



## Analyse numérique

# Maillage simplicial d'un polyèdre arbitraire

Paul-Louis George<sup>a</sup>, Houman Borouchaki<sup>b</sup>

<sup>a</sup> INRIA – Rocquencourt, Projet Gamma, BP 105, 78153 Le Chesnay cedex, France

<sup>b</sup> Université de technologie de Troyes, GSM-LASMIS, BP 2060, 10010 Troyes cedex, France

Reçu le 21 novembre 2002 ; accepté après révision le 1<sup>er</sup> décembre 2003

Présenté par Oliver Pironneau

---

### Résumé

On discute de l'existence d'un maillage simplicial pour un polyèdre arbitraire. Étant donné un maillage (en triangles) conforme de la surface du domaine, décider s'il existe une triangulation (sans point interne autre que de Steiner) de ce domaine est un problème *NP*-complet. Ce papier décrit une méthode qui construit une telle triangulation, assurant ainsi son existence. La méthode proposée comprend trois étapes. En premier, un algorithme de triangulation de Delaunay est appliqué aux points donnés, ensuite une étape de régénération des éléments de la surface est faite qui conduit à la partition des faces initiales. Enfin, une dernière étape permet de supprimer les points (sauf ceux de Steiner) ajoutés lors de cette partition. **Pour citer cet article :** P.-L. George, H. Borouchaki, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004)*.

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

### Abstract

**Simplicial mesh of an arbitrary polyhedron.** Issues related to the existence of a triangulation of an arbitrary polyhedron are addressed. Given a boundary surface mesh (a set of triangular facets), the problem to decide whether or not a triangulation (with no internal points apart from the Steiner points) exists is reported to be *NP*-hard. In this paper, an algorithm to triangulate a general polyhedron is used which makes use of a classical Delaunay triangulation algorithm, a phase for recovering the missing boundary facets by means of facet partitioning and a final phase that makes it possible to remove the additional (non-Steiner) points previously defined so as to recover the initial boundary mesh thus resulting in a mesh of the given polyhedron. **To cite this article :** P.-L. George, H. Borouchaki, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004)*.

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

---

### Abridged English version

Proving the existence of a tetrahedral mesh of an arbitrary polyhedron is known to be a tedious problem. Such a problem is reported to be *NP*-complete [12]. A key question is to decide if a triangulation exists with no added points (the so-called Steiner points). Another concern, when such additional points are necessary to ensure the existence, is to decide what is the optimal (minimal) number of Steiner points. Actually, by means of heuristics, several construction methods exist which complete a triangulation without explicitly considering this problem of optimality (i.e., the number of Steiner points is not a concern).

---

Adresses e-mail : Paul-Louis.George@inria.fr (P.-L. George), Houman.Borouchaki@utt.fr (H. Borouchaki).

In this Note, we propose a method which, while appearing simple, is able to automatically mesh any arbitrary polyhedron. The existence of an appropriate solution (a mesh that conforms to the given surface mesh) is obtained because our method is a constructive method. In other words, the method completes a mesh and thus a solution exists. The construction method is made up of three steps: constructing a Delaunay triangulation based on the points of the boundary of the polyhedron, seeking the faces (in the initial surface) that are missing in this triangulation, constructing the intersection points of these facets with the current facets and inserting these points using local insertion processes (resulting to split tetrahedra) and suppressing the above added points in order to retrieve the initial surface mesh of the polyhedron.

An easy to understand application is to combine this method with a classical mesh generation method such as a Delaunay based method. For cases where the classical method fails to form a boundary facet, the present method allows for a valid solution. Then, the surface facets being formed, other steps can be successfully performed including the generation of the necessary field points. In this way meshes of high quality can be completed even for an ill-shaped definition of the domain boundaries. Dealing with strongly anisotropic surface meshes is also an issue which, in essence, is similar to the previous case. Anisotropic facets are indeed considered to be ill-shaped for a Delaunay style mesh generation method.

## 1. Introduction

En deux dimensions, tout polygone non auto-intersectant est triangulable. Ce résultat, connu depuis longtemps, est en particulier démontré dans [11] et [1]. Des algorithmes presque optimaux (de complexité presque linéaire) ont même été proposés. La recherche d'un algorithme optimal (de complexité linéaire) a longtemps occupé les chercheurs dans le domaine de la géométrie algorithmique. Ce problème est enfin résolu, en 1991, par Chazelle, [4]. Cependant, la mise en œuvre de son algorithme paraît difficile, voire impossible ! En trois dimensions, l'existence d'un maillage simplicial d'un polyèdre arbitraire est considérée comme une question difficile. En effet, ce problème n'est pas, en général, de complexité polynomiale, cf. [12] et [5]. Deux questions sont posées, est ce que une triangulation existe sans ajout de points supplémentaires (points dits de Steiner) et, sinon, quel est le nombre optimal (minimal) de tels points ?

