



ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 301–304



Systèmes dynamiques

# Nouvelle preuve d'un théorème de Yoccoz

Arnaud Chéritat

Laboratoire Émile Picard, Université Paul Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 4, France

Reçu le 27 juin 2003 ; accepté le 1<sup>er</sup> décembre 2003

Présenté par Jean-Christophe Yoccoz

## Résumé

Quand  $\theta$  est un réel irrationnel vérifiant la condition  $\sum (\ln q_{n+1})/q_n = +\infty$  où  $p_n/q_n$  sont les réduites du développement en fraction continue de  $\theta$ , le polynôme quadratique  $P_\theta(z) = e^{i2\pi\theta}z + z^2$  n'est pas linéarisable en 0. Ce théorème a été démontré en 1988 par J.C. Yoccoz, qui construit d'abord un germe non linéarisable par inversion d'un procédé de renormalisation, puis prouve l'universalité de la famille quadratique pour cette question. Nous proposons une preuve alternative, basée sur l'étude de l'explosion des cycles paraboliques. *Pour citer cet article : A. Chéritat, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**A new proof of a theorem of Yoccoz.** If  $\theta$  is an irrational real number such that  $\sum (\ln q_{n+1})/q_n = +\infty$  where  $p_n/q_n$  are the convergents of  $\theta$ , then the quadratic polynomial  $P_\theta(z) = e^{i2\pi\theta}z + z^2$  is not linearizable at 0. This theorem has been proved in 1988 by J.C. Yoccoz, who first constructs a nonlinearizable germ by inverting a renormalisation procedure, and then proves universality of the quadratic family for that question. We give an alternative proof, based on the study of the explosion of parabolic cycles. *To cite this article : A. Chéritat, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## 1. Énoncés

Nous présentons les preuves telles qu'elles ont été conçues dans [4]. Des simplifications ont été ensuite apportées par Buff et Tan Lei pour la présentation faite dans [2].

### Théorème 1.1. Si

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n} > 0$$

alors,  $P_\theta$  a des petits cycles, i.e. dans tout voisinage de 0 il existe un cycle de  $P_\theta$ , différent de 0.

Adresse e-mail : [cheritat@picard.ups-tlse.fr](mailto:cheritat@picard.ups-tlse.fr) (A. Chéritat).

En particulier  $P$  ne peut être linéarisable en 0. Nous proposons preuve élémentaire, qui n'utilise pas le redressement des champs d'ellipses (théorème d'Ahlfors–Bers). On pourra comparer cette condition avec celle de Crémer [7] : en 1938, sous la condition suivante, il prouve avec un calcul algébrique qu'il y a un point périodique (mais pas un cycle a priori) dans tout voisinage de 0

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{2^{q_n}} = +\infty.$$

Rappelons qu'un argument de catégorie de Baire permet de montrer de façon non constructive la présence de petits cycle pour un ensemble générique de valeurs de  $\theta$ . En effet pour  $\theta = p/q$ ,  $P^q$  possède  $q + 1$  points fixes confondus en 0 [8]. Quand  $\theta$  est perturbé, ces points « explosent » en un cycle de  $P$ . Pour tout  $\theta$  suffisamment proche de  $p/q$ , ce cycle est proche de 0.

**Théorème 1.2.** *Si*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n} = +\infty$$

*alors, dans tout voisinage de 0 il existe un point périodique de  $P_\theta$ .*

Ce théorème à été prouvé la première fois par Yoccoz [10] en 1988. La preuve que nous proposons est indépendante. Elle ne donne pas directement des petits cycles. Dans les deux cas, il est fait usage du théorème d'Ahlfors–Bers.

**Remarque 1.** Pérez-Marco a démontré [9] que sous la condition diophantienne suivante

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(\ln q_{n+1})}{q_n} < +\infty,$$

un germe était soit linéarisable soit avait des petits cycles. Notons que si la condition diophantienne n'est pas réalisée, alors  $\limsup \ln(q_{n+1})/q_n = +\infty$ , et donc le Théorème 1.1 implique la présence de petits cycles. Ceci donne une alternative complète à la démonstration de Yoccoz de la présence de petits cycles quand le polynôme n'est pas linéarisable.

