Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 31–34

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Analyse harmonique/Analyse fonctionnelle

La fonction maximale de Hardy–Littlewood sur une classe d'espaces métriques mesurables

Hong-Quan Li

Institut für Angewandte Mathematik, Universität Bonn, Wegelerstr. 6, 53115 Bonn, Allemagne

Reçu le 15 août 2003 ; accepté après révision le 7 novembre 2003

Présenté par Gilles Pisier

Résumé

Dans cette Note, on se propose d'étudier le comportement de la fonction maximale de Hardy–Littlewood, M, sur l'espace cuspidale en termes de la croissance du volume de la base. En particulier, on montre que pour tout $1 < p_0 < +\infty$ fixé, il existe une variété sur laquelle l'opérateur M est borné sur L^p pour $p > p_0$ mais pas pour $1 \leqslant p < p_0$. ***Pour citer cet article : H.-Q. Li, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abstract

The Hardy–Littlewood maximal function on some metric measure spaces. In this Note, we study the behavior of the Hardy–Littlewood maximal function M on cusp manifolds in terms of the growth of the volume of the base space. In particular, we prove that for all $1 < p_0 < +\infty$ fixed, there exists such a manifold on which M is bounded on L^p for $p > p_0$ but not for $1 \leqslant p < p_0$. ***To cite this article: H.-Q. Li, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

1. Introduction

Considérons un espace métrique, (H, ρ), munie d'une mesure de Borel ϱ. Notons $B(x,r)$ (ou B_x^r) la boule ouverte de centre x et de rayon r, et $|B(x,r)|$ (ou $|B_x^r|$) son volume. Si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(H)$, alors on note Mf, la fonction maximale de Hardy–Littlewood de f, définie par $Mf(x) = \sup_{r>0} |B_x^r|^{-1} \|f\|_{L^1(B_x^r,\, \mathrm{d}\varrho)}$ $(x \in H)$. Remarquons que M est toujours borné sur L^∞. Si (H, ρ, ϱ) possède la propriété du doublement du volume, on sait que l'opérateur M est de type faible $(1,1)$ (voir [4]), donc il est aussi borné sur L^p pour tout $1 < p \leqslant +\infty$; dans le cadre des espaces symétriques de type non compact ainsi que des AN groupes harmoniques (qui sont à croissance exponentielle de volume), M est aussi de type faible $(1,1)$, voir [9] et [1]. Remarquons que pour tout $1 < p_0 \leqslant 2$ fixé, il existe une variété riemannienne complète telle que M n'est pas borné sur L^p si $1 < p < p_0$, voir [9] et [3]. Naturellement, on se demande la question suivante : est-ce que dans le cas général, M est borné sur L^p pour tout $p > 2$?

Adresse e-mail : li-hq@wiener.iam.uni-bonn.de (H.-Q. Li).

1631-073X/$ – see front matter © 2003 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2003.11.005

Dans [5], l'auteur a montré que dans certaines types des variétés cuspidales (qui sont à croissance exponentielle de volume), M est aussi de type faible $(1,1)$. On se demande si ce résultat reste valable dans d'autre type de variétés cuspidales, par exemple, les variétés cuspidales à base de groupes de Lie à croissance polynomiale de volume ?

Le but de cette Note est de donner une réponse aux deux questions précédentes. Avant d'énoncer notre résultat, on a besoin des notations et définitions suivantes :

On rappelle la définition des variétés cuspidales (voir par exemple [6]) : si X est une variété riemannienne connexe, on définit $\mathrm{Cusp}(X)$ comme étant l'espace $\mathbb{R}^+ \times X$ muni de la métrique riemannienne $r^{-2}(\mathrm{d}r^2 + g_X)$, où g_X est la métrique riemannienne sur X. En notant d_X la distance sur X, alors la distance induite sur $\mathrm{Cusp}(X)$, d, est donnée par (voir la Proposition 2.2 de [5]) :

$$d\big((y_1,x_1),(y_2,x_2)\big) = \operatorname{arc\,cosh} \frac{y_1^2 + y_2^2 + d_X^2(x_1,x_2)}{2y_1y_2}, \quad \forall (y_1,x_1),(y_2,x_2) \in \mathbb{R}^+ \times X. \tag{1}$$

