

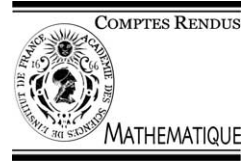


ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 467–472



Géométrie algébrique

## Modules de Hodge mixtes à croisements normaux

Jörg Wildeshaus

*Institut Galilée, Université Paris 13, avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France*

Reçu le 16 avril 2003 ; accepté après révision le 27 août 2003

Présenté par Jean-Pierre Serre

### Résumé

Ce travail concerne les modules de Hodge mixtes algébriques sur l'espace affine (relatif)  $\mathbb{A}^n \times S$  qui sont à croisements normaux. Le résultat principal (Théorème 4.3) établit une équivalence entre la catégorie des modules de Hodge à croisements normaux et la catégorie des hypercubes de variations admissibles sur  $S$ . Si  $S$  est un point, alors 4.3 est l'analogue du résultat principal de Galligo et al. (Ann. Inst. Fourier 35 (1985) 1–48) en théorie de Hodge. *Pour citer cet article : J. Wildeshaus, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

### Abstract

**Mixed Hodge modules of normal crossing type.** We study algebraic mixed Hodge modules on the (relative) affine space  $\mathbb{A}^n \times S$  which are of normal crossing type. Our main result (Theorem 4.3) gives an equivalence between the category of Hodge modules of normal crossing type, and the category of hypercubes of admissible variations on  $S$ . If the base  $S$  is a point, then 4.3 is the Hodge theoretic analogue of the main result of Galligo et al. (Ann. Inst. Fourier 35 (1985) 1–48). *To cite this article: J. Wildeshaus, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

### Abridged English version

In this paper, we consider *algebraic mixed Hodge modules* on the affine space  $\mathbb{A}^n \times S$  over a variety  $S$  over  $\mathbb{C}$ . A Hodge module  $\mathbb{V}$  is said to be *of normal crossing type* if the cohomology objects, with respect to the *classical  $t$ -structure*, of the underlying perverse sheaf  $\text{rat } \mathbb{V}$ , are locally constant along the strata of the canonical stratification of  $\mathbb{A}^n \times S$ . The category of these objects is denoted by  $\mathbf{MHM}_{\text{nc}} \mathbb{A}^n \times S$ . Our main result (Theorem 4.3) gives an equivalence of categories between  $\mathbf{MHM}_{\text{nc}} \mathbb{A}^n \times S$ , and the category of hypercubes  $\mathbb{M}[n]_S$  of *admissible mixed variations* on  $S$ ; for the precise definition of this category, see Definition 3.1. Let us remark that the subcategory of objects “with unipotent monodromy” in  $\mathbb{M}[n]_{\text{Spec } \mathbb{C}}$  coincides with the category  $\mathbf{M}(n)$  from [6, 3.23]. However, the connection to Hodge modules on  $\mathbb{A}^n$  (Corollary 4.7) is not explicitly mentioned in [loc. cit.].

Given the rather involved definition of a Hodge module [5,6], one of the interests of our result is the direct description of a subcategory of Hodge modules, in a simple geometric situation. The reader may imagine that

Adresse e-mail : [wildesh@math.univ-paris13.fr](mailto:wildesh@math.univ-paris13.fr) (J. Wildeshaus).

by adding the necessary combinatorics, our description can be extended to construct Hodge modules on toric embeddings over  $S$  (which are more general than  $\mathbb{A}^n \times S$ ), from arrangements (which are more complicated than hypercubes) of admissible variations on  $S$ . In fact, this is the approach used in [4] to construct *automorphic Hodge modules* on a toric embedding over a Shimura variety  $S$  from arrangements of representations of the group underlying  $S$ .