En pratique, moyennant des heuristiques, plusieurs méthodes existent qui permettent de résoudre le problème de la construction d'une triangulation sans se préoccuper explicitement des questions relatives aux points de Steiner (leur nombre en particulier). George et al., [8], ont proposé une méthode basée sur la construction d'une triangulation de Delaunay des points de la peau du polyèdre suivie de modifications topologiques locales (basculs d'arêtes et de faces) et ajout de points (de Steiner) pour traiter des pathologies bloquantes afin de former les faces initiales. Weatherill et al., [14], ont proposé une méthode qui revient à casser les faces contraintes après ajout de points internes au domaine (compte tenu du type d'applications envisagées, la mécanique des fluides). Chazelle et al., [5], ont proposé une méthode permettant de trianguler un polyèdre non convexe sans trou(s) (topologique(s)) ayant  $n$  sommets et  $r$  arêtes réflexes en  $O(n + r^2)$  tétraèdres. L'approche consiste à partitionner le polyèdre avec des cylindres ayant comme base les triangles (les faces) de la peau. Ici, l'apport reste purement théorique. À cette liste non exhaustive, il convient de rajouter tous les travaux relatifs à la notion de Delaunay admissibilité (voir par exemple [10] sur cette notion) d'une surface triangulée. Dans cet esprit, on trouve essentiellement deux approches. L'une, par exemple [9], revient à casser les contraintes via un jeu de sphères protectrices. L'autre approche proposée par exemple par [6] et, plus récemment, par [10], est plus proche de la réalité et consiste à modifier la triangulation initiale de la surface par ajout de points et bascules d'arêtes afin que la triangulation de Delaunay de tous ces points contienne exactement les faces correspondantes (ce qui est la même idée que dans la première approche).

Dans cette Note, on propose une méthode simple de construction de la triangulation d'un polyèdre quelconque. Cette méthode est similaire à celle de Weatherill et al. mais s'en différencie car on ne rajoute pas de points internes a priori et, de plus, on a la garantie que les points rajoutés sont soit purement et simplement supprimés, soit déplacés hors des faces permettant ainsi de retrouver toutes les faces initiales.

## 2. Existence d'un maillage simplicial d'un polyèdre arbitraire

Le problème, en trois dimensions, consiste en la donnée d'un maillage triangulaire de la surface d'un polyèdre arbitraire et la question est de savoir s'il existe un maillage tétraédrique de ce polyèdre s'appuyant exactement sur ces triangles. Ce problème est connu comme étant *NP*-complet. Ceci ne veut pas dire qu'il n'existe pas de maillage (en effet, de nombreuses méthodes existent qui construisent, le plus souvent avec succès, ces maillages, même dans des cas très peu favorables) mais que le coût de la construction n'est pas garanti en temps polynomial. De plus, à l'inverse de la deux dimensions, on sait, qu'en général, il n'existe pas de maillage sans points internes (les points de Steiner). Avant de discuter d'une méthode de construction, on va présenter deux exemples qui mettent en évidence une difficulté particulière.

### 2.1. Le prisme de Schönhardt et le polyèdre de Chazelle

Le premier exemple montre que même une géométrie simple peut, afin de pouvoir être maillée, imposer la création d'un point (de Steiner) interne. Il montre aussi la difficulté pratique pour trouver la position de ce point. Le second exemple, quant à lui, illustre la difficulté à borner le nombre d'éléments nécessaires à la triangulation d'un domaine quelconque.

*Le prisme de Schönhardt.* Ce polyèdre est un cylindre à base triangulaire comportant 6 sommets et 8 faces triangulaires, [13]. Les faces inférieure et supérieure sont des triangles. Les trois faces latérales sont des quadrangles coupés en deux triangles. Prenons le cas d'un prisme droit, alors, selon la découpe des faces latérales (qui sont planes), il existe un maillage en tétraèdres (trois éléments) immédiat à trouver ou ce maillage n'existe pas (l'un de ses éléments serait exactement de volume nul, cas exclu ici). Toutefois, ajouter un unique point interne lève cette impossibilité, on obtient alors 8 tétraèdres (un par face de peau). La clé est que toutes les faces du bord du prisme sont visibles de ce point. De plus, choisir un tel point est facile car tout point interne convient. Tordons ce prisme, la base est fixée et on tourne la face du dessus autour de l'axe du cylindre en assurant que le prisme reste valide (sans auto-intersection). La difficulté est alors de trouver un point, interne au polyèdre, qui soit visible de ses 8 faces. En théorie, tant que le prisme reste valide (pas d'auto-intersection de ses faces), il existe un noyau de visibilité non vide et tout point de ce noyau donne la solution. En pratique, trouver ce point est numériquement délicat.

