Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 511–514
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Théorie des nombres

Transcendance « à la Liouville » de certains nombres réels

Boris Adamczewski

Laboratoire de recherche en informatique, UMR 8623, bât. 490, Université Paris-Sud, 91405 Orsay, France

Reçu le 29 janvier 2004 ; accepté le 3 février 2004

Présenté par Jean-Pierre Kahane

Résumé

En reprenant l'approche originelle de J. Liouville, nous démontrons la transcendance de nombres réels du type $\sum_{n=0}^{+\infty}(1/\beta^{u_n})$, où β désigne un nombre de Pisot ou de Salem et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite croissante d'entiers suffisamment lacunaire. ***Pour citer cet article : B. Adamczewski, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abstract

A Liouville-like approach for the transcendence of some real numbers. Using a Liouville-like approach, we prove that real numbers like $\sum_{n=0}^{+\infty}(1/\beta^{u_n})$, where β is a Pisot or a Salem number and where $(u_n)_{n\geqslant 0}$ is a sufficiently lacunary sequence of positive integers, are transcendental. ***To cite this article: B. Adamczewski, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

En 1844, J. Liouville [5] montra qu'un nombre réel admettant de très bonnes approximations rationnelles ne peut être algébrique et fournit alors les premiers exemples de nombres transcendants. Il est ainsi possible de démontrer de façon élémentaire la transcendance du nombre $\sum_{n=0}^{+\infty}(1/10^{n!})$ ou plus généralement du nombre $\sum_{n=0}^{+\infty}(1/b^{u_n})$, lorsque b désigne un entier supérieur ou égal à 2 et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'entiers extrêmement lacunaire. L'objet de cette Note est de remarquer que les travaux de K.F. Roth [9] et D. Ridout [8] ainsi que leurs généralisations aux corps de nombres permettent de traiter le cas de suites beaucoup moins lacunaires et de remplacer l'entier b par un nombre de Pisot ou de Salem. Cette approche permet en particulier de retrouver la transcendance de certains nombres réels dont le développement en fraction continue est à quotients partiels bornés et qui sont donc mal approchables par des nombres rationnels.

Théorème 1. *Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite strictement croissante d'entiers positifs. S'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $u_{n+1} > (1+\varepsilon)u_n$ pour une infinité d'entiers n, alors la série entière $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{u_k}$ prend des valeurs transcendantes en tout point $z = \frac{1}{\beta}$ où β est un nombre de Pisot ou de Salem.*

Adresse e-mail : Boris.Adamczewski@lri.fr (B. Adamczewski).

1631-073X/$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2004.02.002

La méthode originelle de Liouville permet, lorsque β est un entier, de traiter le cas où l'on remplace « il existe $\varepsilon > 0$ » par la condition bien plus restrictive « pour tout $\varepsilon > 0$ ». Le gain est donc considérable. Nous pourrions également donner un énoncé un peu plus général exprimant le fait que les nombres réels dont un développement (il en existe généralement plusieurs) en base β contient de larges plages de zéros apparaissant suffisamment tôt sont transcendants. Nous rappelons qu'un nombre de Pisot est un entier algébrique réel strictement supérieur à 1 dont les conjugués algébriques sont tous de module strictement inférieur à 1 et qu'un nombre de Salem est un entier algébrique réel strictement supérieur à 1 dont les conjugués algébriques sont tous de module inférieur à 1 et qui admet au moins un conjugué de module 1. En particulier un entier supérieur ou égal à deux est un nombre de Pisot.

Pour démontrer le Théorème 1, nous procédons de la façon suivante. Nous considérons certaines sommes partielles de la série $f(z)$, qui fournissent une suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments du corps $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\beta)$ approchant $f(z)$. La condition imposée sur β (à savoir, être un nombre de Pisot ou de Salem) permet l'obtention d'une bonne majoration de la hauteur des approximants α_n. Bien que ces approximations s'avèrent *a priori* insuffisantes pour obtenir la transcendance de $f(z)$ *via* le théorème de Roth pour les corps de nombres obtenu par W.J. Leveque [4], nous montrons que la « proportion manquante » est en fait comblée par l'approximation projective du point à l'infini par la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ en certaines places finies et infinies dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$. Nous utilisons ensuite la généralisation suivante du théorème de Thue–Siegel–Roth donnée par P. Corvaja [1] (voir également [3] pour un énoncé similaire). Ce théorème permet de prouver de façon analogue que pour tout nombre premier p, le nombre p-adique $f(p)$ est transcendant sur $\mathbb{Q}$ (nous ne distinguons pas ici les ensembles $\mathbb{Q}$ et $i(\mathbb{Q})$, i désignant l'injection naturelle de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}_p$).

