Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 763–768

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations différentielles

Valuations invariantes pour l'action des groupes de Galois différentiels

Guillaume Duval

Manoir des Trois Pierres, 76430 Saint Romain de Colbosc, France

Reçu et accepté 21 mai 2004

Présenté par Bernard Malgrange

Résumé

Soit $(F/K, \partial)$ une extension de corps différentiels, de groupe de Galois différentiel $G = \mathrm{Gal}_\partial(F/K)$. Pour l'action naturelle de G sur la variété de Riemann–Zariski $S^\star = S^\star(F/K)$ de l'extension F/K, nous étudions les valuations invariantes $\nu \in (S^\star)^G$ quand elles existent. Nous exhibons les relations entre ces valuations invariantes et les éléments de F holonomes sur K. Puis, nous examinons la continuité de la dérivation ∂ par rapport aux topologies ν-adiques. Nous donnons une propriété de structure géométrique des valuations invariantes, inspirée d'un résultat de Zariski. Enfin nous répondons au problème de l'existence des valuations invariantes dans le contexte des extensions de Picard–Vessiot. ***Pour citer cet article : G. Duval, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abstract

Invariant valuations for differential Galois group action. Let $(F/K, \partial)$ be a differential field extension with differential Galois group $G = \mathrm{Gal}_\partial(F/K)$. For the natural action of G on the Riemann–Zariski variety $S^\star = S^\star(F/K)$ of the field extension F/K, we study the invariant valuations $\nu \in (S^\star)^G$ when they do exist. We show close relations between these invariant valuations and the elements of F holonomic over K. Next, we study the continuity of the derivation ∂ with respect to these ν-adic topologies. We give a geometric structure property of G-invariant valuation inspired by Zariski. Finally, we give an answer for the existence problem of invariant valuations in the context of Picard–Vessiot extension. ***To cite this article: G. Duval, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Adresse e-mail : gduval@agt.uva.es (G. Duval).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.05.021

Abridged English version

In all what follows, $(F/K, \partial)$ will denote an ordinary differential extension of fields of characteristic zero with the same field of constants C algebraically closed. Its differential Galois group will be denoted by $G = \mathrm{Gal}_\partial(F/K)$ and, $T(F/K)$ will be the set of the elements of F holonomic over K. The latter is a K-algebra, called the 'Picard–Vessiot ring' which is of finite type over K when $(F/K, \partial)$ is a Picard–Vessiot extension [3]. The Riemann–Zariski variety of the extension F/K will be denoted by $S^*(F/K)$. It is the set of equivalent classes of valuations ν which are non-trivial over F and, trivial over K. If ν is any of them, we will denote by R_ν its valuation ring, by m_ν its maximal ideal, by $\mathcal{U}(R_\nu)$ its group of units and, by Γ_ν its value group. The aim of the present work is the following: G acts on $S^*(F/K)$ by permutation of the valuation rings. We shall also pay attention to the G-invariant valuations of this action in the three directions below.

Invariant valuations and solutions of linear differential equations

If $(F/K, \partial)$ is such that $F^G \subset T(F/K)$, (which is the case for any weakly normal differential extension in the meaning of Kolchin and, therefore for any Picard–Vessiot extension). Let ν be a G-invariant valuation of F/K, what, basically, Theorem 2.1, and Corollary 2.2 say is that there must exist $t \in T(F/K)$ such that $\nu(t) < 0$. That is, precisely, there must exist an element of F which is solution of a linear differential equation and has a pole at the invariant place induced by ν. We give an illustration of this property in Examples 1 and 2. In Example 2, we deduce a new proof of a result due to Drach and Kolchin concerning the impossibility of computing any Weierstrass $\mathcal{P}$-function in term of solutions of linear differential equations. Next, in Theorem 2.3, we exhibit some stability properties of invariant valuations in the case of Picard–Vessiot extensions, where the notion of *strongly-invariant* valuations appears.

