Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 689–692
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Équations aux dérivées partielles

Limite non visqueuse pour le système de Navier–Stokes dans un espace critique

Taoufik Hmidi [a], Sahbi Keraani [b]

[a] *Centre de mathématiques, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France*
[b] *IRMAR Université de Rennes 1, campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France*

Reçu et accepté le 24 février 2004

Présenté par Jean-Michel Bony

Résumé

Dans un article récent, Vishik montre que le système d'Euler bidimensionnel est globalement bien posé dans l'espace de Besov critique $B^2_{2,1}$. Nous montrons ici que le système de Navier–Stokes est globalement bien posé dans $B^2_{2,1}$, avec des estimations uniformes par rapport à la viscosité. Nous prouvons également un résultat global de limite non visqueuse. Le taux de convergence dans L^2 est de l'ordre ν. ***Pour citer cet article : T. Hmidi, S. Keraani, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abstract

Inviscid limit for Navier–Stokes system in a critical space. In a recent paper, Vishik proved the global well-posedness of the two-dimensional Euler equation in the critical Besov space $B^2_{2,1}$. In the present paper we prove that Navier–Stokes system is globally well-posed in $B^2_{2,1}$, with uniform estimates on the viscosity. We prove also a global result of inviscid limit. The convergence rate in L^2 is of order ν. ***To cite this article: T. Hmidi, S. Keraani, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

1. Introduction

Les systèmes de Navier–Stokes et Euler incompressibles sont décrits par

$$(NS_\nu)\quad \begin{cases} \partial_t v_\nu + v_\nu\cdot\nabla v_\nu - \nu\Delta v_\nu = -\nabla p_\nu, \\ \operatorname{div} v_\nu = 0, \\ v_{\nu\,|t=0} = v^0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (E)\quad \begin{cases} \partial_t v + v\cdot\nabla v = -\nabla p, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ v_{|t=0} = v^0, \end{cases}$$

où ν est un paramètre positif désignant la viscosité du fluide. Les scalaires p_ν et p représentent la pression. Nous savons que le système de Navier–Stokes est localement bien posé pour toute donnée initiale dans H^s, $s \geqslant \frac{d}{2} - 1$ (voir [2]). Le résultat est en fait global lorsqu'on est en dimension deux d'espace. Par ailleurs, le système d'Euler est localement bien posé dans les espaces de Sobolev H^s dès que $s > \frac{d}{2} + 1$ (voir par exemple [4]). En revanche,

Adresses e-mail : hmidi@daphne.math.polytechnique.fr (T. Hmidi), sahbi.keraani@univ-rennes1.fr (S. Keraani).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.02.013

si l'on remplace l'espace critique $H^{1+d/2}$ par $B^{1+d/2}_{2,1}$, alors on peut assurer un résultat local d'existence d'une unique solution (voir [1]). Lorsqu'on est en dimension deux d'espace, la solution d'Euler est globale pour toute donnée surcritique. Récemment, Vishik a montré dans [6] que la solution d'Euler est globale en dimension deux dans les espaces critiques $B^{1+2/p}_{p,1}$, avec $p \in]1,+\infty[$.

Concernant la limite non visqueuse, on peut établir (voir [5]) que si la donnée initiale est dans un espace H^s, $s > \frac{d}{2}+1$, alors il existe un temps commun $T > 0$ tel que la solution de Navier–Stokes converge fortement vers celle d'Euler. Le taux de convergence dans l'espace L^2 est de l'ordre ν. Un résultat semblable est établi dans les espaces $B^{1+d/p}_{p,1}$ mais localement en temps, même en dimension deux [1].

Dans ce travail, nous allons montrer qu'en dimension deux le système de Navier–Stokes est globalement bien posé dans l'espace critique $B^2_{2,1}$, avec un contrôle uniforme par rapport à la viscosité. Nous prouvons également un résultat de limite non visqueuse. Toutefois la démonstration ne s'adapte pas aux espaces $B^{1+2/p}_{p,1}$ lorsque $p > 2$.