## 1. Notations et conventions

On fixe un sous-corps  $F$  de  $\mathbb{R}$ . Les schémas sont définis sur  $\mathbb{C}$ ; en particulier, on notera  $\mathbb{A}^n$  et  $\mathbb{G}_m$  respectivement l'espace affine et le groupe multiplicatif sur  $\mathbb{C}$ . Le symbole  $\times$  signifie le produit  $\times_{\mathbb{C}}$  sur  $\mathbb{C}$ . Pour tout schéma séparé et réduit  $X$ , on notera  $D_{\mathbb{C}}^b(X, F)$  la sous-catégorie triangulée pleine de la catégorie dérivée des complexes bornés de faisceaux de  $F$ -espaces vectoriels sur  $X(\mathbb{C})$ , dont la cohomologie est algébriquement constructible. On notera **Perv**  $X$  le coeur de la  $t$ -structure perverse autoduale sur  $D_{\mathbb{C}}^b(X, F)$ , et **MHM**  $X$  la catégorie des  $F$ -modules de Hodge mixtes algébriques sur  $X$  [6, 4.2]. Rappelons en particulier que par définition, les gradués  $\mathrm{Gr}_W^{\bullet}$  par rapport à la filtration par le poids des objets de **MHM**  $X$  sont polarisables. Les variations de structures de Hodge mixtes admissibles sur les schémas lisses  $X$  [3, Section 1] sont considérées comme objets de **MHM**  $X$  [6, Théorème 3.27], et les systèmes locaux sur  $X(\mathbb{C})$  comme objets de **Perv**  $X$ , c'est-à-dire il n'y a pas de décalage entre ces catégories. On note *rat* le foncteur qui associe à un module de Hodge algébrique son faisceau pervers sous-jacent. Ce foncteur est fidèle et exact.

L'automorphisme de monodromie du foncteur  $\psi_f$  des cycles proches est normalisé de façon classique. Par le lemme de comparaison de Verdier [7, Proposition 7.1] dans le contexte analytique, cette normalisation est l'inverse de celle qui correspond à la nature monodromique des objets dans l'image de  $\psi_f$ .

Pour tout automorphisme  $T$  d'un objet  $\mathbb{W}$  d'une catégorie Tannakienne  $\mathbb{Q}$ -linéaire, on notera respectivement  $T_u$  et  $T_s$  la partie unipotente et la partie semisimple de la décomposition multiplicative de Jordan de  $T$ , et  $\mathbb{W}^0$  le noyau de l'endomorphisme  $T_s - \mathrm{id}$  de  $\mathbb{W}$ .

Pour décrire les catégories, on se limitera aux définitions des objets, celles des morphismes étant évidentes.

## 2. Autour du théorème de Hain–Zucker

On fixe un  $\mathbb{C}$ -schéma lisse et séparé  $S$ , qui est de type fini, et on considère la catégorie **Var**  $S$  des variations mixtes admissibles de  $F$ -structure de Hodge sur  $S$ . On rappelle que par définition, les gradués  $\mathrm{Gr}_W^{\bullet}$  des objets de **Var**  $S$  sont polarisables. L'image de **Var**  $S$  sous le foncteur *rat* est contenue dans la catégorie des systèmes locaux sur  $S(\mathbb{C})$ .

**Définition 2.1.** (a) Soit  $\mathbb{V} \in \mathbf{Var} S$ . Un élément  $T$  de  $\mathrm{Aut}(\mathrm{rat} \mathbb{V})$  est dit *admissible* si  $T$  est quasi-unipotent, si  $T_s \in \mathrm{Aut}(\mathbb{V})$ , et si  $\log T_u \in \mathrm{End}(\mathrm{rat} \mathbb{V})$  est de type de Hodge  $(-1, -1)$ . Le groupe des automorphismes admissibles de  $\mathrm{rat} \mathbb{V}$  est noté  $\mathrm{Aut}_{\mathrm{adm}}(\mathrm{rat} \mathbb{V})$ .

(b) La catégorie  $(\mathbf{Var} S, t)$  est celle des paires  $(\mathbb{V}, T)$ , avec  $\mathbb{V} \in \mathbf{Var} S$  et  $T \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{adm}}(\mathrm{rat} \mathbb{V})$ .

(c) La sous-catégorie pleine  $(\mathbf{Var} S, t)^0$  de  $(\mathbf{Var} S, t)$  est constituée des objets  $(\mathbb{V}, T)$  pour lesquels  $T$  est unipotent.