Invariant valuations and continuity of derivations

Let (F, ∂) be a field of characteristic zero with a derivation, and ν be a valuation of $F/\mathbb{Q}$. Here we study the continuity of ∂ with respect to the ν-adic topology. Precisely, we say that ∂ is continuous with respect to ν, if and only if there exists a 'bound' $\omega_0 \in \Gamma_\nu$ such that $\forall f \in F \setminus \{0\}$, $\nu(\partial(f)/f) \geqslant \omega_0$. Closely related with Theorem 2.1, we obtain in Theorem 3.2 the following property of Picard–Vessiot extensions. If $(F/K, \partial)$ is one of them, and ν is a G-invariant valuation of F/C then, any $\Delta \in \mathrm{Lie}(G)$ is continuous with respect to ν with a non-negative bound. Next, for a differential extension $(F/K, \partial)$ assuming that ∂ is continuous over K with respect to a valuation ν of F/C, we prove in Theorem 3.3 that ∂ remains continuous over F with the same bound than its restriction to K, if F/K is algebraic. In Theorem 3.4, we prove that ∂ remains continuous over F if $(F/K, \partial)$ is a Liouvillian Picard–Vessiot extension and ν is G-invariant. The general spirit of this paragraph consists in showing both in the methods and in the results that G-invariant valuations behave better than the others from a differential point of view.

Strongly invariant valuations, existence and geometry

In this last paragraph, we study the problem of the existence of G-invariant valuations. Example 2 showed that when G has a structure of Abelian variety, there might not exist any G-invariant valuation. On the contrary, in Theorem 4.1, we prove that G-invariant valuations always exist when G is a connected affine group. Theorem 4.2 explores the geometric properties of invariant valuations in light of Zariski's works. To conclude, we apply Theorem 4.1, coming back to Picard–Vessiot extensions in Corollary 4.3.

1. Introduction

Dans tout ce qui suivra, $(F/K, \partial)$ désignera une extension de corps différentiels de caractéristique nulle et de même corps des constantes C algébriquement clos. On notera $G = \mathrm{Gal}_\partial(F/K)$ le groupe de Galois différentiel de l'extension, et $T(F/K)$ l'ensemble des éléments de F solutions d'une équation différentielle linéaire non triviale à coefficients dans K. $T(F/K)$ est une K-algèbre [3] : (l'algèbre de Picard–Vessiot), de type fini quand F/K est une extension de Picard–Vessiot [3]. Soit $S^\star(F/K)$ la variété de Riemann–Zariski de l'extension F/K, l'ensemble des classes d'équivalence des valuations non triviales de F, triviales sur K. Si ν est l'une d'entre elles, on notera R_ν son anneau, $\mathfrak{m}_\nu$ l'idéal maximal de R_ν, $\mathcal{U}(R_\nu)$ son groupe des unités, et Γ_ν le groupe de valeurs de la valuation. Le thème du présent travail est le suivant : le groupe G agit sur $S^\star(F/K)$ par permutation des anneaux de valuations, et nous porterons notre attention sur les valuations invariantes sous cette action. Nous regarderons les liens existant entre les valuations invariantes et $T(F/K)$, puis les propriétés liées à la dérivation. Enfin, nous examinerons le problème de l'existence et de la structure géométrique de ces valuations invariantes.

2. Valuations invariantes et solutions d'équations différentielles linéaires

Théorème 2.1. *Soit F/K une extension différentielle telle que $F^G \subset T(F/K)$ et ν une valuation de F non triviale G-invariante. Alors deux cas s'excluant l'un de l'autre peuvent se produire* : (i) $\exists t \in T(F/K) \setminus \{0\}$ *tel que* $\nu(t) < 0$ *dans* Γ_ν ; (ii) $T(F/K) \setminus \{0\} \subset \mathcal{U}(R_\nu)$.