Pour définir les espaces de Besov en question, nous aurons besoin de la décomposition de Littlewood–Paley : il existe deux fonctions positives et régulières χ et φ qui sont supportées respectivement dans une boule et une couronne telles que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\chi(\xi) + \sum_{q\geqslant 0} \varphi\big(2^{-q}\xi\big) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{3} \leqslant \chi^2(\xi) + \sum_{q\geqslant 0} \varphi^2\big(2^{-q}\xi\big) \leqslant 1. \tag{1}$$

On pose alors pour toute distribution tempérée u

$$\Delta_{-1}u = \chi(D)u\ ; \quad \forall q \in \mathbb{N}, \quad \Delta_q u = \varphi\big(2^{-q}D\big)u \quad \text{et} \quad S_q u = \sum_{-1\leqslant p\leqslant q-1} \Delta_p u.$$

Ainsi on définit les espaces de Besov $B^s_{p,1}$, avec $p \geqslant 1$ et $s \in \mathbb{R}$, par

$$B^s_{p,1} = \Big\{ u \in S'\big(\mathbb{R}^d\big)\ ; \|u\|_{B^s_{p,1}} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{q\geqslant -1} 2^{qs}\|\Delta_q u\|_{L^p} < +\infty \Big\}.$$

Voici notre principal théorème.

Théorème 1.1. *Soit v^0 un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ à divergence nulle et appartenant à $B^2_{2,1}$. Alors le système (NS_ν) possède une unique solution globale dans $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; B^2_{2,1})$ satisfaisant l'estimation uniforme en ν*

$$\big\|v_\nu(t)\big\|_{B^2_{2,1}} \leqslant C\big\|v^0\big\|_{B^2_{2,1}} \exp\big(\mathrm{e}^{\exp Ct\|v^0\|_{B^2_{2,1}}}\big).$$

De plus, la solution de (NS_ν) converge vers celle d'Euler, quand la viscosité tend vers zéro, dans tous les espaces $B^{2-s}_{2,1}$, pour tout $s > 0$:

$$\big\|v_\nu(t) - v(t)\big\|_{L^2} \leqslant C(\nu t)\big\|v^0\big\|_{B^2_{2,1}} \mathrm{e}^{\exp Ct\|v^0\|_{B^2_{2,1}}}. \tag{2}$$

2. Limite non visqueuse

La démonstration de l'estimation (2) repose sur une méthode d'énergie faisant appel aux estimations suivantes, prouvées dans [6] :

$$\big\|v(t)\big\|_{B^2_{2,1}} \leqslant C\big\|v^0\big\|_{B^2_{2,1}} \mathrm{e}^{\exp Ct\|v^0\|_{B^2_{2,1}}} \quad \text{et} \quad \big\|\nabla v(t)\big\|_{L^\infty} \leqslant C\big\|v^0\big\|_{B^2_{2,1}} \mathrm{e}^{Ct\|v^0\|_{B^2_{2,1}}}. \tag{3}$$

En écrivant l'équation régissant $W_\nu = v_\nu - v$ et en se servant d'une estimation d'énergie L^2, alors on trouve grâce à l'incompressibilité du flot

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|W_\nu(t)\|_{L^2}^2+\nu\|\nabla W_\nu(t)\|_{L^2}^2\leqslant \nu\|\Delta v\|_{L^2}\|W_\nu\|_{L^2}+\|\nabla v\|_{L^\infty}\|W_\nu\|_{L^2}^2.$$

Donc, on obtient suite à une intégration en temps et une application du lemme de Gronwall,

$$\|W_\nu(t)\|_{L^2}\leqslant \nu\int_0^t\|\Delta v(\tau)\|_{L^2}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{e}^{\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}\,\mathrm{d}\tau}.$$

Il suffit à ce stade d'utiliser les estimations (3) pour déduire (2).