L'observation suivante nous permettra de réduire les preuves des résultats 2.2 et 2.3 au cas où l'automorphisme  $T$  est unipotent : la catégorie  $(\mathbf{Var} S, t)$  s'identifie à la limite directe de catégories de données de descente dans  $(\mathbf{Var} S, t)^0$ , sous l'action canonique des groupes de racines de l'unité.

On notera  $x$  le paramètre canonique de  $\mathbb{G}_m$ . Le formalisme de Saito comprend en particulier le foncteur des cycles proches

$$\psi_x : \mathbf{MHM} \mathbb{G}_m \times S \longrightarrow \mathbf{MHM} S$$

[6, Section (2.a)]. Remarquons qu’il factorise canoniquement, à travers la catégorie des paires  $(\mathbb{V}, T)$ , avec  $\mathbb{V} \in \mathbf{MHMS}$  et  $T \in \text{Aut}(\text{rat } \mathbb{V})$ , à savoir l’automorphisme de monodromie. Dans notre situation, le foncteur  $\psi_x$  respecte les sous-catégories des variations admissibles. Plus précisément :

**Proposition 2.2.** (a) *Il existe un isomorphisme canonique de foncteurs entre la restriction de  $\psi_x$  à  $\mathbf{Var } \mathbb{G}_m \times S$ , et l’image inverse  $1^* : \mathbf{Var } \mathbb{G}_m \times S \rightarrow \mathbf{Var } S \subset \mathbf{MHMS}$  associée à l’unité 1 de  $\mathbb{G}_m$ . Cet isomorphisme transforme l’automorphisme  $T$  de  $\text{rat } \psi_x \mathbb{W}$  en l’action naturelle du générateur d’orientation positive  $T_{\text{top}}$  de  $\pi_1(\mathbb{G}_m(\mathbb{C}))$ .*

(b) *L’élément  $T \in \text{Aut}(\text{rat } \psi_x \mathbb{W})$  est admissible.*

**Démonstration.** Au niveau des systèmes locaux, un isomorphisme canonique entre  $\psi_x \mathbb{W}$  et  $1^* \mathbb{W}$  est donné par [7, (SP6) de la Section 8, convenablement transposé dans le contexte de la Section 9] ; cet isomorphisme respecte la monodromie. D’après la définition de  $\psi_x$  [6, 2.2], pour démontrer l’énoncé (a), il faut comparer les deux filtrations suivantes sur  $1^* \mathbb{W}$  : (1) la filtration par le poids  $W_\bullet$  ; (2) la filtration de monodromie relative de  $\log T_{\text{top},u}$  par rapport à  $W_\bullet$ . Nous montrerons que  $\log T_{\text{top},u}$  est de type  $(-1, -1)$ , ce qui impliquera que (1) et (2) coïncident.

On peut supposer que  $S$  est un point, c’est-à-dire que  $\mathbb{W}$  est une variation mixte admissible sur  $\mathbb{G}_m$ . La catégorie des variations admissibles étant stable par image inverse, et  $T_{\text{top}}$  étant quasi-unipotent [3, (1.8.2)], on peut supposer en plus que  $T_{\text{top}} = T_{\text{top},u}$ . Par [2, Théorème 7.2], la représentation de monodromie entre l’anneau de groupe complété de  $\pi_1(\mathbb{G}_m(\mathbb{C}))$  et  $\text{End}_F(1^* \mathbb{W})$  est un morphisme de (pro-)structures de Hodge. Mais  $\pi_1(\mathbb{G}_m(\mathbb{C})) = H_1(\mathbb{G}_m(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$  est de type  $(-1, -1)$ .

Au cours de cette discussion, nous avons également démontré l’énoncé (b).  $\square$

On obtient ainsi un foncteur  $\psi_x : \mathbf{Var } \mathbb{G}_m \times S \rightarrow (\mathbf{Var } S, t), \mathbb{W} \mapsto (\psi_x \mathbb{W}, T) = (1^* \mathbb{W}, T_{\text{top}})$ .

