Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 453–456
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Équations aux dérivées partielles/Physique mathématique

Scattering pour l'équation de Schrödinger en présence d'un potentiel répulsif

Jean-François Bony [a], Rémi Carles [b], Dietrich Häfner [a], Laurent Michel [c]

[a] *MAB, UMR 5466 CNRS, Université Bordeaux 1, 351 cours de la Libération, 33405 Talence cedex, France*
[b] *IRMAR, UMR 6625 CNRS, Université de Rennes 1, campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France*
[c] *Institut Gallilée, Département de mathématiques, Université Paris XIII, 99, avenue J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse, France*

Reçu le 5 janvier 2004 ; accepté le 13 janvier 2004

Présenté par Gilles Lebeau

Résumé

On étudie la théorie de la diffusion pour l'équation de Schrödinger avec hamiltonien de référence $-\Delta - \langle x\rangle^\alpha$, dans $\mathbb{R}^n$, avec $0 < \alpha \leqslant 2$. Nous démontrons que lorsque cet hamiltonien est perturbé par un potentiel V, la notion usuelle de courte/longue portée est beaucoup plus faible que dans le cadre habituel. On généralise aussi certains résultats au cas où le potentiel $\langle x\rangle^2$ est remplacé par un polynôme de degré deux. ***Pour citer cet article : J.-F. Bony et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abstract

Scattering for the Schrödinger equation with a repulsive potential. We study scattering theory for linear Schrödinger equations, when the reference Hamiltonian is $-\Delta - \langle x\rangle^\alpha$, in $\mathbb{R}^n$, with $0 < \alpha \leqslant 2$. The notion of short range perturbative potential is much weaker than for the usual reference Hamiltonian $-\Delta$. We also consider the case where $\langle x\rangle^2$ is replaced by a general second order polynomial. ***To cite this article: J.-F. Bony et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

1. Introduction

Le but du travail annoncé dans cette Note est d'étudier la théorie de la diffusion pour des équations de Schrödinger linéaires, lorsque le hamiltonien de référence contient un potentiel répulsif. Ce travail est motivé par un résultat récent [4], où il est démontré notamment que les perturbations non linéaires du hamiltonien $-\Delta - x^2$ ($x \in \mathbb{R}^n$) sont plus facilement à courte portée que pour $-\Delta$. Nous démontrons qu'un phénomène semblable se produit en théorie linéaire de la diffusion. On considère la famille de hamiltoniens

$$\mathbb{H}_{\alpha,0} = -\Delta - \langle x\rangle^\alpha \quad \text{avec } 0 < \alpha \leqslant 2, \text{ et les hamiltoniens perturbés } \mathbb{H}_\alpha = \mathbb{H}_{\alpha,0} + V_\alpha,$$

Adresses e-mail : bony@math.u-bordeaux.fr (J.-F. Bony), carles@math.univ-rennes1.fr (R. Carles), hafner@math.u-bordeaux.fr (D. Häfner), michel@math.univ-paris13.fr (L. Michel).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.01.017

où $\langle x\rangle = \sqrt{1+x^2}$. Le potentiel $-\langle x\rangle^\alpha$ est source d'accélération, comme nous allons le voir. Le cas $\alpha = 2$ est un cas critique : si $\alpha > 2$ les particules classiques peuvent atteindre l'infini en temps fini et $(\mathbb{H}_{\alpha,0}, C_0^\infty(\mathbb{R}))$ n'est pas essentiellement auto-adjoint (voir par exemple [5]).

La conséquence principale de l'accélération est que la variable de position usuelle $\langle x\rangle$ grandit plus vite que t le long de l'évolution. C'est pourquoi on espère que la condition de courte portée habituelle

$$\bigl|V_0(x)\bigr| \lesssim \langle x\rangle^{-1-\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0) \tag{1}$$

peut être affaiblie pour $\mathbb{H}_\alpha$. Ce phénomène a déja été observé pour des hamiltoniens de type Stark par Ben-Artzi [2]. Il considère la famille d'opérateurs

$$\widehat{\mathbb{H}}_{\alpha,0} = -\Delta - \operatorname{sgn}(x_1)|x_1|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leqslant 2; \quad \widehat{\mathbb{H}}_\alpha = \widehat{\mathbb{H}}_{\alpha,0} + \widehat{V}_\alpha(x), \tag{2}$$