Théorème A. *Soient $(\mathbb{K}, \mathcal{V}_{\mathbb{K}})$ un corps multivalué satisfaisant à la formule du produit, $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ des éléments algébriques sur $\mathbb{K}$, $w_1, \dots, w_m$ des places deux à deux distinctes dans $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$, $\|\cdot\|_{w_1}, \dots, \|\cdot\|_{w_m}$ les valeurs absolues correspondantes normalisées par rapport à $\mathbb{K}$; pour i tel que $1 \leqslant i \leqslant m$, on choisit un prolongement de $\|\cdot\|_{w_i}$ à $\mathbb{K}(\alpha_i)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante C dépendant des données $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}, \alpha_1, \dots, \alpha_m, w_1, \dots, w_m, \varepsilon$ telle que pour tout β dans $\mathbb{K}$ avec $H(\beta) > C$ on ait*

$$\prod_{i=1}^{m} \|\alpha_i - \beta\|_{w_i} > \frac{1}{H(\beta)^{2+\varepsilon}},$$

la hauteur d'un élément x de $\mathbb{K}$ étant définie par $H(x) = \prod_{v\in\mathcal{V}} \max\{1, |x|_v\}$.

Nous allons donner à présent quelques exemples d'applications du Théorème 1. Lorsque $u_n = 2^n$, on obtient une démonstration rapide de la transcendance de $\sum_{k=0}^{+\infty}(1/b^{2^n})$, pour b entier supérieur ou égal à 2. Ce résultat a été établi par Kempner [2], puis étendu à toute base algébrique de module strictement supérieur à 1 par Mahler [6] à l'aide d'une méthode fondée sur l'étude d'une équation fonctionnelle associée à la série entière $f(z)$. Il est intéressant de noter que le développement en fraction continue d'un tel nombre est à quotients partiels bornés d'après [10] et que ce nombre est donc très mal approchable par des nombres rationnels ; cela fournit notamment un exemple explicite d'un nombre réel dont la transcendance peut être obtenue par le théorème de Ridout mais pas par la version classique du théorème de Thue–Siegel–Roth. Il est important de noter que la condition intervenant dans le Théorème 1 est préservée par une légère perturbation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, alors que la méthode développée par K. Mahler est très sensible puisque $f(z)$ doit vérifier une équation fonctionnelle d'un certain type. En particulier, le Théorème 1 implique sans plus de difficulté la transcendance de séries telles que $\sum_{n=0}^{+\infty}(1/\beta^{\lfloor 2^n + e\sqrt{n}\rfloor})$, $\sum_{n=0}^{+\infty}(1/\beta^{\lfloor 2^n \log n\rfloor})$ ou $\sum_{n=0}^{+\infty}(1/\beta^{\lfloor (\pi/3)^n\rfloor})$. Voici un autre exemple dans le même esprit. Étant donnés un entier $b \geqslant 2$ est un mot fini W sur l'alphabet $\{0, 1, \dots, b-1\}$, notons $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite ordonnée des entiers dont le développement b-adique ne contient pas W, alors K. Mahler [7] a prouvé que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{u_n}$ prend des valeurs transcendantes en tout point z algébrique de module strictement inférieur à 1. Il est aisément vérifiable que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ satisfait à la condition du Théorème 1, ce qui permet de retrouver partiellement et par une méthode complètement différente ce résultat lorsque $z = \frac{1}{\beta}$ et que β est un nombre de Pisot ou de Salem.

Le Théorème 1 s'applique également lorsque la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite strictement croissante d'entiers vérifiant une relation de récurrence linéaire du type $u_{n+r} = n_{r-1}u_{n+r-1} + n_{r-2}u_{n+r-2} + \cdots + n_0 u_n$, où les n_i

sont des entiers positifs et où $n_{r-1} \geqslant 1$. En particulier, on obtient la transcendance des nombres $\sum_{n=0}^{+\infty}(1/\beta^{F_n})$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}(1/\beta^{L_n})$, les suites $(F_n)_{n\geqslant 0}$ et $(L_n)_{n\geqslant 0}$ désignant respectivement la suite de Fibonacci et la suite de Lucas.