**Théorème 2.3.** *Ce foncteur est une équivalence de catégories.*

**Démonstration.** On note  $(\mathbf{Var } \mathbb{G}_m \times S)^0$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Var } \mathbb{G}_m \times S$  qui est constituée des objets pour lesquels  $T = T_{\text{top}}$  est unipotent. Cette catégorie coïncide avec la catégorie notée  $\pi - U \mathbf{Var}(\mathbb{G}_m \times S)$  dans [9, Section 3] ( $\pi :=$  la projection de  $\mathbb{G}_m \times S$  sur  $S$ ). D’après la Proposition 2.2, et la généralisation du théorème de classification de Hain–Zucker dans le contexte relatif [9, Corollaire 3.4(ii)], le foncteur  $\psi_x : (\mathbf{Var } \mathbb{G}_m \times S)^0 \rightarrow (\mathbf{Var } S, t)^0$  est une équivalence.  $\square$

### 3. La catégorie $\mathbb{M}[n]_S$

On fixe un  $\mathbb{C}$ -schéma lisse et séparé de type fini  $S$ , et un entier  $n \geq 0$ .

**Définition 3.1.** (a) La catégorie  $\mathbb{M}[n]_S$  est celle des  $(\mathbb{V}_I, T_i, \text{can}_i, \text{Var}_i \mid I \subset \{1, \dots, n\}, i \in \{1, \dots, n\})$ , avec  $\mathbb{V}_I \in \mathbf{Var } S, T_i \in \text{Aut}_{\text{adm}}(\text{rat } \mathbb{V}_I)$  pour  $i \notin I, \text{can}_i : \mathbb{V}_I^{i,0} := \ker(T_{i,s} - \text{id}, \mathbb{V}_I) \rightarrow \mathbb{V}_{I \cup \{i\}}$  pour  $i \notin I, \text{Var}_i : \mathbb{V}_I \rightarrow \mathbb{V}_{I - \{i\}}^{i,0}(-1)$  pour  $i \in I$ , tels que les relations suivantes soient satisfaites :  $\text{Var}_i \circ \text{can}_i = \log(T_{i,u}, \mathbb{V}_I^{i,0}) \otimes (2\pi i)^{-1}$  si  $i \notin I$ , et  $A_i \circ B_j = B_j \circ A_i$  si  $i \neq j$  et  $A, B \in \{T, \text{can}, \text{Var}\}$  tels que la composition ait un sens.

(b) La sous-catégorie pleine  $\mathbb{M}[n]_S^0$  de  $\mathbb{M}[n]_S$  est constituée des objets  $(\mathbb{V}_I, T_i, \text{can}_i, \text{Var}_i)$  pour lesquels les  $T_i$  sont unipotents.

Ainsi, la catégorie  $\mathbb{M}[n]_{\text{Spec } \mathbb{C}}^0$  coïncide avec la catégorie  $\mathbf{M}(n)$  de [6, 3.23]. On définit le foncteur  $\text{rat}$  au niveau de  $\mathbb{M}[n]_S$  en associant à  $(\mathbb{V}_I, T_i, \text{can}_i, \text{Var}_i)$  l’objet  $(\text{rat } \mathbb{V}_I, T_i, \text{rat } \text{can}_i, \text{rat } \text{Var}_i)$ .

**Définition 3.2.** (a) Soit  $\mathcal{M} = (\mathbb{V}_I, T_i, \text{can}_i, \text{Var}_i) \in \mathbb{M}[n]_S$ . Un élément  $T$  de  $\text{Aut}(\text{rat } \mathcal{M})$  est dit *admissible* si  $T$  est quasi-unipotent, si  $T_s \in \text{Aut}(\mathcal{M})$ , et si  $\log T_u \in \text{End}(\text{rat } \mathcal{M})$  est de type  $(-1, -1)$ , c’est-à-dire si toutes ses composantes  $\log T_{i,u}$  sont de type  $(-1, -1)$ . Le groupe des automorphismes admissibles de  $\text{rat } \mathcal{M}$  est noté  $\text{Aut}_{\text{adm}}(\text{rat } \mathcal{M})$ .

(b) La catégorie  $(\mathbb{M}[n]_S, t)$  est celle des paires  $(\mathcal{M}, T)$ , avec  $\mathcal{M} \in \mathbb{M}[n]_S$  et  $T \in \text{Aut}_{\text{adm}}(\text{rat } \mathcal{M})$ .

