Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 649–652
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Équations aux dérivées partielles

Stabilité asymptotique des ondes solitaires de l'équation de Benjamin–Bona–Mahony

Khaled El Dika

Laboratoire de mathématiques, Université Paris-Sud, 91405 Orsay, France

Reçu le 24 juin 2003 ; accepté après révision le 7 octobre 2003

Présenté par Pierre-Louis Lions

Résumé

Nous montrons la stabilité asymptotique dans $H^1(\mathbb{R})$ de la famille des ondes solitaires de l'équation de Benjamin–Bona–Mahony. Nous obtenons ce résultat en montrant un théorème de rigidité du flot autour des ondes solitaires (un théorème de type Liouville). ***Pour citer cet article : K. El Dika, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

Asymptotic stability of solitary waves for the Benjamin–Bona–Mahony equation. We prove the asymptotic stability in $H^1(\mathbb{R})$ of the family of solitary waves for the Benjamin–Bona–Mahony equation. The proof is based on a Liouville type theorem on the flow around the solitary waves. ***To cite this article: K. El Dika, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

1. Introduction et énoncé du résultat

L'équation de Benjamin–Bona–Mahony (BBM) intervient dans la modélisation de la propagation des ondes hydrodynamiques dans un canal peu profond (voir [1]). Elle s'écrit

$$\begin{cases} (1-\partial_x^2)u_t + (u+u^2)_x = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

Le problème de Cauchy est globalement bien posé dans $H^1(\mathbb{R})$ (voir [1]), et l'équation admet pour $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, deux invariants :

$$E\big(u(t)\big) = \frac{1}{2}\int u^2(t) + \frac{1}{3}\int u^3(t) = E(u_0), \tag{2}$$

$$m\big(u(t)\big) = \int u^2(t) + \int u_x^2(t) = m(u_0). \tag{3}$$

Adresse e-mail : Khaled.Eldika@math.u-psud.fr (K. El Dika).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2003.10.003

L'équation de BBM admet une famille d'ondes solitaires paramétrées par leur vitesse $(\varphi_c)_{c>1}$.

Plusieurs travaux suggèrent que ces ondes solitaires jouent un rôle fondamental dans la dynamique globale de cette équation, et il est donc naturel de poser la question de la stabilité de ces ondes solitaires. Il est connu qu'elles sont orbitalement stables (voir [7] ou [2]) : soit $c > 1$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|u_0 - \varphi_c|_{H^1} < \delta$ implique l'existence d'une fonction $r(t)$ de classe C^1, telle que $|u(t, \cdot + r(t)) - \varphi_c|_{H^1} < \varepsilon$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Miller et Weinstein ont montré, en suivant la méthodologie élaborée par Pego et Weinstein pour l'équation de Korteweg–de Vries (KdV), la stabilité asymptotique de la famille de ces ondes solitaires, pour des données initiales dans $H^2(\mathbb{R}) \cap H^1_a(\mathbb{R})$, où $a > 0$ et $H^1_a(\mathbb{R}) = \{f \in H^1(\mathbb{R}),\ \mathrm{e}^{a\cdot} f \in H^1(\mathbb{R})\}$, hypothèse très restrictive d'après les auteurs mêmes (voir [6]). D'autre part Martel et Merle ont montré la stabilité asymptotique des ondes solitaires de KdV généralisée sous-critique dans l'espace d'énergie $H^1(\mathbb{R})$ (voir [5]).