*Le polyèdre de Chazelle.* Ce polyèdre est défini dans [3]. C'est un parallélépipède rectangle possédant des encoches sur ces faces supérieures et inférieures. Il a été démontré que la triangulation de ce polyèdre nécessite un nombre quadratique d'éléments selon la taille des encoches. Ceci est lié au fait que la proximité des faces inférieures et supérieures des encoches imposent que les régions visibles de part et d'autre sont de volume très petit.

### 2.2. Polyèdre arbitraire

Un polyèdre arbitraire est un domaine qui peut localement comprendre, outre des régions présentant des propriétés de régularité (alignement, coplanarité, cocyclicité, cosphéricité, ...), des configurations du type des deux cas particuliers décrits ci-dessus et, par suite, mailler un tel domaine peut se révéler délicat et/ou coûteux.

## 3. Méthode basée sur Delaunay

L'idée est de construire la triangulation d'une boîte englobante en insérant par un algorithme de triangulation de Delaunay ces 8 sommets et les sommets du polyèdre. Ceci fait, on a une triangulation de la boîte introduite dans laquelle certaines des faces du polyèdre donné n'existent pas (n'ont pas été formées bien que leurs sommets existent dans la triangulation). Des bascules de faces (entre deux tétraèdres adjacents) et des bascules d'arêtes généralisées

(dans les tétraèdres partageant une telle arête) couplées, le cas échéant, avec la création de points de Steiner (voir, ci-dessus, l'exemple du prisme) permettent de régénérer les faces manquantes. Ces faces étant présentes dans la triangulation résultante de la boîte introduite, il est facile de classer les tétraèdres de cette triangulation et d'éliminer ceux qui ne font pas partie du polyèdre initial.

Dans [2], on a montré que, en théorie et abstraction faite des problèmes numériques, l'algorithme esquissé ci-dessus donne une solution. En pratique, une telle solution existe dans la plupart des cas. Il est cependant facile de construire des exemples pour lesquels l'algorithme numérique (traduction sur ordinateur de l'algorithme théorique) ne conduit pas à la recréation de toutes les faces manquantes. Notons que de tels cas correspondent à des situations où la frontière du polyèdre est maillée de manière assez grossière (choc de taille violent entre mailles géométriquement voisines, l'effet « porc-épic » bien connu).

#### 4. Une méthode constructive montrant l'existence d'une solution

Dans cette section, on propose une méthode, d'apparence simple, qui permet de traiter tous les cas, y compris ceux mentionnés ci-dessus. La méthode de construction proposée comprend la construction d'une triangulation de Delaunay s'appuyant sur les points donnés, la recherche des faces (de la surface initiale) manquantes dans cette triangulation, la construction des points intersections de ces faces avec les faces courantes et l'insertion de ces points d'intersection via des processus locaux, et enfin, la suppression des points ajoutés ci-dessus afin de retrouver le maillage initial du bord du polyèdre.

##### 4.1. *Triangulation de Delaunay*

Les points du contour (sommets des triangles de la surface du polyèdre) sont insérés, un à un, par un algorithme de triangulation de Delaunay modifié afin d'éviter la formation des « slivers », [8]. Pour simplifier, on construit en premier une boîte englobant tous les points et c'est cette boîte (convexe) qui est triangulée. La triangulation obtenue ne contient pas, en général, comme face d'éléments, tous les triangles initiaux. Par suite, il n'est pas possible d'extraire du maillage de la boîte un maillage du polyèdre donné.

##### 4.2. *Partition des faces frontières du polyèdre*

Une face de donnée manque car il existe une ou plusieurs arêtes (faces) du maillage courant qui la coupent. On va alors découper ces arêtes (faces) en introduisant les points d'intersection trouvés, [2]. On traite en premier, une à une, les arêtes manquantes puis on considérera, une à une, les faces manquantes. Une arête de la donnée manque car elle est coupée par des faces ou des arêtes du maillage courant. En introduisant les points d'intersection de l'arête cherchée avec les faces du maillage, on modifie localement le maillage en découpant les deux tétraèdres partageant la face intersectante en six tétraèdres. De même, en introduisant les points d'intersection de l'arête cherchée avec les arêtes du maillage, on modifie localement le maillage en découpant les tétraèdres (ou coquille) partageant l'arête intersectante en tétraèdres. Ceci revient à casser cette coquille en les deux coquilles associées aux deux sous-arêtes construites. Répété pour toutes les arêtes manquantes, ce processus assure que ces arêtes existent sous la forme d'une partition.