Le foncteur  $\psi_x$  induit un foncteur  $\psi_x : \mathbb{M}[n]_{\mathbb{G}_m \times S} \rightarrow (\mathbb{M}[n]_S, t)$ . Voici la généralisation immédiate du Théorème 2.3 qui correspond à cette situation :

**Théorème 3.3.** *Le foncteur  $\psi_x : \mathbb{M}[n]_{\mathbb{G}_m \times S} \rightarrow (\mathbb{M}[n]_S, t)$  est une équivalence de catégories.*

Donnons une description de la structure inductive de  $\mathbb{M}[n]_S$ . Supposons que  $n \geq 1$ , et fixons un objet  $\mathcal{M} = (\mathbb{V}_I, T_i, \text{can}_i, \text{Var}_i \mid I \subset \{1, \dots, n\}, i \in \{1, \dots, n\})$  de  $\mathbb{M}[n]_S$ . Posons

$$\begin{aligned} \psi_n \mathcal{M} &:= (\mathbb{V}_I, T_i, \text{can}_i, \text{Var}_i \mid I \subset \{1, \dots, n-1\}, i \in \{1, \dots, n-1\}), \\ \phi_n \mathcal{M} &:= (\mathbb{V}_{I \cup \{n\}}, T_i, \text{can}_i, \text{Var}_i \mid I \subset \{1, \dots, n-1\}, i \in \{1, \dots, n-1\}). \end{aligned}$$

Les objets  $\psi_n \mathcal{M}$  et  $\phi_n \mathcal{M}$  appartiennent à la catégorie  $\mathbb{M}[n-1]_S$ . Les données supplémentaires  $(T_n)_I$ ,  $(\text{can}_n)_I$  et  $(\text{Var}_n)_I$  contenues dans  $\mathcal{M}$  définissent un élément  $T \in \text{Aut}_{\text{adm}}(\text{rat } \psi_n \mathcal{M})$ , et des morphismes  $\text{can} : \psi_n^0 \mathcal{M} := (\psi_n \mathcal{M})^0 \rightarrow \phi_n \mathcal{M}$  et  $\text{Var} : \phi_n \mathcal{M} \rightarrow \psi_n^0 \mathcal{M}(-1)$ .

**Définition 3.4.** La catégorie  $\mathbb{M}[n-1]_S^{(2)}$  est celle des

$$(\mathcal{M}', \mathcal{M}'', T, \text{can}, \text{Var}),$$

avec  $\mathcal{M}', \mathcal{M}'' \in \mathbb{M}[n-1]_S$ ,  $T \in \text{Aut}_{\text{adm}}(\text{rat } \mathcal{M}')$ ,  $\text{can} : (\mathcal{M}')^0 \rightarrow \mathcal{M}''$ ,  $\text{Var} : \mathcal{M}'' \rightarrow (\mathcal{M}')^0(-1)$ , tels que  $\text{Var} \circ \text{can} = \log(T_u, (\mathcal{M}')^0) \otimes (2\pi i)^{-1}$ .

**Proposition 3.5.** *Le foncteur  $\mathcal{M} \mapsto (\psi_n \mathcal{M}, \phi_n \mathcal{M}, T, \text{can}, \text{Var})$  est une équivalence de catégories entre  $\mathbb{M}[n]_S$  et  $\mathbb{M}[n-1]_S^{(2)}$ .*

#### 4. Modules de Hodge mixtes algébriques sur $\mathbb{A}^n \times S$

On fixe  $S$  et  $n$  comme dans le paragraphe précédent. Appelons *stratification canonique de  $\mathbb{A}^n \times S$*  la stratification induite par les hyperplans  $\mathbb{A}^{n-1} \times S \cong \{x_i = 0\} \subset \mathbb{A}^n \times S$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Ainsi, toute strate est isomorphe à  $\mathbb{G}_m^k \times S$ , pour un  $0 \leq k \leq n$ .

**Définition 4.1.** (a) La catégorie  $D_{\text{nc}}^b(\mathbb{A}^n \times S, F)$  est la sous-catégorie pleine de  $D_{\mathbb{C}}^b(\mathbb{A}^n \times S, F)$  des complexes dont les faisceaux de cohomologie sont localement constants sur les strates de la stratification canonique de  $\mathbb{A}^n \times S$ .