En travaillant dans le même esprit que Martel et Merle, et en utilisant un résultat spectral de Miller et Weinstein sur le linéarisé autour de l'onde solitaire, nous montrons la stabilité asymptotique dans l'espace d'énergie $H^1(\mathbb{R})$ de la famille des ondes solitaires de l'équation de BBM :

Théorème 1.1. *Soit $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ et considérons $u(t)$ la solution de* (1) *sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ telle que $u(0) = u_0$. Il existe un ensemble $E \subset (1, +\infty)$ au plus dénombrable n'ayant pas de point d'accumulation* (E *peut être vide*)*, tel que $\forall c_0 \in (1, +\infty)\backslash E$, il existe $a_0 > 0$, tel que si $|u_0 - \varphi_{c_0}|_{H^1} < a_0$ alors on peut trouver $c_{+\infty} > 1$ et une fonction $x(t)$ tels que $u(t, \cdot + x(t))$ converge faiblement dans $H^1(\mathbb{R})$ vers $\varphi_{c_{+\infty}}$ quand $t \to +\infty$.*

Remarquons tout d'abord que $c_{+\infty}$ est éventuellement différente de c_0 pour la simple raison qu'il existe des ondes solitaires aussi proches que l'on veut de φ_{c_0}.

Le théorème étant énoncé, il faut signaler des différences majeures dans la preuve de ce résultat par rapport à celui de Martel et Merle concernant l'équation de KdV généralisée : la preuve du théorème de Liouville linéaire est complètement différente de celle de Martel et Merle (voir [4]), elle utilise le résultat spectral de Miller–Weinstein sur le linéarisé autour de l'onde solitaire, et nous pensons qu'elle est plus succeptible d'être appliquée à d'autres équations ; signalons par ailleurs que l'ensemble E qui intervient dans ce théorème est dû à l'utilisation de ce résultat de Miller et Weinstein. De plus l'invariance par scaling de l'équation de KdV généralisée permettait à Martel et Merle de se ramener à une équation pour la perturbation où l'opérateur linéaire est indépendant du temps. Ce n'est pas possible ici car l'équation de BBM n'admet pas d'invariance par scaling. Le passage du problème non-linéaire au problème linéaire nécessite des techniques différentes de celles de ce même passage pour l'équation de KdV généralisée à cause de l'absence d'effets régularisants pour l'équation de BBM.

Une première étape dans la preuve de ce résultat est le choix d'une décomposition de u en une onde solitaire modulée et une fonction qui reste petite dans $H^1(\mathbb{R})$, $u(t,x) = \varphi_{c(t)}(x - x(t)) + \eta(t, x - x(t))$:

Soit $c_0 > 1$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ telle que si $|u_0 - \varphi_{c_0}|_{H^1} < \delta$ alors il existe une fonction de classe C^1 : $(x, c) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ pour laquelle les propriétés suivantes sont vérifiées pour tout $t \in \mathbb{R}$: $|x(t) - r(t)| + |c(t) - c_0| < \varepsilon$, $|u(t, \cdot + x(t)) - \varphi_{c(t)}|_{H^1} < \varepsilon$, $u(t, \cdot + x(t)) - \varphi_{c(t)}$ est orthogonale à $(1 - \partial_x^2)\varphi_{c(t)}$ et à $(1 - \partial_x^2)(x\varphi_{c(t)})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

Ce choix des conditions d'orthogonalité permet d'obtenir des estimations uniformes en temps sur les paramètres de modulations et leurs dérivées ; par ailleurs il est crucial pour la preuve du théorème de Liouville linéaire : il entraîne la positivité d'un certain opérateur, et il permet de se ramener à l'orthogonal du noyau généralisé du linéarisé autour de l'onde solitaire. La preuve de l'existence de cette décomposition utilise le théorème des fonctions implicites ainsi que le résultat de stabilité orbitale ; des estimations sur les paramètres de modulation, utiles dans plusieurs démonstrations, découlent de l'équation de η :

$$\begin{cases} (1 - \partial_x^2)\eta_t - \partial_x L_{c(t)}\eta + c_t(1 - \partial_x^2)\partial_c\varphi_c - (x_t - c)(1 - \partial_x^2)\partial_x(\varphi_c + \eta) + \partial_x(\eta^2) = 0, \\ \eta(0, x) = \eta_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4}$$

où $L_c = -c\partial_x^2 + (c - 1) - 2\varphi_c$. Cette décomposition de u étant faite, la preuve du Théorème 1.1 se fait en trois étapes principales : dans une première étape, nous montrons la stabilité asymptotique des ondes solitaires de BBM en admettant le théorème de Liouville énoncé ci-dessous ; il s'agit d'un théorème de rigidité du flot autour des ondes solitaires qui dit qu'une solution de (1) qui est H^1 localisée (modulo une translation en espace) et qui est proche d'une onde solitaire dans $H^1(\mathbb{R})$, est identiquement égale à une onde solitaire translatée :