avec $x = (x_1, x')$ et prouve la complétude asymptotique sous la condition

$$\bigl|\widehat{V}_\alpha(x)\bigr| \lesssim M(x') \cdot \begin{cases} \langle x_1\rangle^{\alpha-\varepsilon} & \text{pour } x_1 \leqslant 0, \\ \langle x_1\rangle^{-1+\alpha/2-\varepsilon} & \text{pour } x_1 \geqslant 0, \end{cases} \tag{3}$$

avec $\varepsilon > 0$ et $M(x') \to 0$ quand $|x'| \to \infty$. En dimension 1, on prouve des résultats similaires pour $0 < \alpha < 2$ et une condition de courte portée plus faible quand $\alpha = 2$. En dimension supérieure, ses méthodes ne semblent pas s'appliquer à notre cas. Pour $\alpha = 1$, $\widehat{\mathbb{H}}_{1,0}$ est le hamiltonien de Stark associé à un champ electrique constant dans la direction x_1 qui a été étudié en détails (voir [1,7]).

Le cas $\alpha = 2$ est très instructif. Les équations satisfaites par les particules classiques sont très simples et on trouve $x(t) = x_0 \operatorname{ch}(2t) + \xi_0 \operatorname{sh}(2t)$. Ainsi, $x(t)$ croît exponentiellement vite pour $\xi_0^2 - x_0^2 \neq 0$, de sorte qu'une condition de courte portée suffisante devrait être :

$$\bigl|V_2(x)\bigr| \lesssim \bigl(1 + \ln\langle x\rangle\bigr)^{-1-\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0). \tag{4}$$

Plus généralement, on définit la nouvelle variable de position par

$$p_\alpha(x) := \begin{cases} \langle x\rangle^{1-\alpha/2} & \text{si } 0 < \alpha < 2, \\ 1 + \ln\langle x\rangle & \text{si } \alpha = 2. \end{cases}$$

On suppose que $V_\alpha(x) = V_\alpha^1(x) + V_\alpha^2(x)$ où

$$V_\alpha^1(x) \text{ est une fonction mesurable à support compact qui est } \Delta\text{-compact}, \tag{5}$$

et $V_\alpha^2(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifie presque partout la condition de courte portée :

$$\bigl|V_\alpha^2(x)\bigr| \lesssim p_\alpha(x)^{-1-\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0). \tag{6}$$

L'opérateur $\mathbb{H}_\alpha$ est essentiellement auto-adjoint sur le domaine de l'oscillateur harmonique et on note encore $\mathbb{H}_\alpha$ son extension auto-adjointe. $\mathbb{H}_\alpha$ et $\mathbb{H}_{\alpha,0}$ n'ont pas de spectre singulier continu et on note $\mathbf{1}^c(\mathbb{H}_\alpha)$ la projection sur le spectre continu de $\mathbb{H}_\alpha$. Le théorème principal de cette Note est le suivant :

Théorème 1.1. *Sous les hypothèses précédentes, les limites suivantes existent* :

$$\Omega^\pm := \text{s-}\lim_{t\to\mp\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mathbb{H}_\alpha}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathbb{H}_{\alpha,0}}, \tag{7}$$

$$\text{s-}\lim_{t\to\mp\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mathbb{H}_{\alpha,0}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathbb{H}_\alpha}\mathbf{1}^c(\mathbb{H}_\alpha). \tag{8}$$

De plus (8) *est égal à* $(\Omega^\pm)^*$ *et on a* : $(\Omega^\pm)^*\Omega^\pm = \mathbf{1}$, $\Omega^\pm(\Omega^\pm)^* = \mathbf{1}^c(\mathbb{H}_\alpha)$.

L'opérateur $\mathbb{H}_{\alpha,0}$ n'a pas de spectre ponctuel et il en est de même pour $\mathbb{H}_\alpha$ si $-\Delta + V_\alpha^1$ vérifie un théorème de prolongement unique.