(b) La catégorie  $\mathbf{Perv}_{\text{nc}} \mathbb{A}^n \times S$  est la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Perv} \mathbb{A}^n \times S$  des objets qui font partie de  $D_{\text{nc}}^b(\mathbb{A}^n \times S, F)$ .

Ceci est la variante algébrique de la catégorie notée  $\mathbf{Perv}^T(\mathbb{C}^n \times S)$  dans [1, Chapitres III, IV].

Le but de ce travail est la description de la catégorie suivante :

**Définition 4.2.** La catégorie  $\mathbf{MHM}_{\text{nc}} \mathbb{A}^n \times S$  est la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{MHM} \mathbb{A}^n \times S$  des objets  $\mathbb{V}$  tels que  $\text{rat } \mathbb{V} \in \mathbf{Perv}_{\text{nc}} \mathbb{A}^n \times S$ . Les objets de  $\mathbf{MHM}_{\text{nc}} \mathbb{A}^n \times S$  sont appelés *modules de Hodge mixtes à croisements normaux* sur  $\mathbb{A}^n \times S$ .

Pour lier  $\mathbf{MHM}_{\text{nc}} \mathbb{A}^n \times S$  et  $\mathbb{M}[n]_S$ , on se servira des foncteurs des cycles proches  $\psi_{x_i}$ , ainsi que des foncteurs des cycles évanescents

$$\phi_{x_i, 1} : \mathbf{MHM} \mathbb{A}^n \times S \rightarrow \mathbf{MHM} S$$

[6, Section (2.a)], où les  $x_i$  sont les coordonnées de  $\mathbb{A}^n$ . Par définition [6, (2.2.6)], ces foncteurs sont compatibles sous *rat* avec les cycles proches et évanescents sur les faisceaux pervers [8, Sections 3, 4]. Remarquons que  $\psi_{x_i} : \mathbf{MHM} \mathbb{A}^n \times S \rightarrow \mathbf{MHM} S$  se factorise canoniquement à travers l'image inverse de l'immersion  $\mathbb{A}^{n-1} \times \mathbb{G}_m \times S \cong \{x_i \neq 0\} \hookrightarrow \mathbb{A}^n \times S$ . On le considère donc également comme foncteur  $\psi_{x_i} : \mathbf{MHM} \mathbb{A}^{n-1} \times \mathbb{G}_m \times S \rightarrow \mathbf{MHM} S$ .

On imitera maintenant la construction de [1] dans le contexte des modules de Hodge mixtes algébriques, en suivant l'exposition de [6, 3.1]. Définissons le foncteur

$$\Psi^n : \mathbf{MHM}_{\text{nc}} \mathbb{A}^n \times S \longrightarrow \mathbb{M}[n]_S$$

par  $\mathbb{V} \mapsto (\mathbb{V}_I, T_i, \text{can}_i, \text{Var}_i)$ , où  $\mathbb{V}_I := \Psi_{x_1, I} \circ \dots \circ \Psi_{x_n, I}(\mathbb{V})$ , avec  $\Psi_{x_i, I} := \begin{cases} \psi_{x_i}, & \text{if } i \notin I, \\ \phi_{x_i, 1}, & \text{if } i \in I. \end{cases}$  Les morphismes  $T_i, \text{can}_i, \text{Var}_i$  sont ceux qui sont associés à  $\psi_{x_i}$  et  $\phi_{x_i, 1}$  [6, Proposition 2.4]. Vérifions que  $\Psi^n \mathbb{V}$  appartient effectivement à  $\mathbb{M}[n]_S$ . A priori, chaque  $\mathbb{V}_I$  est un objet de  $\mathbf{MHM} S$ , et  $\text{rat } \mathbb{V}_I$  est un système local. D'après [6, Théorème 3.27], on a  $\mathbb{V}_I \in \mathbf{Var} S$ . [6, Proposition 2.4] donne tous les ingrédients et toutes les compatibilités, sauf la quasi-unipotence des  $T_i$ . Cette dernière est alors une conséquence de [6, (2.2.1)].