Théorème 1.2. *Soit $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ et considérons $u(t)$ la solution de* (1) *sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ telle que $u(0) = u_0$. Il existe un ensemble E comme dans le Théorème* 1.1 *tel que pour $c_0 \in (1, +\infty)\backslash E$, il existe $a_1 > 0$, tel que si $|u_0 - \varphi_{c_0}|_{H^1} < a_1$ et s'il existe une fonction $y(t)$ telle que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists R_\varepsilon > 0$, tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\int_{|x|>R_\varepsilon} (u^2(t, x + y(t)) + u_x^2(t, x + y(t)))\,\mathrm{d}x < \varepsilon$, alors il existe $x_1 \in \mathbb{R}$, $c_1 > 1$ tels que $u(t, x) = \varphi(x - c_1 t + x_1)$ pour tous $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.*

Les deux autres étapes sont consacrées à la preuve de ce théorème de Liouville : nous réduisons d'abord ce problème non-linéaire à un problème de Liouville linéaire, puis nous montrons le théorème de Liouville linéaire. Nous donnons ci-après quelques idées des preuves, pour les démonstrations en détail voir [3].

2. Indications sur les démonstrations

Le principal outil dans plusieurs démonstrations est « la monotonie-H^1 » : pour une certaine fonction ψ positive et croissante, telle que $\psi(x) \to 1$ quand $x \to +\infty$, et $\psi(x) \leqslant C\,\mathrm{e}^{x/K}$ pour $x \leqslant 0$, où $K > 0$, et pour $\alpha > 0$ définissons :

$$\mathcal{I}_{x_0,t_0}(t) = \frac{1}{2} \int \big(u^2(t, x) + u_x^2(t, x)\big)\psi\big(x - x(t) - x_0 - \alpha\big(x(t_0) - x(t)\big)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Proposition 2.1. *Soit $c_0 > 1$ il existe $a_2 > 0$, $B > 0$, $C > 0$, $\alpha > 0$ et $K > 0$ tel que si $|u_0 - \varphi_{c_0}|_{H^1} < a_2$ alors $\forall t_0 \in \mathbb{R}$, $\forall t \leqslant t_0$, on a : $\mathcal{I}_{x_0,t_0}(t_0) \leqslant \mathcal{I}_{x_0,t_0}(t) + C\,\mathrm{e}^{-x_0/K}$.*

Remarque. Une propriété analogue de monotonie, pour une quantité liée à la norme L^2, a été établie pour KdVg dans [4] (voir aussi [5]).

2.1. Etape I

En admettant le Théorème 1.2 nous montrons que η converge vers 0 faiblement dans $H^1(\mathbb{R})$; la preuve se fait par l'absurde en construisant une solution limite qui contredit le théorème de Liouville ; en effet si $\eta \not\rightharpoonup 0$ alors il existe $t_n \to +\infty$, $\tilde{c}_0 \in (1, +\infty)\backslash E$ et $\tilde{\eta}_0 \in H^1(\mathbb{R})$, $\tilde{\eta}_0 \not\equiv 0$ tel que $\eta(t_n) \rightharpoonup \tilde{\eta}_0$ dans $H^1(\mathbb{R})$, $c(t_n) \to \tilde{c}_0$, considérons $\tilde{u}$ la solution de (1) pour $\tilde{u}(0) = \tilde{u}_0 = \tilde{\eta}_0 + \varphi_{\tilde{c}_0}$, nous décomposons alors $\tilde{u}$ de la même manière que u : $\tilde{u}(t, x) = \varphi_{\tilde{c}(t)}(x - \tilde{x}(t)) + \tilde{\eta}(t, x - \tilde{x}(t))$, et nous montrons :