On examine alors si les faces induites par cette partition forment localement une partition des faces initiales correspondantes. En général, il peut manquer un « morceau » de la face initiale (si on regarde face par face). Ceci est lié au fait qu'il existe une ou plusieurs arêtes du maillage courant qui coupent l'intérieur de la face initiale contrainte. Comme ci-dessus, on introduit les points d'intersection entre ces arêtes et l'intérieur du polygone correspondant au bord de la face initiale. Ceci revient simplement à casser les coquilles correspondantes en deux coquilles. Après traitement de toutes les faces initiales, on obtient ainsi un maillage dans lequel toutes les faces initiales existent soit inchangées, soit sous la forme d'une partition. Par suite, le domaine est maillé.

#### 4.3. Contrainte des faces frontières du polyèdre

Dans l'étape précédente, on a construit un maillage du domaine mais on a ajouté des points sur les faces (arêtes) initiales. On va montrer que l'on peut supprimer ces points soit en les *supprimant* du maillage soit en les *enlevant* de la peau du domaine (c'est-à-dire en les bougeant). Ceci assurera l'existence d'un maillage contenant les faces initiales (et non plus, seulement, une partition de celles-ci). Pour simplifier et sans perte de généralité, on suppose que les faces données séparent le domaine à mailler de l'extérieur (i.e., le polyèdre à mailler n'a qu'une seule composante connexe).

*Suppression d'un point d'une face par déplacement.* Soit  $P$  un point introduit sur une face  $F$  initiale et soit  $\mathcal{B}_P$  la boule de  $P$  (l'ensemble des tétraèdres ayant  $P$  comme sommet). Comme la face  $F$  existe partitionnée, il existe dans la boule  $\mathcal{B}_P$  un ensemble de tétraèdres,  $\mathcal{B}_P^{\text{in}}$ , entièrement contenue dans le demi-espace contenant le domaine qui est l'intersection de  $\mathcal{B}_P$  avec ce demi-espace. Cette «demi-boule»<sup>1</sup> a comme faces externes :

- (i) les faces incluses dans la partition de  $F$  qui constitue un polygone quelconque dans le plan de  $F$ ,
- (ii) les faces hors les précédentes.

Comme cette demi-boule existe, le point  $P$  est visible de toutes les faces de ce dernier type. Il existe donc un polyèdre de volume strictement positif contenant  $P$  constituant le noyau de visibilité des faces de type (ii). Par conséquent, on peut bouger  $P$  en n'importe quelle position inclus dans ce noyau. Ainsi, les faces de type (ii) sont visibles de  $P$  et le point  $P$  voit également le plan de  $F$ . Comme le polygone défini ci-dessus est triangulable en triangles, le point  $P$  est visible de tous ces triangles. Il en résulte que la demi-boule traitée a été remplacée par une boule valide. On a donc enlevé un point de la partition de  $F$ . En itérant, on peut supprimer tous les sommets introduits dans la partition.

*Suppression d'un point d'une arête par déplacement.* Il reste à enlever les points du bord de la partition, points ajoutés sur une arête initiale. Le principe de la méthode est le même. La différence réside dans le fait que l'arête initiale est partagée par deux faces initiales,  $F_1$  et  $F_2$ , qui peuvent ne pas être coplanaires. On se restreint à ce cas, une arête est partagée par deux faces. Sous cette hypothèse, on peut trouver une demi-boule,  $\mathcal{B}_P^{\text{in}}$ , entièrement contenue dans le demi-espace contenant le domaine. Cette boule a comme faces externes :

- (i) les faces incluses dans la partition de  $F_1$  qui forme un polygone quelconque dans le plan de  $F_1$ ,
- (ii) les faces incluses dans la partition de  $F_2$  qui forme un polygone quelconque dans le plan de  $F_2$ ,
- (iii) les faces hors les précédentes qui sont dans le domaine.

Comme cette demi-boule existe, le point  $P$  est visible de toutes les faces de ce dernier type. Il existe donc un polyèdre de volume strictement positif autour de  $P$ . On peut donc bouger  $P$  en n'importe quelle position inclus dans ce noyau. Ainsi, les faces de type (iii) sont visibles de  $P$  et le point  $P$  voit également le plan de  $F_1$  et celui de  $F_2$ . Comme les deux polygones définis ci-dessus sont triangulables en triangles, le point  $P$  est visible de tous ces triangles. On a donc construit une boule valide pour le point  $P$  ainsi bougé. On a donc enlevé un point du bord de la partition de  $F_1$  et  $F_2$ . En itérant, on peut supprimer tous les sommets introduits dans la partition d'arête.

