earlier result for the Besov spaces $B^s_{p,\infty}$, with p finite and $s \in (-1,1)$. As an application, we show for the two-dimensional Navier–Stokes system that if the initial vorticity is a vortex patch having a $C^{1+\epsilon}$ boundary then its image through the viscous flow preserves this regularity for all time with uniform control on the viscosity. We also show some results of inviscid limit. ***To cite this article: T. Hmidi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

1. Introduction

Les systèmes de Navier–Stokes et Euler incompressibles décrivant l'évolution de la vitesse des particules constituant un fluide homogène et incompressible sont donnés respectivement par

$$(\mathrm{NS}_\nu)\quad \begin{cases} \partial_t v_\nu + v_\nu\cdot\nabla v_\nu - \nu\Delta v_\nu = -\nabla p_\nu,\\ \operatorname{div} v_\nu = 0,\\ v_{\nu|t=0} = v^0, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{E})\quad \begin{cases} \partial_t v + v\cdot\nabla v = -\nabla p,\\ \operatorname{div} v = 0,\\ v_{|t=0} = v^0, \end{cases}$$

Adresse e-mail : hmidi@daphne.math.polytechnique.fr (T. Hmidi).

1631-073X/$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2004.07.027

où ν est un paramètre positif désignant la viscosité du fluide. Les scalaires p_ν et p représentent la pression. Lorsqu'on est en dimension deux d'espace alors il est souvent commode de travailler avec la formulation suivante faisant intervenir la vorticité $\omega = \partial_1 v^2 - \partial_2 v^1$:

$$\begin{cases} \partial_t \omega_\nu + v_\nu \cdot \nabla \omega_\nu - \nu \Delta \omega_\nu = 0, \\ \omega_{\nu|t=0} = \omega^0, \\ v_\nu(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \dfrac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2} \omega_\nu(y)\,\mathrm{d}y. \end{cases}$$

Nous rappelons que le flot associé à un champ de vecteurs v, noté ψ, est défini par :

$$\psi(t,x) = x + \int_0^t v\big(\tau, \psi(\tau,x)\big)\,\mathrm{d}\tau.$$

En exploitant cette formulation Yudovich montre que lorsque $\omega^0 \in L^1 \cap L^\infty$ alors les systèmes (NS_ν) et (E) possèdent des uniques solutions globales à tourbillon essentiellement borné. Il prouve également l'existence d'un unique flot qui est continu dans les variables d'espace et de temps. Cela permet de montrer la stabilité des structures de poches de tourbilon dans le cadre eulérien, mais il ne répond pas à la question de la stabilité de la régularité du bord d'une poche de tourbillon. Une réponse favorable est en fait apportée par Chemin [1] qui montre que si le bord initial est de classe $C^{1+\epsilon}$ alors à chaque instant le bord du tourbillon eulérien est de même régularité. De plus la vitesse correspondante est lipschitzienne. En ce qui concerne le cas visqueux Danchin montre dans [3] que le transporté du bord par le flot visqueux est $C^{1+\epsilon'}$, $\forall \epsilon' < \epsilon$. En outre la vitesse v_ν est lipschitzienne avec une estimation indépendante de la viscosité. L'objet de ce travail est de montrer que la perte de la régularité n'a pas lieu et pour ce faire nous avons établi de nouvelles estimations pour les équations de transport–diffusion :

$$(\mathrm{TD}_\nu) \quad \begin{cases} \partial_t a + v \cdot \nabla a - \nu \Delta a = f + \nu g, \\ a_{|t=0} = a^0. \end{cases}$$

Nous introduisons des opérateurs de Littlewood–Paley : il existe deux fonctions positives et régulières χ et φ qui sont supportées respectivement dans une boule et une couronne telles que,

$$\chi(\xi) + \sum_{q \geqslant 0} \varphi(2^{-q}\xi) = 1 \quad \forall \xi.$$

On pose alors pour toute distribution tempérée u

$$\Delta_{-1} u = \mathcal{F}^{-1}\big(\chi(\xi)\hat{u}(\xi)\big) ; \quad \forall q \in \mathbb{N}, \quad \Delta_q u = \mathcal{F}^{-1}\big(\varphi(2^{-q}\xi)\hat{u}(\xi)\big) \quad \text{et} \quad S_q u = \sum_{-1 \leqslant p \leqslant q-1} \Delta_p u.$$