Proposition 2.2. *Sous les hypothèses précédentes, la fonction $\tilde{u}$ est H^1 localisée uniformément en temps autour de $\tilde{x}(t)$: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists R_\varepsilon > 0$, telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ $\int_{|x|>R_\varepsilon} (\tilde{u}^2(t, x + \tilde{x}(t)) + \tilde{u}_x^2(t, x + \tilde{x}(t)))\,\mathrm{d}x < \varepsilon$.*

La continuité du flot de BBM pour la topologie faible H^1, la monotonie de la masse H^1, et le fait que $\partial_t u \in H^2(\mathbb{R})$ si $u \in H^1(\mathbb{R})$ nous permettent de montrer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la convergence forte de $u(t_n + t, \cdot + x(t_n + t))$ vers $\tilde{u}(t, \cdot + \tilde{x}(t))$ dans $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Cette propriété et la monotonie nous permettent de montrer la Proposition 2.2.

Mais cette solution $\tilde{u}$ contredit le Théorème 1.2, ce qui montre que $\eta \rightharpoonup 0$ dans $H^1(\mathbb{R})$.

D'autre part en considérant $\mathcal{E}_{x_0,t_0}(t) = \int (\frac{u^2(t,x)}{2} + \frac{u^3(t,x)}{3})\psi(x - (x(t) + x_0 + \alpha(x(t_0) - x(t)))\,\mathrm{d}x$ nous montrons sous les mêmes hypothèses que dans la Proposition 2.1, une propriété de monotonie de cette énergie localisée : pour $x_0 < 0$, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, pour tout $t \geqslant t_0$, on a : $\mathcal{E}_{x_0,t_0}(t) \leqslant \mathcal{E}_{x_0,t_0}(t_0) + C\,\mathrm{e}^{x_0/K}$. Cette propriété et la convergence forte de $\eta(t)$ vers 0 dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ quand $t \to +\infty$ nous permettent de montrer la convergence de $c(t)$ vers $c_{+\infty}$, ce qui implique le Théorème 1.1.

2.2. Etape II

Considérons une solution u de (1) qui vérifie les hypothèses du Théorème 1.2, u se décompose en $u(t,x) = \varphi_{c(t)}(x - x(t)) + \eta(t, x - x(t))$. Grâce à la stabilité orbitale nous pouvons remplacer, dans l'hypothèse de la localisation H^1, $y(t)$ par $x(t)$; cette localisation de $u(t, \cdot + x(t))$ et la monotonie nous permettent de montrer que $u(t, \cdot + x(t))$ est, uniformément en temps, à décroissance exponentielle.

Ainsi pour montrer le Théorème 1.2 il suffit de montrer qu'une solution η de (4) qui est à décroissance exponentielle et qui est orthogonale à $(1 - \partial_x^2)\varphi_{c(t)}$ et à $(1 - \partial_x^2)(x\varphi_{c(t)})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, est identiquement nulle. En supposant que ceci n'est pas vrai nous construisons une solution d'un problème de Liouville linéaire de la manière suivante : il existe une suite η_n de solutions de l'Éq. (4), vérifiant les conditions d'orthogonalité ci-dessus et la propriété de décroissance exponentielle, telle que $\eta_n(0) \to 0$ dans $H^1(\mathbb{R})$, $\eta_n(0) \not\equiv 0$. En considérant une sous-suite normalisée de η_n, et en passant à la limite en n, nous construisons une fonction v solution de $v_t - (1 - \partial_x^2)^{-1}\partial_x L_c v = \beta(t)\partial_x\varphi_c$, avec $v(0) = v_0$, où $c \in \mathbb{R}$, $\beta \in C(\mathbb{R})$, et $L_c = -c\partial_x^2 + c - 1 - 2\varphi_c$. Ainsi avec le changement de fonctions $u(t,x) = v(t,x) - (\int_0^t \beta(s)\,\mathrm{d}s)\partial_x\varphi_c$, nous sommes ramenés à montrer le théorème de Liouville linéaire suivant :