Remarquons que les conditions du Théorème 2.1 sont remplies quand F/K est faiblement normale, c'est-à-dire quand $F^G = K$. On montre dans un premier temps, que sous les hypothèses du Théorème 2.1 $T(F/K)$ est une K-algèbre G-stable ne possédant pas d'idéal G-stable non trivial. Supposons que le premier cas du Théorème 2.1 ne se produise pas. Nécessairement, nous avons $T(F/K) \subset R_\nu$ et, ν étant G-invariante, l'idéal premier $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \cap T(F/K)$ est lui même G-invariant. Or $1 \notin \mathfrak{p}$, donc $\mathfrak{p} = 0$ d'où $T(F/K) \setminus \{0\} \subset \mathcal{U}(R_\nu)$.

Corollaire 2.2. *Si F/K est une extension de Picard–Vessiot et ν une valuation de F non triviale G-invariante alors il existe $t \in T(F/K) \setminus \{0\}$ tel que $\nu(t) < 0$.*

En effet, les extensions de Picard–Vessiot sont faiblement normales [3] et par définition F coïncide avec le corps des fractions de $T(F/K)$; ν étant non triviale, le cas 2 du Théorème 2.1 ne peut se produire. Plus adaptée à l'analyse fonctionnelle, la notion duale du concept de valuation est celle de place. Dans ce contexte, le Corollaire 2.2 s'interprète en disant : pour toute place G-invariante, il existe une fonction holonome sur K admettant un pôle en cette place. Pour les deux extensions de Picard–Vessiot les plus simples, voici comment s'illustre ce phénomène.

Exemple 1. Soit $F/K = K(t)/K$ avec t transcendant sur K. (i) Si $t' \in K \setminus \{0\}$ alors $G = G_a(C)$, $T(F/K) = K[t]$, ν_∞ (la valuation $\frac{1}{t}$-adique) est la seule valuation invariante et nous avons $\nu_\infty(t) = -1$. (ii) Si $t'/t \in K \setminus \{0\}$ alors $G = G_m(C)$, $T(F/K) = K[t, \frac{1}{t}]$, les valuations G-invariantes de F/K sont ν_0 (la valuation t-adique) et ν_∞. Nous avons alors $\nu_0(\frac{1}{t}) = -1$ et $\nu_\infty(t) = -1$.

Cet exemple suggère que $T(F/K)$ puisse être engendré par des éléments ayant des pôles aux places invariantes. Avec le Théorème 4.2, nous prouverons une forme proche de ce résultat pour les extensions de Picard–Vessiot simples. Dans le cadre général des extensions faiblement normales ($F^G = K$), l'idée à retenir de cet exemple est la réciproque non démontrée à ce jour du Théorème 2.1 : si $f \in T(F/K)$ est transcendant sur K, existe t'il une place G-invariante de F/K en laquelle f ait un pôle ? La pertinence de cette idée est illustrée par l'exemple suivant.

Exemple 2. Soit F/K une extension différentielle elliptique de degré de transcendance 1 sans nouvelles constantes : $F = K(\wp, \wp')$ avec : $\wp'^2 = 4\wp^3 + a\wp + b$, $\Delta = a^3 + 27b^2 \neq 0$, $(a, b) \in C \times C$. Alors d'après [2] : $G = \mathrm{Gal}_\partial(F/K) \simeq (E(C), \oplus)$ la courbe elliptique sur C définie en affine par la même équation. L'action de G sur $S^\star(F/K)$ se ramenant à l'action de $(E(C), \oplus)$ sur $(E(\overline{K}), \oplus)$ par translation est sans point fixe. Ainsi, conformément à la réciproque citée plus haut, il faut s'attendre à ce que $T(F/K)$ ne contiennent que des éléments algébriques sur K. Effectivement, on peut prouver par des arguments valuatifs qu'ici $T(F/K) = K$. De cela, on déduit une nouvelle preuve algébrique du théorème de Drach–Kolchin assurant que F/K ne puisse être contenue dans une tour d'extensions de Picard–Vessiot successives de K.