En général, si (X,d_X) est un espace de longueur, en remarquant la preuve de la Proposition 2.2 de [5] et [2] (p. 57), d, définie par (1), est une distance sur $\mathrm{Cusp}(X) = \mathbb{R}^+ \times X$. Ceci nous permet de donner la définition suivante :

Soit (X,d_X) un espace de longueur muni d'une mesure de Borel μ_X, et soit $N \geqslant 0$ une constante (ce n'est pas nécessaire de supposer $N \in \mathbb{N}$). Alors on peut définir l'espace cuspidale d'indice N à base de X, qu'on note $\mathrm{Cusp}(X)$ comme l'espace $\mathbb{R}^+ \times X$, muni de la distance d et de la mesure $\mathrm{d}\mu = y^{-N-1}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\mu_X$.

Dans la suite, pour deux fonctions f et g, on dit que $f \sim g$ si et seulement s'il existe une constante $c > 0$ telle que $c^{-1} f \leqslant g \leqslant cf$. Pour un ensemble mesurable E, on note $|E|$ son volume et χ_E la fonction caractéristique de E. Et dans toute la suite, on suppose que l'espace de longueur mesurable, (X,d_X,μ_X), satisfait la condition suivante : il existe deux constantes réelles $\omega_1 > 0$ et $\omega_2 \geqslant 0$ telles que :

$$\big|B_X(x,r)\big| \sim r^{\omega_1}\chi_{r\leqslant 1} + r^{\omega_2}\chi_{r\geqslant 1}, \quad \forall r \geqslant 0,\ \forall x \in X.$$

On rappelle aussi la définition des espaces de Lorentz $L^{p,1}$ et $L^{p,\infty}$ avec $1 \leqslant p < +\infty$: soit f une fonction mesurable définie sur un espace mesurable $(B,\mathcal{B},\nu)$, on note $f_*(s) = \nu\{|f| > s\}$. L'espace de Lorentz $L^{p,1}(\nu)$ (resp. $L^{p,\infty}(\nu)$) est l'ensemble des fonctions mesurables satisfaisant (voir (2.1) de [7]) $\|f\|_{L^{p,1}(\nu)} = \int_0^{+\infty} f_*(s)^{1/p}\,\mathrm{d}s < +\infty$ (resp. $\|f\|_{L^{p,\infty}(\nu)} = \sup_{s>0} s f_*(s)^{1/p} < +\infty$).

On a les résultats suivants concernant la fonction maximale de Hardy–Littlewood M sur $(\mathrm{Cusp}(X),d,\mathrm{d}\mu)$:

Théorème 1.1. *Soient (X,d_X,μ_X) et $(\mathrm{Cusp}(X),d,\mathrm{d}\mu)$ comme ci-dessus et soit $\omega = \max(\omega_1,\omega_2)$, alors* :

(1) *Si $\omega \leqslant N$, alors M est borné de $L^{1,1}$ dans $L^{1,\infty}$ (donc borné sur L^p pour tout $1 < p \leqslant +\infty$).*

(2) *Si $\omega \geqslant 2N$, alors M n'est pas borné sur L^p si $1 \leqslant p < +\infty$.*

(3) *Si $N < \omega < 2N$, notons $p_0 = \frac{N}{2N-\omega}$, alors M n'est pas borné sur L^p si $1 \leqslant p < p_0$, et M est borné de $L^{p_0,1}$ dans $L^{p_0,\infty}$ (donc, borné sur L^p pour tout $p_0 < p \leqslant +\infty$).*

Avant de donner sa preuve, on donne un exemple : considérons $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, d, \mathrm{d}\mu = y^{-1}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x)$ avec d la distance hyperbolique et $\mathrm{d}x$ la mesure de Lebesgue, alors la fonction maximale de Hardy–Littlewood n'est pas borné sur L^p, pour tout $1 \leqslant p < +\infty$.