Théorème 2.3. *Il existe un ensemble E tel que pour $c \in (1, +\infty)\setminus E$, si u est solution de $u_t - (1 - \partial_x^2)^{-1}\partial_x L_c u = 0$, $u(0) = u_0$ qui vérifie $(u(t), (1 - \partial_x^2)\varphi_c) = (u(0), (1 - \partial_x^2)(x\varphi_c)) = 0$, et $\int (u^2(t,x) + u_x^2(t,x))\,\mathrm{e}^{2\alpha|x|}\,\mathrm{d}x \leqslant C$ où $\alpha > 0$, alors $u \equiv 0$.*

2.3. Etape III

Idées de la démonstration du Théorème 2.3. Considérons $A = \partial_x(1 - \partial_x^2)^{-1}L_c$ et $A_\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\cdot}A\,\mathrm{e}^{-\alpha\cdot}$, par un changement de fonction nous obtenons une solution de $u_t - (1 - \partial_x^2)^{-1}\partial_x L_c u = 0$, orthogonale au noyau généralisé de A qui est de dimension deux (voir [6]); puis nous considérons $w(t) = \mathrm{e}^{\alpha\cdot}u(t)$, $w(t) \in H^1(\mathbb{R})$; elle est solution de $w_t - A_\alpha w = 0$ avec $w(0) = \mathrm{e}^{\alpha\cdot}u(0)$, et est orthogonale au noyau généralisé de A_α ; ainsi w vérifie les hypothèses de la Proposition 3.1 de l'article de Miller et Weinstein [6] qui implique que $|w(t)|_{H^1} \to 0$ quand $t \to +\infty$, et par suite $|u(t)|_{H^1_{\mathrm{loc}}} \to 0$. D'autre part l'équation linéaire admet une loi de conservation : $(L_c u(t), u(t)) = (L_c u_0, u_0)$, mais $(L_c u_0, u_0) = (L_c v_0, v_0) \geqslant C_1|v_0|_{L^2}^2 > 0$ à cause des conditions d'orthogonalité; or $(L_c u(t), u(t)) \leqslant C_2|u(t)|_{H^1}^2$ permet d'écrire $|u(t)|_{H^1} \geqslant |v_0|_{L^2} > 0$, cette non dégénérescence et la H^1 localisation de u sont en contradiction avec le fait que $|u(t)|_{H^1_{\mathrm{loc}}} \to 0$, d'où le résultat.

Remerciements

Je tiens à remercier Anne De Bouard pour les nombreuses discussions fructueuses lors de l'élaboration de ce travail.

Références

[1] T.B. Benjamin, J.L. Bona, J.J. Mahony, Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 272 (1220) (1972) 47–78.
[2] J.L. Bona, A. Soyeur, On the stability of solitary-waves solutions of model equations for long waves, J. Nonlinear Sci. 4 (5) (1994) 449–470.
[3] K. El Dika, Asymptotic stability of solitary waves for the Benjamin–Bona–Mahony equation, en préparation.
[4] Y. Martel, F. Merle, A Liouville theorem for the critical generalized Korteweg–de Vries equation, J. Math. Pures Appl. (9) 79 (4) (2000) 339–425.
[5] Y. Martel, F. Merle, Asymptotic stability of solitons for subcritical generalized KdV equations, Arch. Rational Mech. Anal. 157 (3) (2001) 219–254.
[6] J.R. Miller, M.I. Weinstein, Asymptotic stability of solitary waves for the regularized long-wave equation, Comm. Pure Appl. Math. 49 (4) (1996) 399–441.
[7] M.I. Weinstein, Existence and dynamic stability of solitary wave solutions of equations arising in long wave propagation, Comm. Partial Differential Equations 12 (10) (1987) 1133–1173.