**Remarque 1.** On a montré qu'il était possible de supprimer tous les points introduits en les bougeant vers l'intérieur du domaine. Le maillage final contient donc des points internes mais, surtout, les faces initiales. D'un point de vue pratique, certains points ajoutés peuvent disparaître suite à des fusions judicieuses de points. Notons que

<sup>1</sup> Que nous appelons ainsi par commodité bien que ce ne soit pas une boule au sens de la définition exacte de cette entité.

les points qu'il n'a pas été possible de supprimer et qui, de ce fait, on été « poussés » vers l'intérieur du domaine ne sont autres que des points de Steiner « potentiels » (nécessaires à l'obtention d'un maillage par le procédé appliqué). Pour finir, les points « poussés » vers l'extérieur du domaine seront éliminés naturellement lors de la phase de définition de ce dernier.

## 5. Conclusion

Nous avons montré qu'il était possible de mailler un polyèdre arbitraire défini par un maillage de sa frontière en assurant que les faces de cette frontière étaient préservées. Nous avons, pour cette méthode de construction du maillage d'un polyèdre arbitraire basée sur une partition des contraintes non satisfaites suivie de l'élimination de cette partition, un exemple représentatif d'une méthode dont la complexité est telle qu'envisager son implémentation (et son utilisation) est a priori illusoire. Néanmoins, cette même implémentation, une fois réalisée, s'est montrée efficace pour traiter des configurations délicates en des temps tout à fait raisonnables. Ainsi, outre les aspects théoriques directs (existence et complexité) et indirects (construction automatique de points de Steiner), une application pratique est possible et se trouve être appropriée pour traiter des problèmes de construction de maillage que les méthodes plus classiques ne sont pas à même de résoudre. Par ailleurs, d'un point de vue abstrait, cette méthode de forçage par partition-élimination s'étend à toute dimension. Plusieurs exemples d'application sont traités dans [7].

## Références

- [1] J.D. Boissonnat, M. Yvinec, *Géométrie Algorithmique*, Ediscience, Paris, 1995.
- [2] H. Borouchaki, P.L. George, S.H. Lo, Boundary enforcement by facet splits in Delaunay based mesh generation, in: 7th Inter. Conf. on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations, Whistler, BC, Canada, September 2000, pp. 203–221.
- [3] B. Chazelle, Convex partitions of polyhedra: a lower bound and worst-case optimal algorithm, *SIAM J. Comput.* 13 (3) (1984) 488–507.
- [4] B. Chazelle, Triangulating a simple polygon in linear time, *Discrete Comput. Geom.* 6 (1991) 485–524.
- [5] B. Chazelle, L. Palios, Triangulating a nonconvex polytope, *Discrete Comput. Geom.* 5 (1990) 505–526.
- [6] C. Hazlewood, Approximating constrained tetrahedralizations, in: *Computer Aided Geometric Design*, vol. 10, Academic Press, 1993, pp. 67–87.
- [7] P.L. George, H. Borouchaki, E. Saltel, *Maillage simplicial d'un polyèdre arbitraire. Partie II : Construction et exemples*, Rapport de recherche INRIA, RR-4398, 2002.
- [8] P.L. George, F. Hecht, E. Saltel, Automatic mesh generator with specified boundary, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 92 (1991) 269–288.
- [9] M. Murphy, D.M. Mount, C.W. Gable, A point-placement strategy for conforming Delaunay tetrahedralization, in: *Proc. 11th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, 2000, pp. 67–74.
- [10] Ph.P. Pebay, *Delaunay-admissibilité a priori en dimensions 2 et 3*, Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2000.
- [11] F.P. Preparata, M.I. Shamos, *Computational Geometry, an Introduction*, Springer-Verlag, 1985.
- [12] J. Ruppert, R. Seidel, On the difficulty of triangulating three-dimensional nonconvex polyhedra, *Discrete Comput. Geom.* 7 (1992) 227–253.
- [13] E. Schönhardt, Über die Zerlegung von Dreieckspolyedern, *Math. Ann.* 98 (1928) 309–312.
- [14] N.P. Weatherill, O. Hassan, Efficient three-dimensional Delaunay triangulation with automatic point creation and imposed boundary constraints, *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 37 (1994) 2005–2039.