On définit les espaces de Besov inhomogènes par

$$B^s_{p,\infty} = B^s_p = \Big\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\ \|u\|_{B^s_{p,\infty}} \overset{\text{déf}}{=} \sup_{q \geqslant -1} 2^{qs} \|\Delta_q u\|_{L^p} < +\infty \Big\}.$$

Notons que pour s non entier $C^s = B^s_{\infty,\infty}$. Nous disons qu'une fonction $u \in \widetilde{L^r_{\mathrm{loc}}}(\mathbb{R}_+; B^s_{p,\infty})$ si l'on a

$$\forall T > 0, \quad \|u\|_{\widetilde{L}^r_T(B^s_{p,\infty})} \overset{\text{déf}}{=} \sup_{q \geqslant -1} 2^{qs} \|\Delta_q u\|_{L^r([0,T];L^p)} < +\infty.$$

2. Effet régularisant

Nous établissons dans cette section le résultat suivant :

Théorème 2.1. (Cas $f = g = 0$). *Soient v un champ de vecteurs de divergence nulle et appartenant à $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d))$ et a une solution de* (TD_ν) *associée à une donnée initiale $a^0 \in L^p$, $p \in [1, +\infty]$. Alors on* *aura pour tout $r \in [1, +\infty]$ et pour tout $t \geqslant 0$*

$$\nu^{1/r} \|a\|_{\widetilde{L}_t^r B_{p,\infty}^{2/r}} \leqslant C\|a^0\|_{L^p} \left(1 + \nu t + \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} \mathrm{d}\tau\right)^{1/r},$$

avec C une constante absolue.

Ceci montre dans le cas particulier $r = 1$ que la moyenne en temps induit un gain de deux dérivées et c'est effectivement ce dont on a besoin dans l'étude de la propagation höldérienne de la régularité tangentielle du tourbillon.

Idées de la démonstration. La preuve de ce résultat est fondée sur la localisation en fréquences de l'Éq. (TD_ν) qui devient

$$(\partial_t + S_{q-1} v \cdot \nabla - \nu\Delta) a_q = -[\Delta_q, v \cdot \nabla]a + (S_{q-1} v - v) \cdot \nabla a_q$$

où l'on a posé $a_q = \Delta_q a$. Nous soulignons que si le terme de convection est nul, alors on aura facilement le résultat à l'aide de l'effet régularisant du semi-groupe de la chaleur [2].

$$\forall q \in \mathbb{N}; \quad \|\Delta_q e^{\nu t\Delta} a^0\|_{L^\infty} \leqslant C\, \mathrm{e}^{-c\nu t 2^{2q}} \|a^0\|_{L^\infty}. \tag{1}$$

L'autre cas facile correspond à des estimations L^p, avec p fini, et qui s'obtiennent par une simple estimation d'énergie utilisant un lemme d'analyse harmonique établi par Danchin dans [3]. Malheureusement le contrôle qu'on obtient est explosif en p, ce qui rend hors de portée son extension par ces méthodes au cas limite $p = +\infty$. Alors nous optons pour une stratégie qui consiste à suivre la solution a_q le long des lignes de courant associées au flot ψ_q du champ de vecteurs $S_{q-1} v$; en d'autres termes on introduit la fonction $\bar{a}_q(t, x) = a_q(t, \psi_q(t, x))$. Ce changement de variables permet d'éliminer le terme de convection et de remplacer l'opérateur de Laplace par un opérateur elliptique qui en reste « proche » sur un petit intervalle de temps ; le pas de temps dépend seulement de la norme Lipschitz de la vitesse. Mais le défaut principal de ce changement de variables est qu'on ne peut pas se servir directement de l'estimation (1) car la nouvelle fonction $\bar{a}_q$ n'est plus localisée en fréquence. Donc, nous relocaliser de nouveau son équation d'évolution sur des couronnes de taille 2^j et nous procédons à des estimations classiques basées sur la formulation intégrale de Duhamel et l'estimation (1) menant à un résultat convenable mais pour des fréquences de j supérieures à q. Pour les basses fréquences on utilise un lemme de composition dyadique dû à Vishik [4] :

Lemme 2.2. *Soit ψ un difféomorphisme préservant la mesure de Lebesgue, alors*

$$\|\Delta_j(\Delta_q a \circ \psi)\|_{L^\infty} \leqslant C 2^{-|j-q|} \|\nabla\psi^{\epsilon_{j,q}}\|_{L^\infty} \|\Delta_q a\|_{L^\infty},$$

avec, $\epsilon_{j,q} = 1$, si $j \geqslant q$ et -1 sinon.