## 2. Preuves

### 2.1. Contrôle de l'explosion

Nous avons démontré dans [3] (on peut aussi consulter [5] dans ce même journal, ou bien [4] ou [1]) que pour tout  $p/q$  irréductible, il existe une fonction holomorphe  $\chi : B(0, R_q) \rightarrow \mathbb{C}$  valant 0 en 0 et telle que pour tout  $\theta \in B(p/q, c/q^3)$ ,  $P_\theta$  possède un cycle donné par les  $\chi(\delta)$  où  $\delta$  parcourt les  $q$  racines  $q$ -ièmes de  $\theta - p/q$ . Ici,  $c$  est une constante indépendante de  $p/q$  et  $R_q > 0$  est tel que  $R_q^q = c/q^3$ .

Considérons maintenant  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $p_n/q_n$  une de ses réduites, et  $\delta_n$  tel que  $\theta = p_n/q_n + \delta_n^{q_n}$ . D'après les propriétés élémentaires des réduites,  $|\theta - p_n/q_n| = \alpha_n/q_n q_{n+1}$  avec  $\alpha_n \in ]1/2, 1[$ . Un calcul élémentaire prouve que :

$$\ln|\delta_n| = -\frac{\ln q_{n+1}}{q_n} + \varepsilon_n$$

avec  $\sum |\varepsilon_n| < +\infty$ . Soit  $\chi_n$  la fonction correspondant à la réduite  $p_n/q_n$  de  $\theta$ .

### 2.2. Preuve du Théorème 1.1

Supposons que  $P_\theta$  possède un disque de Siegel  $\Delta$ , et montrons que  $\chi_n(\sqrt[q]{\delta_n})$  est un cycle de  $P_\theta$  inclus dans  $\Delta$ , ce qui est absurde (ici,  $\sqrt[k]{z}$  désigne l'ensemble des racines  $k$ -ièmes de  $z$ ). Les fonctions  $\chi_n$  prennent leurs valeurs dans la réunion des ensembles de Julia  $K(P_\lambda)$  pour  $\lambda$  variant dans  $B(p_n/q_n, c/q_n^3)$ . Ces boules tendent vers le singleton  $\{0\}$ . Par semi-continuité de  $\lambda \mapsto K(P_\lambda)$ , pour tout voisinage  $V$  de  $K(P)$ , pour  $n$  suffisamment grand,  $\chi$  prends ses valeurs dans  $V$ . D'après le lemme de Schwarz et un théorème de Carathéodory, ceci implique que pour  $n$  suffisamment grand et pour tout  $r < 1$ ,  $\chi_n(B(0, r)) \subset \Delta$ . L'hypothèse du Théorème 1.1 implique qu'une sous-suite de  $\delta_n$  a son module qui tend vers un nombre  $< 1$ . Donc le cycle est dans le disque de Siegel, ce qui est absurde. Ainsi  $P_\theta$  ne peut pas posséder de disque de Siegel. Par conséquent,  $0 \in \partial K(P_\theta)$ . On peut donc prendre pour  $V$  un ouvert simplement connexe dont le bord contient des points arbitrairement proches de  $z = 0$ . Les théorèmes de distortion montrent alors que  $\chi_n(\sqrt[q]{\delta_n})$  est un petit cycle.

### 2.3. Outils pour la preuve du Théorème 1.2

Nous avons vu que des valeurs suffisamment négatives de  $\ln |\delta_n|$  créent des cycles proches de 0. On voudrait montrer qu'il suffit que la somme des  $\ln |\delta_n|$  soit infinie. En bref, ce qui permet à ces nombres de s'accumuler est le fait que les cycles donnés par les  $\chi_n$  pour différentes valeurs de  $n$  ne peuvent entrer en collision. Les fonctions  $\chi_n$  successives décrivent une successions d'explosion de cycles paraboliques. Ainsi, du point de vue du lemme de Schwarz, les cycles déjà présents « gênent » l'explosion décrite par  $\chi_n$ . Nous donnons ci-après quelques lemmes clefs.