Restreignant désormais notre attention à l'étude des extensions de Picard–Vessiot, nous démontrons la propriété de permanence suivante :

Théorème 2.3. *Soit $(F/K, \partial)$ une extension de Picard–Vessiot et ν une valuation de F/K G-invariante alors ν est encore $G^0(K)$-invariante.* (*Ici, $G^0(K)$ désigne le groupe des K-points de la composante connexe $G^0(C)$ de G.*)

Première étape : L'action de G sur $T(F/K)$ est C-linéaire donnée par des formules du genre : $\forall z \in T(F/K) V(z) = \mathrm{Vect}_C(\sigma(z), \sigma \in G)$ est un C-espace vectoriel de dimension finie, et

$$\sigma(z) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\sigma) z_i, \quad \forall \sigma \in G \tag{1}$$

où les z_i sont des conjugués particuliers de $z = z_1$ et les $a_i \in \Gamma(G)$. Le théorème de structure de Kolchin–Singer (voir [2] et [3]), $\Gamma(G(K)) \backsimeq T(F/K)$ quand K est algébriquement clos, nous permet de voir que $G^0(K)$ agit par automorphismes sur F/K en prolongeant l'action de $G^0(C)$, et que son action sur $T(F/K)$ est encore décrite par les relations (1).

Deuxième étape : Si ν est une valuation de F/K G-invariante, on montre alors que

$$\nu\big(\sigma(x)\big) = \nu(x), \quad \forall \sigma \in G,\ \forall x \in F. \tag{2}$$

Ainsi dans (1), nous avons $\nu(z) = \nu(z_1) = \cdots = \nu(z_n)$, ν étant triviale sur K et nous en déduisons

$$\nu\big(\sigma(z)\big) \geqslant \nu(z), \quad \forall \sigma \in G^0(K),\ \forall z \in T(F/K). \tag{3}$$

D'après (1), $G^0(K)$ laisse stable l'algèbre $T(F/K)$, étant un groupe, on doit donc avoir l'égalité dans (3). □

Remarquons que la condition $\nu(\sigma(x)) = \nu(x), \forall \sigma \in G,\ \forall x \in F$ est plus forte que la simple égalité $\sigma(R_\nu) = R_\nu$ comme le montre l'exemple suivant du à M. Spivakovsky : $F = K((t^{\mathbb{Q}}))$ le corps du séries à coefficients rationnels bien ordonnés, et ν la valuation t-adique correspondante. Si $\sigma : F \to F, \varphi(t) \mapsto \varphi(t^n)$ alors $\sigma(R_\nu) = R_\nu$ et $\nu(\sigma(\varphi)) = n\,\nu(\varphi), \forall \varphi$. On dira par la suite qu'une valuation vérifiant (2) est *fortement invariante*.

3. Valuations invariantes et continuité des dérivations

Définition 3.1. Soit (F, ∂) un corps différentiel de caractéristique nulle et ν une valuation de $F/\mathbb{Q}$. On dira que ∂ est continue par rapport à la topologie ν-adique si et seulement si il existe une borne $\omega_0 \in \Gamma_\nu$ telle que $\forall f \in F \setminus \{0\}, \nu(\partial(f)/f) \geqslant \omega_0$.

Cette notion de continuité de la dérivation par rapport à la topologie ν-adique généralise celle de « valuation différentielle » rencontrée dans [9,7,8,5,4,10]. Dans la lignée du Théorème 2.3, on obtient :

Théorème 3.2. *Soit $(F/K, \partial)$ une extension de Picard–Vessiot et ν une valuation G-invariante de F/C. Alors, pour tout $\Delta \in \mathrm{Lie}(G)$ (i.e., $\Delta \in \mathrm{Der}_k(F)$ et $[\Delta; \partial] = 0$), Δ est continue pour la topologie ν-adique avec $\omega_0 = 0$ pour borne.*

Les deux théorèmes suivants décrivent les comportements de ∂ par rapport aux topologies ν-adiques.