2. Estimation du volume des boules dans $(\mathrm{Cusp}(X),d,\mathrm{d}\mu = y^{-N-1}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\mu_X)$ et un lemme

On commence par estimer le volume d'une boule dans $(\mathrm{Cusp}(X),d,\mathrm{d}\mu)$:

Proposition 2.1. *Soit (X,d_X,μ_X) comme dans l'introduction. En notant δ la mesure de Dirac, on a* :

$$\big|B\big((y,x),r\big)\big| \sim \begin{cases} y^{-N} r\big|B_X(x,yr)\big|, & \textit{si } 0 \leqslant r \leqslant 1,\\ y^{\omega_2-N}\,\mathrm{e}^{Nr}\big(1+\mathrm{e}^{(\omega_2-2N)r}+r\delta_{\omega_2=2N}\big), & \textit{si } y, r \geqslant 1,\\ y^{\omega_1-N}\,\mathrm{e}^{Nr}\big[1+\mathrm{e}^{(\omega_1-2N)r}+r\delta_{\omega_1=2N}\big], & \textit{si } y^{-1} \geqslant \sinh r \geqslant \sinh 1,\\ (y\,\mathrm{e}^r)^{\omega_2-N}\dfrac{\sqrt{\sinh r-1/y}}{\sqrt{\sinh r}}\big[1+\delta_{\omega_2=2N}\ln(1+y\sinh r)\big] & \\ \quad + y^{\omega_1-N}\,\mathrm{e}^{Nr}\left[1+y^{2N-\omega_1}+\delta_{\omega_1=2N}\ln\dfrac{1}{y}\right], & \textit{si } r \geqslant 1 \textit{ et } \sinh r > \dfrac{1}{y} > 1. \end{cases}$$

Dans cette Note, on a besoin aussi du lemme suivant :

Lemme 2.2. *Soient $N > 0$ et $1 \leqslant p < +\infty$ fixés. Alors il exite une constante $C(N,p) > 0$ telle que pour toute $g \in L^{p,1}(\mathbb{R}^+, y^{-N-1}\,\mathrm{d}y)$, on a :* $\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+, y^{-N/p-1}\,\mathrm{d}y)} \leqslant C(N,p)\|g\|_{L^{p,1}(\mathbb{R}^+, y^{-N-1}\,\mathrm{d}y)}$.

Démonstration. Par le Théorème V.3.13 (p. 195) de [8], il suffit de montrer l'estimation suivante dont la preuve est élémentaire : $\int_E y^{-N/p-1}\,\mathrm{d}y \leqslant pN^{1/p-1}[\int_E y^{-N-1}\,\mathrm{d}y]^{1/p}$ pour toute $E \subseteq \mathbb{R}^+$ mesurable.

3. Preuve du Théorème 1.1

On commence par montrer la partie négative du Théorème 1.1 : pour $\kappa > N$ fixé, on pose $p_0(\kappa) = \sup\{p \geqslant 1;\, p\cdot(2N-\kappa) < N\}$, et on fixe un point $x_0 \in X$. Si $\omega_1 > N$ et $p < p_0(\omega_1)$, alors on voit que $\|M(\chi_{B((10^{-3},x_0),1)})\|_{L^p(\mathrm{d}\mu)} = +\infty$. Si $\omega_2 > N$, en choisissant $f_n = \chi_{B((n,x_0),1)}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), on voit que pour tout $1 < p < p_0(\omega_2)$ fixé :

$$\frac{\|Mf_n\|_{L^p(\mathrm{d}\mu)}}{\|f_n\|_{L^p(\mathrm{d}\mu)}} \geqslant \frac{\|(Mf_n)\chi_{y\geqslant 1}\|_{L^p(\mathrm{d}\mu)}}{\|f_n\|_{L^p(\mathrm{d}\mu)}} \longrightarrow +\infty\ (n \to +\infty).$$