3. Effet régularisant

En dimension deux, le tourbillon $\omega_\nu=\partial_1 v_\nu^2-\partial_2 v_\nu^1$ satisfait l'équation

$$(TD_\nu)\quad \partial_t\omega_\nu+v_\nu\cdot\nabla\omega_\nu-\nu\Delta\omega_\nu=0.$$

Nous avons déjà établi dans [3] le résultat suivant qui se démontre à l'aide d'un changement de variables lagrangien.

Proposition 3.1. *Soit $\omega^0\in L^p$, avec $p\in[1,+\infty]$ et v_ν une solution de (NS_ν) qui soit lipschitzienne. Alors, pour tout $q\in\mathbb{N}$ on a l'estimation*

$$\nu 2^{2q}\int_0^t\|\Delta_q\omega_\nu(\tau)\|_{L^p}\,\mathrm{d}\tau\leqslant C\|\omega^0\|_{L^p}\left(1+\int_0^t\|\nabla v_\nu(\tau)\|_{L^\infty}\,\mathrm{d}\tau\right).$$

4. Estimation Lipschitz de la vitesse

Nous allons voir que l'estimation (2) combinée avec l'effet régularisant permettent de contrôler la quantité $\int_0^t\|\nabla v_\nu(\tau)\|_{L^\infty}\,\mathrm{d}\tau$. Soit N un entier positif. Alors l'inegalité triangulaire donne

$$\int_0^t\|\nabla v_\nu(\tau)\|_{L^\infty}\,\mathrm{d}\tau\leqslant\int_0^t\|\nabla S_N v(\tau)\|_{L^\infty}\,\mathrm{d}\tau+\int_0^t\|\nabla S_N(v_\nu-v)(\tau)\|_{L^\infty}\,\mathrm{d}\tau+\int_0^t\|\nabla(\mathrm{Id}-S_N)v_\nu(\tau)\|_{L^\infty}\,\mathrm{d}\tau.\tag{4}$$

Signalons d'abord que l'inégalité de convolution entraîne

$$\int_0^t\|\nabla S_N v(\tau)\|_{L^\infty}\,\mathrm{d}\tau\leqslant C\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}\,\mathrm{d}\tau.\tag{5}$$

D'un autre côté, nous avons par le biais de l'inégalité de Bernstein et l'estimation (2)

$$\int_0^t\|\nabla S_N(v_\nu-v)(\tau)\|_{L^\infty}\,\mathrm{d}\tau\leqslant C2^{2N}\int_0^t\|(v_\nu-v)(\tau)\|_{L^2}\,\mathrm{d}\tau\leqslant C\nu t2^{2N}\,\mathrm{e}^{\exp Ct\|v^0\|_{B^2_{2,1}}}.\tag{6}$$

Pour la majoration du dernier terme de (4), on utilise la Proposition 3.1, qui implique

$$\int_0^t\|\nabla(\mathrm{Id}-S_N)v_\nu(\tau)\|_{L^\infty}\,\mathrm{d}\tau\leqslant C\sum_{q\geqslant N}\int_0^t\|\Delta_q\omega_\nu(\tau)\|_{L^\infty}\,\mathrm{d}\tau\leqslant C\frac{\|\omega^0\|_{L^\infty}}{\nu 2^{2N}}\left(1+\int_0^t\|\nabla v_\nu(\tau)\|_{L^\infty}\,\mathrm{d}\tau\right).\tag{7}$$

En reportant (5), (6) et (7) dans (4), on trouve

$$\int_0^t \|\nabla v_\nu(\tau)\|_{L^\infty}\,\mathrm{d}\tau \leqslant C\bigl(1+\nu t 2^{2N}\bigr)\,\mathrm{e}^{\exp Ct\|v^0\|_{B^2_{2,1}}} + C\frac{\|\omega^0\|_{L^\infty}}{\nu 2^{2N}}\left(1+\int_0^t \|\nabla v_\nu(\tau)\|_{L^\infty}\,\mathrm{d}\tau\right).$$