Démonstration du Théorème 1. Soient β un nombre de Pisot ou de Salem de degré d sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\beta)$. Considérons une suite strictement croissante d'entiers $(u_j)_{j\geqslant 0}$ satisfaisant à la condition du Théorème 1. Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ et une suite strictement croissante $(j_n)_{n\geqslant 0}$ telle que pour tout j, $u_{j_n+1} > (1+\varepsilon)u_{j_n}$. Afin de simplifier les notations, notons pour tout n, $r_n = u_{j_n}$. Posons $\alpha = f(\frac{1}{\beta})$. Soit $(a_k)_{k\geqslant 0}$ la suite binaire définie par $a_k = 1$ si $k \in (u_j)_{j\geqslant 0}$ et $a_k = 0$ sinon. Ainsi, $\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty}(a_k/\beta^k)$. Pour tout entier n, considérons le nombre α_n défini par $\alpha_n = \sum_{k=0}^{r_n}(a_k/\beta^k)$. L'hypothèse sur la suite $(r_n)_{j\geqslant 0}$ assure que $|\alpha - \alpha_n| < 1/(\beta^{r_n})^{1+\varepsilon}$. En posant $P_n(\beta) = \sum_{k=0}^{r_n} a_{r_n-k}\beta^k$, il vient $\alpha_n = P_n(\beta)/\beta^{r_n}$. Puisque β est un entier algébrique et que P_n est à coefficients entiers, nous avons $|P_n(\beta)|_{\mathfrak{B}} \leqslant 1$ et $1/|\beta^{r_n}|_{\mathfrak{B}} \geqslant 1$, pour tout idéal $\mathfrak{B}$ de $P(\mathbb{K})$, où $P(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des idéaux premiers de l'anneau des entiers de $\mathbb{K}$. Il suit donc :

$$H(\alpha_n) \leqslant \prod_{i=1}^{d} \max\left\{1, \left|\frac{P_n(\beta)}{\beta^{r_n}}\right|_i\right\} \times \prod_{\mathfrak{B}\in P(\mathbb{K})} \frac{1}{|\beta^{r_n}|_{\mathfrak{B}}}. \tag{1}$$

D'après la formule du produit, nous obtenons que

$$\prod_{\mathfrak{B}\in P(\mathbb{K})} \frac{1}{|\beta^{r_n}|_{\mathfrak{B}}} = \mathcal{N}_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}\big(\beta^{r_n}\big) = \mathcal{N}_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(\beta)^{r_n}.$$

Nous rappelons que si f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{N}$ et à valeurs positives, $f(n) \ll g(n)$ signifie qu'il existe une constante c telle que $f(n) < cg(n)$ pour tout entier n. Comme $\beta > 1$ et que P_n est un polynôme de degré au plus r_n dont les coefficients sont égaux à 0 ou 1,

$$\left|\frac{P_n(\beta)}{\beta^{r_n}}\right| \ll 1.$$

Puisque β est un nombre de Pisot ou de Salem, $|\beta_i| \leqslant 1$ pour $2 \leqslant i \leqslant d$ et donc $|P_n(\beta)|_i = |P_n(\beta_i)| < (r_n+1)$. Ainsi,

$$\prod_{i=1}^{d} \max\left\{1, \left|\frac{P_n(\beta)}{\beta^{r_n}}\right|_i\right\} \ll r_n^{d-1} \prod_{i=2}^{d} \frac{1}{|\beta|_i^{r_n}} \ll r_n^{d-1} \frac{\beta^{r_n}}{\mathcal{N}_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(\beta)^{r_n}}.$$

Nous obtenons finalement d'après (1) :

$$H(\alpha_n) \ll r_n^{d-1}\beta^{r_n}, \tag{2}$$

la constante intervenant dans cette majoration dépendant uniquement de β et f.

Afin d'éviter d'avoir à réellement considérer l'espace projectif $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, considérons l'homographie T qui échange le point à l'infini et 0 :

$$T : x \to \frac{1}{x}.$$

Nous observons que $H(T(x)) = H(x)$ pour tout x dans $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Il vient

$$\left|\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha_n}\right| = \left|\frac{\alpha - \alpha_n}{\alpha\alpha_n}\right| \ll |\alpha - \alpha_n| < \frac{1}{(\beta^{r_n})^{1+\varepsilon}}.$$

D'autre part, pour toute place v :

$$\left|0 - \frac{1}{\alpha_n}\right|_v = \left|\frac{\beta^{r_n}}{P_n(\beta)}\right|_v.$$