On donne maintenant la preuve de la partie positive du Théorème 1.1 (on a donc $0 < \omega < 2N$, et par la Proposition 2.1, on a : $|B((y,x),r)| \sim \mathrm{e}^{Nr}(y^{\omega_1-N}\chi_{y\leqslant 1} + y^{\omega_2-N}\chi_{y\geqslant 1})$ pour tout $r \geqslant 1$ et tout (y,x)) :

En notant $Y = (y,x)$, $Y' = (y',x') \in \mathbb{R}^+ \times X$, on remarque que :

$$\begin{aligned} Mf(Y) &\leqslant \sup_{0<r\leqslant 1}\big|B_Y^r\big|^{-1}\|f\|_{L^1(B_Y^r,\mathrm{d}\mu)} + \chi_{y\geqslant 1}\sup_{r\geqslant 1}\big|B_Y^r\big|^{-1}\|f\|_{L^1(B_Y^r)} + \chi_{y\leqslant 1}\sup_{r\geqslant 1}\big|B_Y^r\big|^{-1}\|f\chi_{y'\leqslant 1}\|_{L^1(B_Y^r)}\\ &\quad + \chi_{y\leqslant 1}\sup_{r\geqslant 1}\big|B_Y^r\big|^{-1}\|f\chi_{y'\geqslant 1}\|_{L^1(B_Y^r)} = T_1f(Y)+T_2f(Y)+T_3f(Y)+T_4f(Y). \end{aligned}$$

Evidemment, les quatre opérateurs T_i ($1 \leqslant i \leqslant 4$) sont bornés sur L^∞ et T_1 est de type faible $(1,1)$ (voir par exemple pp. 71–72 de [4]). De plus, on a :

$$\begin{aligned} T_4f(Y) &\leqslant \chi_{y\leqslant 1}\int_{\mathrm{Cusp}(X)\setminus B(Y,1)}\frac{|f(Y')\chi_{y'\geqslant 1}|}{|B(Y,d(Y,Y'))|}\,\mathrm{d}\mu\big(Y'\big)\\ &\leqslant C_N y^{N-\omega_1}\chi_{y\leqslant 1}\int_1^{+\infty}\!\!\int_X\left(\frac{yy'}{y^2+y'^2+d_X^2(x,x')}\right)^N\big|f(y',x')\big|\,\mathrm{d}\mu(y',x'). \end{aligned}$$

Quand $\omega = \max(\omega_1,\omega_2) < N$, alors T_4 est borné sur L^1, puisqu'on a :

$$\sup_{y'\geqslant 1,\ x'\in X}\int_0^1\int_X y^{N-\omega_1}\left(\frac{yy'}{y^2+y'^2+d_X^2(x,x')}\right)^N \mathrm{d}\mu(y,x)\leqslant C\sup_{y'\geqslant 1}\int_0^1\left(\frac{y^2+y'^2}{y^2}\right)^{\omega/2}\left(\frac{yy'}{y^2+y'^2}\right)^N\frac{\mathrm{d}y}{y}<+\infty.$$

Si $\omega = N$, alors on peut adapter les techniques de [9] pour montrer que T_4 est de type faible $(1,1)$. Quand $N < \omega < 2N$, en notant $M_X f(y',x) = \sup_{r>0}|B_X(x,r)|^{-1}\int_{B_X(x,r)}|f(y',x')|\,\mathrm{d}\mu_X(x')$, on a :

$$T_4 f(Y)\leqslant C_N y^{2N-\omega}\chi_{y\leqslant 1}\int_1^{+\infty} y'^{\omega-2N-1}M_X f(y',x)\,\mathrm{d}y'\leqslant C_N y^{2N-\omega}\int_0^{+\infty} y'^{\omega-2N-1}M_X f(y',x)\,\mathrm{d}y'.$$