Soit  $V$  un ouvert non vide de  $\mathbb{C}$  et  $z_0$  un point de  $V$ . Soit  $\tilde{V} \xrightarrow{p} V$  son revêtement universel abstrait. Il existe une unique valeur de  $r \in ]0, +\infty]$  telle qu'il existe un isomorphisme  $\psi : r\mathbb{D} \rightarrow \tilde{V}$  tel que  $p \circ \psi$  envoie 0 sur  $z_0$  avec dérivée 1. Nous appellerons  $r$  le *rayon conforme du revêtement universel* (r.c.r.u.) en  $z_0$  de  $V$ . Si  $r < +\infty$ , on notera  $\phi_V : \mathbb{D} \rightarrow V$  définie par  $\phi_V(z) = p \circ \psi(rz)$  (le point  $z_0$  est sous entendu, dans la suite il sera systématiquement égal à 0). La fonction  $\psi$  dépend du choix d'un relevé de  $z_0$  dans  $\tilde{V}$ , mais la fonction  $\phi_V$  est indépendante des choix.

### 2.4. Un phénomène de cage de Faraday

**Lemme 2.1.** *Il existe  $\kappa \in ]0, 1[$  et  $K > 0$  tels que : soit  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorphe telle que  $f(0) = 0$ . Soit  $r \in ]0, 1[$  et  $q \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $V = \mathbb{D} \setminus f(r\sqrt[q]{1})$ . Soit  $\varepsilon = -\ln(r) > 0$ ,  $r'$  le r.c.r.u. de  $V$  en 0 et  $\varepsilon' = -\ln(r') > 0$ . Supposons que  $0 \in V$ ,  $q \geq 3$ ,  $r \geq e^{-1}$ , et  $q\varepsilon \geq K$ . Alors*

$$\varepsilon' \geq \kappa \cdot \varepsilon.$$

Une preuve est donnée dans [6]. Une autre version de ce lemme figure dans [4], avec une preuve malheureusement erronée. Entre temps, Buff prouvé un énoncé plus fort et très élégant (le lemme de Schwarz relatif), qui permet une majoration fine de la distance à 0 des points périodiques (voir [2]).

### 2.5. Un lemme d'uniformisation avec paramètre

Quand le complémentaire de  $V$  suit un mouvement holomorphe, le revêtement universel  $\phi_V : \mathbb{D} \rightarrow V$  ne dépend malheureusement pas de façon analytique de  $V$ . Pour récupérer une dépendance analytique, il faut accepter de faire varier l'ensemble de départ ( $\mathbb{D}$ ) avec  $V$ .

**Lemme 2.2.** *Soit  $z_i(t) \in \mathbb{D}$ ,  $t \in \mathbb{D}$ ,  $i = 0, \dots, q - 1$ ,  $q$  fonctions holomorphes telles que pour tout  $t \in \mathbb{D}$ , et  $i \neq j$ ,  $z_i(t) \neq z_j(t)$ , et pour tout  $i$ ,  $z_i(t) \neq 0$ . Pour  $t \in \mathbb{D}$ , posons  $V_t = \mathbb{D} \setminus \{z_0(t), \dots, z_{q-1}(t)\}$ . Alors il existe un ouvert connexe  $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^2$  et une fonction analytique  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  tels que*

- (i) *Soit  $\Phi(z, t) = (\phi(z, t), t) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^2$ . Alors  $\Phi$  est un difféomorphisme analytique local.*

- (ii) Soit  $\mathcal{U}_t = \{z \in \mathbb{C} \mid (z, t) \in \mathcal{U}\}$  et  $\phi_t(z) = \phi(z, t)$ . Pour tout  $t \in \mathbb{D}$ ,  $\phi_t : \mathcal{U}_t \rightarrow V_t$  est un revêtement universel, et  $\phi_t(0) = 0$ .
- (iii) Pour  $t = 0$ ,  $\mathcal{U}_0 = \mathbb{D}$ .
- (iv) Il existe un mouvement holomorphe (en la seconde variable)  $\eta : \mathbb{C} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ , tel que pour tout  $t \in \mathbb{D}$ , la fonction  $\eta_t : z \mapsto \eta(z, t)$  est analytique en dehors de  $\overline{\mathbb{D}}$ , et envoie  $\mathbb{D}$  sur  $\mathcal{U}_t$ .
- (v) Pour tout  $t \in \mathbb{D}$ ,  $\mathcal{U}_t \subset (1 + 5|t|)\mathbb{D}$ .