Théorème 3.3. *Soit $(F/K, \partial)$ une extension différentielle algébrique telle que K contienne toutes les racines de l'unité. (Ici, il n'est pas nécessaire de supposer les corps de constantes de F et de K distincts et algébriquement clos). Soit ν une valuation de F triviale sur les constantes de K. Si $\partial_{|K}$ est continue par rapport à la topologie ν-adique alors $\partial = \partial_{|F}$ est encore continue avec la même borne que $\partial_{|K}$.*

Puisque l'on doit conserver la borne, il suffit de démontrer l'énoncé dans le cadre des extensions finies. La première étape consiste à montrer le théorème dans le cas particulier où F/K est galoisienne et ν est $\mathrm{Gal}(F/K)$-invariante. Ceci conformément à l'esprit de ce paragraphe qui est de prouver que les valuations invariantes se distinguent des autres par de meilleures propriétés différentielles. Dans la deuxième étape, nous nous ramenons à la première par un argument de complétion hensélien en utilisant les résultats de [6]. Outre l'intérêt théorique de généraliser en le précisant un résultat classique de Chevalley et Morrison, le Théorème 3.3 permet de démontrer le résultat suivant qui s'inscrit dans la continuité des travaux de [7] et [10].

Théorème 3.4. *Soit F/K une extension de Picard–Vessiot liouvillienne, alors toute valuation de F/C, $\mathrm{Gal}_\partial(F/K)$-invariante. Si ∂ est continue sur K alors elle est encore continue sur F.*

La composante connexe G^0 de G étant résoluble, on se ramène par dévissage aux deux extensions liouvilliennes élémentaires de l'Exemple 1. Dans les deux cas, on suppose que $\partial_{|K}$ est continue de borne ω_0 et que ν est G-invariante. Dans le cas de l'adjonction d'une exponentielle d'intégrale, soit

$$f = f_n t^n + \cdots + f_0 \in K[t]. \tag{4}$$

Si $\sigma(t) = \lambda t$, pour $\lambda \in C \setminus \{0\}$, alors $\sigma(f) = \lambda^n f_n t^n + \cdots + f_0$. Ainsi, en prenant $n+1$ valeurs distinctes de λ et, en inversant le système de Vandermonde correspondant, on peut exprimer chaque terme $f_k t^k$ comme une C-combinaison linéaire de conjugués de f ayant tous la même valuation. Donc $\nu(f_k t^k) \geqslant \nu(f), \forall k \in \{0, \ldots, n\}$, puis $\nu(f') \geqslant \nu(f) + \omega_1$ avec $w_1 = \inf\{\omega_0; \nu(t'/t)\}$. Dans le cas de l'adjonction d'une intégrale, $\sigma(t) = t + c$ pour $c \in C$ et $\nu(\sigma(t)) = \nu(t+c) = \nu(t)$, ainsi on doit avoir $\nu(t) \leqslant 0$ dans Γ_ν (Ce qui est une illustration particulière du Théorème 2.1). Ainsi, il existe $A \in \Gamma_\nu^+$ tel que $\nu(t) = -A$. Cette fois, la même analyse que précédemment conduit en utilisant (4) à une inégalité moins satisfaisante : $\nu(f') \geqslant \nu(f) + \omega_0 - nA$. Cette inégalité incite à factoriser f dans $\overline{K}[t]$ pour se ramener à des polynômes de degré 1. On démontre alors que les prolongements $\tilde{\nu}$ de ν à $\overline{K}[t]$ sont encore $G_a(C)$-invariants. Le Théorème 3.3 permet de dire que ∂ est continue sur $\overline{K}$ de borne ω_0 pour la topologie $\tilde{\nu}$-adique et, par conséquent, que ∂ est continue de borne $\omega_1 = \omega_0 - A$ sur $K(t)$. $\square$

4. Existence de valuations fortement invariantes et Géométrie

L'Exemple 2 a montré que l'existence de valuations G-invariantes n'était pas systématique. Cependant, pour les groupes affines connexes, nous aurons le théorème suivant :

Théorème 4.1. *Soit K un corps algébriquement clos de caractéristique 0 et F le corps des fonctions d'un groupe algébrique affine connexe G défini sur K. Alors il existe des valuations non triviales de F/K invariantes sous l'action de G, et ses dernières sont toutes fortement invariantes.*