Donc, en utilisant le Lemme 2.2, on a :

$$\begin{aligned}\|T_4 f\|^{p_0(\omega)}_{L^{p_0(\omega),\infty}} &= \sup_{s>0} s^{p_0(\omega)}\mu\{Y;\ |T_4 f(Y)|>s\}\leqslant C\Big\|\big\|M_X f(y',x)\big\|_{L^1(\mathbb{R}^+,\,y'^{-N/p_0(\omega)-1}\mathrm{d}y')}\Big\|^{p_0(\omega)}_{L^{p_0(\omega)}(X,\mathrm{d}\mu_X)}\\ &\leqslant C'\Big\|\big\|M_X f(y',x)\big\|_{L^{p_0(\omega),1}(\mathbb{R}^+,\,y'^{-N-1}\mathrm{d}y')}\Big\|^{p_0(\omega)}_{L^{p_0(\omega)}(X,\mathrm{d}\mu_X)}\leqslant C'\|M_X f\|^{p_0(\omega)}_{L^{p_0(\omega),1}(\mathbb{R}^+\times X,\mathrm{d}\mu)},\end{aligned}$$

par l'inégalité de Minkowski et la définition de $L^{p,1}$. Comme X est un espace homogène au sens de [4], M_X est borné sur $L^p(\mathbb{R}^+\times X,\mathrm{d}\mu)$ pour tout $1<p\leqslant+\infty$; par le théorème d'interpolation sur les espaces de Lorentz, voir le Théorème V.3.15 (p. 197) de [8], il est aussi borné sur $L^{p_0(\omega),1}$. Par conséquent, quand $N<\omega<2N$, T_4 est borné de $L^{p_0(\omega),1}$ dans $L^{p_0(\omega),\infty}$. De la même façon, on peut montrer les résultats suivants : si $\omega_2<2N$ et $\omega_1<N$, alors T_3 est borné sur L^1 ; si $\omega_2<2N$ et $\omega_1=N$, alors T_3 est borné de $L^{1,1}$ dans $L^{1,\infty}$; si $\omega_2<2N$ et $N<\omega_1<2N$, alors T_3 est borné de $L^{p_0(\omega_1),1}$ dans $L^{p_0(\omega_1),\infty}$; si $\omega_1<2N$ et $\omega_2<N$, alors T_2 est borné sur L^1 ; si $\omega_1<2N$ et $\omega_2=N$, alors T_2 est borné de $L^{1,1}$ dans $L^{1,\infty}$; si $\omega_1<2N$ et $N<\omega_2<2N$, alors T_2 est borné de $L^{p_0(\omega_2),1}$ dans $L^{p_0(\omega_2),\infty}$. Par le théorème d'interpolation et la propriété d'inclusion des espaces de Lorentz, voir les Théorèmes V.3.15 (p. 197) et V.3.11 (p. 192) de [8], on obtient les résultats positifs du Théorème 1.1.

Remerciements

L'auteur est soutenu par le DFG (SFB 611). Je tients à remercier Professeur Karl-Theodor Sturm pour avoir attiré mon attention sur le livre [2]. Je voudrais remercier aussi le rapporteur pour des suggestions.

Références

[1] J.-P. Anker, E. Damek, C. Yacoub, Spherical analysis on harmonic AN groups, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa. Cl. Sci. 23 (1996) 643–679.
[2] D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov, A Course in Metric Geometry, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
[3] J.-C. Chen, S.-L. Wang, On boundedness of Hardy–Littlewood maximal function operator on Riemannian manifolds, Chinese Ann. Math. Ser. B 14 (1993) 69–76.
[4] R. Coifman, G. Weiss, Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes, in: Lecture Notes in Math., vol. 242, Springer, 1971.
[5] H.-Q. Li, Analyse sur les variétés cuspidales, Math. Ann. 326 (2003) 625–647.
[6] W. Müller, Spectral theory for Riemannian manifolds with cusps and a related trace formula, Math. Nachr. 111 (1983) 197–288.
[7] E. Sawyer, Weighted Lebesgue and Lorentz norm inequalities for the Hardy operator, Trans. Amer. Math. Soc. 281 (1984) 329–337.
[8] E.M. Stein, G. Weiss, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.
[9] J.-O. Strömberg, Weak type L^1 estimates for maximal functions on noncompact symmetric spaces, Ann. of Math. 114 (1981) 115–126.