Ensuite, montrons que le foncteur  $\Psi^n$  ne dépend pas de l'ordre des coordonnées de  $\mathbb{A}^n$ . L'analogie de cet énoncé est vrai pour les faisceaux pervers [6, 3.1]. Par comparaison via le foncteur fidèle  $\text{rat}$ , il suffit de montrer l'indépendance des objets  $\mathbb{V}_I$ , c'est-à-dire de leurs filtrations  $W_\bullet$  et  $F^\bullet$ . Pour cela, on cite la discussion dans [6, 3.24] : la filtration de Hodge  $F^\bullet$  est définie dans [6, (3.18.5)]; cette définition n'utilise pas l'ordre des coordonnées. Pour  $W_\bullet$ , voir la remarque qui suit [6, (3.24.4)].

Voici le résultat principal de ce travail :

**Théorème 4.3.** *Soit  $n \geq 0$ . Le foncteur  $\Psi^n : \mathbf{MHM}_{\text{nc}} \mathbb{A}^n \times S \rightarrow \mathbb{M}[n]_S$  est une équivalence de catégories.*

Pour  $n = 1$ , ceci est à comparer à [8, 2ème proposition de la Section 4]. Le Théorème 4.3 sera démontré simultanément avec une deuxième généralisation du Théorème 2.3 :

**Définition 4.4.** (a) Soit  $\mathbb{V} \in \mathbf{MHM}_{\text{nc}} \mathbb{A}^n \times S$ . Un élément  $T$  de  $\text{Aut}(\text{rat } \mathbb{V})$  est dit *admissible* si  $T$  est quasi-unipotent, si  $T_S \in \text{Aut}(\mathbb{V})$ , et si  $\log T_u \in \text{End}(\text{rat } \mathbb{V})$  est de type  $(-1, -1)$ . Le groupe des automorphismes admissibles de  $\text{rat } \mathbb{V}$  est noté  $\text{Aut}_{\text{adm}}(\text{rat } \mathbb{V})$ .

(b) La catégorie  $(\mathbf{MHM}_{\text{nc}} \mathbb{A}^n \times S, t)$  est celle des paires  $(\mathbb{V}, T)$ , avec  $\mathbb{V} \in \mathbf{MHM}_{\text{nc}} \mathbb{A}^n \times S$  et  $T \in \text{Aut}_{\text{adm}}(\text{rat } \mathbb{V})$ .

Par functorialité, les cycles proches  $\psi_{x_n}$  induisent un foncteur pour lequel on utilisera le même symbole  $\psi_{x_n} : \mathbf{MHM}_{\text{nc}} \mathbb{A}^{n-1} \times \mathbb{G}_m \times S \rightarrow (\mathbf{MHM}_{\text{nc}} \mathbb{A}^{n-1} \times S, t)$ .

**Théorème 4.5.** *Soit  $n \geq 1$ . Le foncteur  $\psi_{x_n} : \mathbf{MHM}_{\text{nc}} \mathbb{A}^{n-1} \times \mathbb{G}_m \times S \rightarrow (\mathbf{MHM}_{\text{nc}} \mathbb{A}^{n-1} \times S, t)$  est une équivalence de catégories.*

Ceci est à comparer à [8, 1ère proposition de la Section 4].

**Démonstration des Théorèmes 4.3 et 4.5.** On procédera par récurrence, en établissant les énoncés  $(4.3)_n$  pour  $n \geq 0$ , et  $(4.5)_n$  pour  $n \geq 1$ . On montrera les implications  $(4.3)_{n-1} \Rightarrow (4.5)_n$ ;  $((4.3)_{n-1}, (4.5)_n) \Rightarrow (4.3)_n$  pour  $n \geq 1$ , simultanément pour tout  $S$ . L'énoncé  $(4.3)_0$  est vrai par définition. Supposons donc que  $\Psi^{n-1}$  est une équivalence pour tout  $S$ . Puisque  $\psi_{x_i}$  et  $\phi_{x_i, 1}$  commutent au foncteur  $\mathbb{V} \mapsto \mathbb{V}(-1)$  [6, (3.8.2)], le foncteur  $\Psi^{n-1}$  respecte la notion d'automorphisme admissible. On obtient donc une équivalence  $\Psi^{n-1}$  entre  $(\mathbf{MHM}_{\text{nc}} \mathbb{A}^{n-1} \times S, t)$  et  $(\mathbb{M}[n-1]_S, t)$ . Il existe un diagramme naturel et commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{MHM}_{\text{nc}} \mathbb{A}^{n-1} \times \mathbb{G}_m \times S & \xrightarrow{\psi_{x_n}} & (\mathbf{MHM}_{\text{nc}} \mathbb{A}^{n-1} \times S, t) \\ \psi^{n-1} \downarrow & & \downarrow \psi^{n-1} \\ \mathbb{M}[n-1]_{\mathbb{G}_m} \times S & \xrightarrow{\psi_x} & (\mathbb{M}[n-1]_S, t) \end{array}$$