Pour de petites valeurs de  $|t|$ ,  $\mathcal{U}_t$  reste dans un disque de rayon proche de 1. Notons que c'est dans la preuve de ce lemme et uniquement à cet endroit, que nous utilisons le théorème d'Ahlfors–Bers. Peut-on trouver une preuve qui s'en passe ?

## 2.6. Bonnes réduites

Soit  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $p_n/q_n$  ses réduites, et  $B_n = B(p_n/q_n, c/q_n^3)$ . Le lemme suivant est élémentaire.

**Lemme 2.3.** *Supposons que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (\ln q_{n+1})/q_n = +\infty$ . Alors il existe une suite strictement croissante d'entiers  $n_k \in \mathbb{N}$ , dont l'ensemble sera noté  $\mathcal{K}$ , telle que (i)  $\sum_{n \in \mathcal{K}} (\ln q_{n+1})/q_n = +\infty$ , (ii)  $1/q_{n+1} \underset{n \in \mathcal{K}}{\xrightarrow{+ \infty}} o(1/q_n^2)$ , (iii)  $(\forall n \in \mathcal{K}, \theta \in B_n)$ , (iv)  $\forall m, n \in \mathcal{K}, m < n \Rightarrow B_n \subset B_m$  et  $\text{centre}(B_m) \notin B_n$ .*

## 2.7. Démonstration simplifiée du Théorème 1.2

Puisque  $\theta$  appartient à une infinité de  $B_n$ , il y a une infinité de cycles de période  $q_n$  de  $P_\theta$  donnés par les  $\chi_n$ . L'idée est d'introduire  $r_n$ , le rayon conforme en 0 du complémentaire dans  $\mathbb{C}$  de la réunion des cycles donnés par les  $\chi_m$  (aux paramètres correspondant à  $\theta$ ), pour  $m \leq n$  et dans  $\mathcal{K}$ . Soient  $m < n$  dans  $\mathcal{K}$ . Le disque  $B_n$  est tout petit par rapport à  $B_m$ . Par conséquent les points du cycle d'ordre  $q_m$  bougent peu lors de l'explosion du cycle d'ordre  $q_n$ . On utilise le Lemme 2.2 : on effectue un revêtement universel et travaille dans ces nouvelles coordonnées. L'explosion du cycle suivant a alors lieu dans un domaine variable, toujours contenu dans un disque de rayon fixé proche de  $r_n$ . Le Lemme 2.1 permet alors de comparer  $r_{n_k}$  à  $r_{n_{k+1}}$  : plus précisément il permet de démontrer que  $\ln(r_{n_{k+1}}) - \ln(r_{n_k}) \leq$  quelque chose de l'ordre de  $-\ln(q_{n+1})/q_n$  avec  $n = n_{k+1}$ , plus un reste sommable. Ceci démontre que  $r_{n_k}$  tend vers 0 et donc que 0 est accumulé par des points périodiques de  $P_\theta$  (mais pas par des cycles a priori). Donc 0 n'est pas linéarisable.

## Références

- [1] A. Avila, X. Buff, A. Chéritat, Quadratic Siegel disks with smooth boundaries, submitted for publication.
- [2] X. Buff, A. Chéritat, Upper bound for the size of quadratic Siegel disks, *Invent. Math.* (online first, 2003).
- [3] A. Chéritat, Estimates on the speed of explosion of the parabolic fixed points of quadratic polynomials and applications, Prépublication de l'université Paris-sud, n° 99-77, 1999.
- [4] A. Chéritat, Recherche d'ensembles de Julia de mesure de Lebesgue positive, Thèse, Université Paris-sud, 2001.
- [5] A. Chéritat, Sur la vitesse d'explosion des points fixes paraboliques dans la famille quadratique, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 334 (12) (2002) 1107–1112.
- [6] A. Chéritat, Cage de Faraday, *math.DS/0306375*.
- [7] H. Crémer, Über die Häufigkeit der Nichtzentren, *Math. Ann.* 115, 573–580.
- [8] A. Douady, J.H. Hubbard, Étude dynamique des polynômes complexes, in : *Publ. Math. Orsay*, 1984–1985.
- [9] R. Pérez-Marco, Sur la structure des germes holomorphes non linéarisables, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 312 (7) (1991) 533–536.
- [10] J.C. Yoccoz, Petits diviseurs en dimension 1, *Astérisque* 231 (1995).