Par conséquent, en choisissant N tel que

$$C\frac{\|\omega^0\|_{L^\infty}}{\nu 2^{2N}} \simeq \frac{1}{2},$$

alors on aura

$$\int_0^t \|\nabla v_\nu(\tau)\|_{L^\infty}\,\mathrm{d}\tau \leqslant C\bigl(1+t\|\omega^0\|_{L^\infty}\bigr)\,\mathrm{e}^{\exp Ct\|v^0\|_{B^2_{2,1}}} \leqslant C\,\mathrm{e}^{\exp Ct\|v^0\|_{B^2_{2,1}}}. \tag{8}$$

5. Fin de la preuve

Désormais, pour alléger les notations, le tourbillon visqueux ne sera pas indexé par ν. En appliquant l'opérateur de troncature en fréquences Δ_q à l'Éq. (TD_ν) et en posant $\omega_q = \Delta_q\omega$, on aura

$$\partial_t\omega_q + v\cdot\nabla\omega_q - \nu\Delta\omega_q = -[\Delta_q, v\cdot\nabla]\omega.$$

Or, nous avons l'estimation suivante qui est démontrée par exemple dans [6].

$$\bigl\|[\Delta_q, v\cdot\nabla]\omega\bigr\|_{L^p} \leqslant C\|\nabla v\|_{L^\infty}\sum_{j\geqslant q-N_0} 2^{q-j}\|\Delta_j\omega\|_{L^p}.$$

Donc en prenant le produit scalaire L^2 avec $\bar{\omega}_q$ et en se servant de l'incompressibilité du flot, on trouve

$$\bigl\|\omega_q(t)\bigr\|_{L^2} \leqslant \bigl\|\omega_q(0)\bigr\|_{L^2} + C\int_0^t \bigl\|\nabla v(\tau)\bigr\|_{L^\infty}\sum_{j\geqslant q-N_0} 2^{q-j}\bigl\|\Delta_j\omega(\tau)\bigr\|_{L^2}\,\mathrm{d}\tau.$$

En multipliant par 2^q et en sommant sur les q, on trouve grâce à l'inégalité de convolution de Young

$$\bigl\|\omega(t)\bigr\|_{B^1_{2,1}} \leqslant \bigl\|\omega^0\bigr\|_{B^1_{2,1}} + C\int_0^t \bigl\|\nabla v(\tau)\bigr\|_{L^\infty}\bigl\|\omega(\tau)\bigr\|_{B^1_{2,1}}\,\mathrm{d}\tau.$$

Donc le lemme de Gronwall donne

$$\bigl\|\omega(t)\bigr\|_{B^1_{2,1}} \leqslant \bigl\|\omega^0\bigr\|_{B^1_{2,1}}\,\mathrm{e}^{C\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}}.$$

Pour estimer les hautes fréquences de la vitesse, on utilise la relation $\Delta v^i = (-1)^{i-1}\partial_i\omega$. Les basses fréquences de v sont contrôlées grâce à l'inégalité d'énergie.

Références

[1] R. Danchin, The inviscid limit for density-dependent incompressible fluids, Prépublication, 2003.
[2] H. Fujita, T. Kato, On the nonstationnary Navier–Stokes system, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 32 (1962) 243–260.
[3] T. Hmidi, régularité höldérienne des poches de tourbillon visqueuses, Prépublication de L'École Polytechnique, 2003.
[4] T. Kato, G. Ponce, Commutator estimates and the Euler and Navier–Stokes equations, Comm. Pure Appl. Math. 41 (1988) 891–907.
[5] A. Majda, Vorticity and the mathematical theory of an incompressible fluid flow, Comm. Pure Appl. Math. 38 (1986) 187–220.
[6] M. Vishik, Hydrodynamics in Besov spaces, Arch. Rational Mech. Anal. 145 (1998) 197–214.