Soit $\mathcal{J}$ le sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, d\}$ composé des places infinies j telles que

$$\left|\frac{\beta^{r_n}}{P_n(\beta)}\right|_j < 1.$$

Considérons l'ensemble $\mathfrak{J}$ formé des places finies $\mathfrak{B}$ telles que $|\beta|_{\mathfrak{B}} < 1$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que pour tout $\mathfrak{B} \in \mathfrak{J}$, $|P_n(\beta)|_{\mathfrak{B}} = 1$. Ainsi,

$$\prod_{j\in\mathcal{J}}\left|\frac{1}{\alpha_n}\right|_j \times \prod_{\mathfrak{B}\in\mathfrak{J}}\left|\frac{1}{\alpha_n}\right|_{\mathfrak{B}} = \prod_{j\in\mathcal{J}}\left|\frac{1}{\alpha_n}\right|_j \times \prod_{\mathfrak{B}\in\mathfrak{J}}|\beta|_{\mathfrak{B}}^{r_n} = \prod_{j\in\mathcal{J}}\left|\frac{1}{\alpha_n}\right|_j \times \frac{1}{\mathcal{N}_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(\beta)^{r_n}} = \prod_{j\in\mathcal{J}}\left|\frac{\beta^{r_n}}{P_n(\beta)}\right|_j \times \frac{1}{\mathcal{N}_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(\beta)^{r_n}}.$$

Or, par définition de $\mathcal{J}$, on a

$$\prod_{j\in\mathcal{J}}\left|\frac{\beta^{r_n}}{P_n(\beta)}\right|_j = \prod_{i=1}^{d}\max\left\{1, \left|\frac{\beta^{r_n}}{P_n(\beta)}\right|_i\right\}.$$

D'après (1), il vient

$$\prod_{j\in\mathcal{J}}\left|0-\frac{1}{\alpha_n}\right|_j \times \prod_{\mathfrak{B}\in\mathfrak{J}}\left|0-\frac{1}{\alpha_n}\right|_{\mathfrak{B}} \ll \frac{1}{H(\alpha_n)}.$$

Nous obtenons donc

$$\prod_{j\in\mathcal{J}}\left|0-\frac{1}{\alpha_n}\right|_j \times \prod_{\mathfrak{B}\in\mathfrak{J}}\left|0-\frac{1}{\alpha_n}\right|_{\mathfrak{B}} \times \left|\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha_n}\right| \ll \frac{1}{H(\alpha_n)\times(\beta^{r_n})^{1+\varepsilon}}.$$

D'après (2), il existe $\gamma > 0$ tel que

$$\prod_{j\in\mathcal{J}}\left|0-\frac{1}{\alpha_n}\right|_j \times \prod_{\mathfrak{B}\in\mathfrak{J}}\left|0-\frac{1}{\alpha_n}\right|_{\mathfrak{B}} \times \left|\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha_n}\right| \ll \frac{1}{H(\alpha_n)^{2+\gamma}}.$$

Le Théorème A entraîne ainsi la transcendance de $\frac{1}{\alpha}$ et donc celle de α. $\square$

Remerciements

Je tiens à remercier J.-P. Allouche, J.-P. Kahane et l'arbitre pour leurs commentaires ainsi que J. Shallit pour m'avoir indiqué l'article de A. J. Kempner.

Références

[1] P. Corvaja, Autour du théorème de Roth, Monatsh. Math. 124 (1997) 147–175.
[2] A.J. Kempner, On transcendental numbers, Trans. Amer. Math. Soc. 17 (1916) 476–482.
[3] S. Lang, Fundamentals of Diophantine Geometry, Springer-Verlag, New York, 1983.
[4] W.J. LeVeque, Topics in Number Theory, vols. 1 and 2, Addison-Wesley, Reading, MA, 1956.
[5] J. Liouville, Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationelles algébriques, C. R. Acad. Sci. Paris 18 (1844) 883–885 et 993–995.
[6] K. Mahler, Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen, Math. Ann. 101 (1929) 342–366; Corrigendum, Math. Ann. 103 (1930) 532.
[7] K. Mahler, On the generating function of the integers with a missing digit, J. Indian Math. Soc. (N.S.) Part A 15 (1951) 33–40.
[8] D. Ridout, Rational approximations to algebraic numbers, Mathematika 4 (1957) 125–131.
[9] K.F. Roth, Rational approximations to algebraic numbers, Mathematika 2 (1955) 1–20; Corrigendum, Mathematika 2 (1955) 168.
[10] J. Shallit, Simple continued fractions for some irrational numbers, J. Number Theory 11 (1979) 209–217.