Première étape : on prouve que si G agit sur une variété non affine birationnelle à G, alors il existe une sous variété irréductible Z stricte de X stable sous l'action de G. Ainsi, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X,Z}$ est un anneau local géométrique de F/K qui est G-stable. Deuxième étape : le théorème de désingularisation G-équivariant d'Hironaka permet de prouver l'existence d'une G-variété projective lisse X birationnelle à G (voir [1]). Ainsi, dans la première étape, on peut supposer que $\mathcal{O}$ est G-stable et régulier. Troisième étape : $\mathcal{O}$ étant régulier d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, la topologie $\mathfrak{m}$-adique permet de définir la valuation divisorielle associée ν. Laquelle est G-invariante par construction. Quatrième étape : la forte invariance des valuations invariantes se montre par des arguments similaires à ceux du Théorème 2.3. $\square$

Nous donnons maintenant un théorème de structure géométrique des valuations fortement invariantes inspiré d'un théorème classique de Zariski (voir [11]).

Théorème 4.2. *Soit F/K une extension de corps de type fini et G un sous groupe d'automorphismes de F/K. Soit ν une valuation de F/K fortement G-invariante telle qu'il existe un anneau local géométrique $\mathcal{O}$ de F/K, G-stable et dominé par R_ν. Alors, R_ν coïncide avec la limite inductive filtrante des anneaux locaux géométriques de F/K, G-stables et dominés par R_ν.*

Quelques conséquences pour les extensions de Picard–Vessiot.

Corollaire 4.3. *Soit F/K une extension de Picard–Vessiot de groupe de Galois différentiel G et G^0 la composante connexe de G.* (i) *Il existe des valuations de F/K qui sont G^0-fortement invariantes.* (ii) *Si G est un groupe simple infini alors $T(F/K)$ est différentiellement engendré par les éléments $t \in T(F/K)$ tels qu'il existe une valuation ν de F/K, G-invariante avec $\nu(t) < 0$ dans Γ_ν.*

Le point *1* du Théorème 4.2 est une conséquence du Théorème 4.1. Pour le point *2*, soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des $t \in T(F/K)$ ayant un pôle en l'une des places G-invariantes de F/K. Les éléments de $\mathfrak{F}$ et leurs dérivées successives engendrent une sous-algèbre différentielle A de $T(F/K)$ stable sous l'action de G. Son corps des fractions E est donc une extension de Picard–Vessiot de K contenue dans F pour laquelle $T(E/K) = A$. Dans le cas où G est simple, il est connexe et, d'après le point 1 du théorème, l'existence de valuations G-invariantes assure l'inclusion stricte $K \subsetneq E$. Par le théorème de correspondance de Kolchin, G étant simple, on doit avoir $E = F$ et ainsi $T(F/K) = T(E/K) = A$.

Références

[1] S. Encinas, O. Villamayor, A course on constructive desingularisation and equivariance, in: Resolution of Singularities, Progr. Math., vol. 181, Birkhäuser, Basel, 2000, pp. 147–225.
[2] E.R. Kolchin, Differential Algebra and Algebraic Groups, Academic Press, New York, London, 1973.
[3] A.R. Magid, Lectures on Differential Galois Theory, Amer. Math. Soc. Col. Univ. Lectures Ser., vol. 7, 1994.
[4] M. Matsuda, First Order Algebraic Differential Equations, Lecture Notes in Math., vol. 804, Springer-Verlag, 1980.
[5] Morrison, Continous derivation, J. Algebra 110 (1987) 468–479.
[6] M. Raynaud, Anneaux locaux henséliens, Lecture Notes in Math., vol. 169, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
[7] M. Rosenlicht, An analogue of l'Hôpital's rule, Proc. Amer. Math. Soc. 37 (2) (1973).
[8] M. Rosenlicht, Differential valuations, Pacific J. Math. 86 (1980) 301–309.
[9] A. Seidenberg, Contribution to Algebra, Academic Press, New York, 1977.
[10] M. Singer, Solutions of linear differential equations in function fields of one variable, Proc. Amer. Math. Soc. 54 (2) (1976).
[11] O. Zariski, P. Samuel, Conmutative Algebra, The University Series in Higher Mathematics, vol. II, Van Nostrand, 1960.