2. Principe de la démonstration

La preuve est basée sur la théorie de Mourre. La première étape consiste à chercher une fonction de fuite $a_\alpha(x,\xi)$ vérifiant (de façon approchée)

$$\bigl\{\xi^2 - \langle x\rangle^\alpha, a_\alpha(x,\xi)\bigr\} = C_0 > 0 \quad \text{lorsque } \xi^2 - \langle x\rangle^\alpha = C_1. \tag{9}$$

On trouve

$$a_\alpha(x,\xi) = \begin{cases} x\cdot\xi\langle x\rangle^{-\alpha} & \text{si } 0<\alpha<2, \\ \ln\langle x+\xi\rangle - \ln\langle x-\xi\rangle & \text{si } \alpha = 2, \end{cases}$$

et on remarque que $a_\alpha(x,\xi)$ se comporte comme $p_\alpha(x)$ sur les surfaces d'énergie. En particulier, $p_\alpha(x)$ croît comme t le long de l'évolution.

Ensuite, on prouve une estimation de Mourre pour $\mathbb{H}_\alpha$ avec $A_\alpha = \mathrm{Op}(a_\alpha)$. Ceci repose essentiellement sur (9) et sur l'inégalité de Gårding. Notons tout de même que des difficultés techniques interviennent du fait que les troncatures en énergie ne sont pas des opérateurs pseudodifférentiels. On peut voir en effet que $\chi(\xi^2 - \langle x\rangle^\alpha)$ n'est pas un bon symbole. On renvoit à [3] pour les détails.

De l'estimation de Mourre, on déduit une estimation de vitesse minimale pour A_α et on obtient l'estimation de vitesse minimale pour p_α en utilisant un théorème de Gérard et Nier [6]. L'utilisation de ce théorème nous amène à modifier légèrement l'opérateur conjugué en le tronquant en énergie.

3. Vitesse asymptotique

Sous les mêmes hypothèses, il est aussi possible de construire l'opérateur de vitesse asymptotique et de décrire son spectre. Plus précisément, on a le

Théorème 3.1. *Il existe P_α^+ auto-adjoint commutant avec $\mathbb{H}_\alpha$ et tel que, pour tout $g \in C(\mathbb{R})$ tendant vers 0 à l'infini,*

(i) $g\bigl(P_\alpha^+\bigr) = \text{s-}\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mathbb{H}_\alpha} g\left(\dfrac{p_\alpha(x)}{t}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathbb{H}_\alpha}$;

(ii) $\sigma\bigl(P_\alpha^+\bigr) = \begin{cases} \{0,\sigma_\alpha\} & \text{si } \sigma_{pp}(\mathbb{H}_\alpha) \neq \emptyset, \\ \{\sigma_\alpha\} & \text{si } \sigma_{pp}(\mathbb{H}_\alpha) = \emptyset, \end{cases}$ *où* $\sigma_\alpha = \begin{cases} 2-\alpha & \text{si } 0<\alpha<2, \\ 2 & \text{si } \alpha = 2. \end{cases}$

Remarquons que si $\sigma_{pp}(\mathbb{H}_\alpha) = \emptyset$, alors $p_\alpha(x)$ est équivalent à $\sigma_\alpha t$ le long de l'évolution. En ce sens, la condition de courte portée (6) est optimale. Notons que pour $0<\alpha<2$, il n'y a pas de formule explicite pour $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mathbb{H}_{\alpha,0}}$. Néanmoins la vitesse asymptotique donne une bonne compréhension de l'évolution.

4. Généralisations

Nous généralisons le Théorème 1.1 dans le cas $\alpha = 2$, avec maintenant pour hamiltonien de référence $\mathbb{H}_0 = -\Delta + U(x)$, où U est un polynôme réel de degré deux. Après un changement de variables laissant invariant le laplacien, on se ramène à

$$U(x) = -\sum_{j=1}^{n_-} \omega_j^2 x_j^2 + \sum_{j=n_-+1}^{n_-+n_+} \omega_j^2 x_j^2 + E x_{n_-+n_++1} + c, \tag{10}$$

avec $\omega_j > 0$ et $c, E \in \mathbb{R}$, et où on utilise la convention $\sum_{j=p}^{q}(\cdots) = 0$ si $p > q$.