En conséquence, nous obtenons l'estimation désirée sur un petit intervalle de temps qui ne dépend que de la norme Lipschitz de la vitesse. De ce fait, la globalisation ne pose pas de véritables problèmes.

3. Estimation a priori

Nous généralisons par le biais du théorème suivant un résultat de préservation de la régularité Besov établi dans [3].

Théorème 3.1. *Soient $s \in (-1,1)$, $p \in [1,+\infty]$ et v est un champ de vecteurs lipschitzien et de divergence nulle. Si a est une solution de (TD_ν), avec $a^0 \in B_p^s$, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; B_p^s)$ et $g \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; B_p^{s-2})$, alors pour tout temps positif t, on a*

$$\|a(t)\|_{B_p^s} \leqslant C\,\mathrm{e}^{CV(t)}\left(\|a^0\|_{B_p^s} + (1+\nu t)\|g\|_{L_t^\infty B_p^{s-2}} + \int_0^t \mathrm{e}^{-CV(\tau)}\|f(\tau)\|_{B_p^s}\,\mathrm{d}\tau\right).$$

On a aussi l'estimation raffinée :

$$\|a(t)\|_{B_p^s} \leqslant C\,\mathrm{e}^{CV(t)}\left(\|a^0\|_{B_p^s} + \|f\|_{\widetilde{L}_t^1 B_p^s} + (1+\nu t)\|g\|_{L_t^\infty B_p^{s-2}}\right).$$

La constante C ne dépend que de s. Nous rappelons que $V(t) = \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}\,\mathrm{d}\tau$.

Idées de la démonstration. Nous nous inspirons de la méthode utilisée pour l'effet régularisant combinée avec un lemme de commutation que nous avons établi et qui précise un lemme de commutation classique.

Lemme 3.2. *Soit v un champ de vecteurs de divergence nulle. Alors on a*

$$\|[\Delta_q, v\cdot\nabla]a\|_{L^p} \leqslant C\|\nabla v\|_{L^\infty}\sum_{q'\geqslant -1} 2^{-|q'-q|}\|\Delta_{q'}a\|_{L^p}. \tag{2}$$

4. Application aux poches de tourbillon 2-D

Nous avons comme application des estimations obtenues pour les système (TD_ν) le résultat suivant :

Théorème 4.1. *Soient $\epsilon \in]0,1[$ et Ω^0 un un ouvert borné dont le bord est une courbe simple de classe $C^{1+\epsilon}$. Désignons par v^0 le champ de vecteurs de divergence nulle et dont le rotationnel vaut $\omega^0 = \mathbb{1}_{\Omega^0}$. Alors pour tout $\nu > 0$, (NS_ν) possède une unique solution dans $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^2))$. D'une manière plus précise, il existe une constante C ne dépendant que de ϵ et Ω^0 telle que, pour tout $\nu > 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on ait*

$$\|\nabla v_\nu(t)\|_{L^\infty} \leqslant C(1+\nu)\,\mathrm{e}^{Ct}.$$

De plus, si l'on désigne par $\Omega_\nu(t)$ le transporté de Ω^0 par le flot de v_ν, alors $\partial\Omega_\nu(t)$ est une courbe simple de classe $C^{1+\epsilon}$. En outre, il existe une paramétrisation régulière γ_ν de la frontière de $\Omega_\nu(t)$ appartenant à $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; C^{1+\epsilon}(\mathbf{S}^1,\mathbb{R}^2))$ telle que, $\forall \epsilon' < \epsilon$, γ_ν converge vers γ_0 dans $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; C^{1+\epsilon'}(\mathbf{S}^1,\mathbb{R}^2))$ lorsque ν tend vers zéro.

La preuve repose essentiellement sur les Théorèmes 2.1 et 3.1.

Références

[1] J.-Y. Chemin, Perfect Incompressible Fluids, Oxford University Press, 1995.
[2] J.-Y. Chemin, Théorèmes d'unicité pour le système de Navier–Stokes tridimensionnel, J. Anal. Math. 77 (1999) 27–50.
[3] R. Danchin, Poches de tourbillon visqueuses, J. Math. Pures Appl. 76 (7) (1997) 609–647.
[4] M. Vishik, Hydrodynamics in Besov spaces, Arch. Rational Mech. Anal 145 (1998) 197–214.