On suppose que le potentiel perturbatif V se decompose en $V = V_1 + V_2 + W$, avec :

- $V_j \in L^{p_j}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ avec $p_j < +\infty$ pour $j = 1, 2$;
- $p_j \geqslant 2$ si $n \leqslant 3$, $p_j > 2$ si $n = 4$ et $p_j \geqslant n/2$ si $n \geqslant 5$;
- $W \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfait
$$\left|W(x)\right| \lesssim \prod_{j=1}^{n_-} \left(1 + \ln\langle x_j\rangle\right)^{-\beta_j} \langle x_{n_-+n_++1}\rangle^{-\mu\beta_{n_-+n_++1}} \prod_{j=n_-+n_++2}^{n} \langle x_j\rangle^{-\beta_j},$$
avec $\beta_j \geqslant 0$ et $\sum \beta_j > 1$. $\mu = 1/2$ si $E \neq 0$ et $\mu = 1$ sinon.

Sous ces hypothèses $\mathbb{H} = \mathbb{H}_0 + V$ est essentiellement auto-adjoint sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, et on a le théorème d'existence des opérateurs d'ondes :

Théorème 4.1. (i) *Si $n_- \geqslant 1$ et $n_+ \leqslant 1$, les limites fortes suivantes existent dans $L^2(\mathbb{R}^n)$:*
$$\text{s-}\lim_{t \to \pm\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mathbb{H}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathbb{H}_0}.$$
(ii) *Si V_1 et V_2 sont à support compact et $n_- \geqslant 1$, alors les mêmes conclusions sont valables.*

Par une méthode de Cook, la démonstration consiste à prouver notamment que pour $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$,
$$t \mapsto \left\| W \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathbb{H}_0}\varphi \right\|_{L^2} \in L^1(\mathbb{R}).$$
La preuve repose sur le fait que l'on connait explicitement le noyau de $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathbb{H}_0}$ à travers une formule de Mehler généralisée. L'intégrabilité recherchée découle alors des hypothèses, pour φ produit tensoriel de fonctions d'une variable, dont les combinaisons linéaires sont denses. Pour plus de détails on renvoie à [3].

D'autre part, on a le théorème de complétude asymptotique :

Théorème 4.2. *Supposons que $n_- \geqslant 1$, $n_- + n_+ = n$, $E = 0$ et $V(x) = V_1(x) + V_2(x)$ où $V_1(x)$ satisfait* (5) *et $V_2(x)$ vérifie*
$$\left|V_2(x)\right| \lesssim \left(1 + \ln\left\langle (x_1, \ldots, x_{n_-})\right\rangle\right)^{-1-\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0).$$
Alors les limites suivantes existent
$$\text{s-}\lim_{t \to \mp\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mathbb{H}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathbb{H}_0}, \qquad \text{s-}\lim_{t \to \mp\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mathbb{H}_0} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathbb{H}} \mathbf{1}^c(\mathbb{H}_\alpha).$$

La preuve est simillaire à celle du Théorème 1.1. L'hypothèse $n_- + n_+ = n$ implique que sur les surfaces d'énergie, une décroissance en $(x_1, \ldots, x_{n_-})$ donne une décroissance en x.

Références

[1] J.E. Avron, I.W. Herbst, Spectral and scattering theory of Schrödinger operators related to the Stark effect, Comm. Math. Phys. 52 (3) (1977) 239–254.
[2] M. Ben-Artzi, Unitary equivalence and scattering theory for Stark-like Hamiltonians, J. Math. Phys. 25 (4) (1984) 951–964.
[3] J.-F. Bony, R. Carles, D. Häfner, L. Michel, arxiv: math.AP/0402170.
[4] R. Carles, Nonlinear Schrödinger equations with repulsive harmonic potential and applications, SIAM J. Math. Anal. 35 (4) (2003) 823–843.
[5] N. Dunford, J.T. Schwartz, Linear Operators. Part II: Spectral Theory. Self Adjoint Operators in Hilbert Space, Wiley, New Yor, 1963.
[6] C. Gérard, F. Nier, Scattering theory for the perturbations of periodic Schrödinger operators, J. Math. Kyoto Univ. 38 (4) (1998) 595–634.
[7] T. Ozawa, Nonexistence of wave operators for Stark effect Hamiltonians, Math. Z. 207 (3) (1991) 335–339.