Le foncteur  $\psi_x$  étant une équivalence (Théorème 3.3), on obtient une preuve de  $(4.5)_n$ .

Pour construire un quasi-inverse  $(\Psi^n)^{-1} : \mathbb{M}[n]_S \rightarrow \mathbf{MHM}_{\text{nc}} \mathbb{A}^n \times S$  à partir de  $\psi_{x_n}^{-1}$  et de  $(\Psi^{n-1})^{-1}$ , rappelons que d'après la Proposition 3.5, les catégories  $\mathbb{M}[n]_S$  et  $\mathbb{M}[n-1]_S^{(2)}$  sont équivalentes via  $\mathcal{M} \mapsto (\psi_n \mathcal{M}, \phi_n \mathcal{M}, T, \text{can}, \text{Var})$ . En appliquant  $(\Psi^{n-1})^{-1}$  à  $\psi_n \mathcal{M}$  et à  $\phi_n \mathcal{M}$ , on obtient  $\mathbb{V}', \mathbb{V}'' \in \mathbf{MHM}_{\text{nc}} \mathbb{A}^{n-1} \times S$ ,  $T \in \text{Aut}_{\text{adm}}(\text{rat } \mathbb{V}')$ ,  $\text{can} : (\mathbb{V}')^0 \rightarrow \mathbb{V}''$ ,  $\text{Var} : \mathbb{V}'' \rightarrow (\mathbb{V}')^0(-1)$ , tels que  $\text{Var} \circ \text{can} = \log(T_u, (\mathbb{V}')^0) \otimes (2\pi i)^{-1}$ .

On applique  $\psi_{x_n}^{-1}$  à  $(\mathbb{V}', T) \in (\mathbf{MHM}_{\text{nc}} \mathbb{A}^{n-1} \times S, t)$ , pour obtenir  $\tilde{\mathbb{V}} \in \mathbf{MHM}_{\text{nc}} \mathbb{A}^{n-1} \times \mathbb{G}_m \times S$ , ainsi que des morphismes  $\text{can} : \psi_{x_n,1} \tilde{\mathbb{V}} = (\psi_{x_n} \tilde{\mathbb{V}})^0 \rightarrow \mathbb{V}'$ ,  $\text{Var} : \mathbb{V}' \rightarrow \psi_{x_n,1} \tilde{\mathbb{V}}(-1)$ , tels que  $\text{Var} \circ \text{can} = \log(T_u, \psi_{x_n,1} \tilde{\mathbb{V}}) \otimes (2\pi i)^{-1}$ . D'après [6, Proposition 2.28], ces données déterminent un objet  $\mathbb{V}$  de  $\mathbf{MHM} \mathbb{A}^n \times S$ , avec  $\tilde{\mathbb{V}} = j^* \mathbb{V}$  et  $\mathbb{V}' = \phi_{x_n,1} \mathbb{V}$  ( $j :=$  l'immersion de  $\mathbb{A}^{n-1} \times \mathbb{G}_m \times S$  dans  $\mathbb{A}^n \times S$ ). On pose  $(\Psi^n)^{-1} \mathcal{M} := \mathbb{V}$ . Cet objet appartient à  $\mathbf{MHM}_{\text{nc}} \mathbb{A}^n \times S$ , et il a toutes les propriétés souhaitées.  $\square$

**Définition 4.6.** La catégorie  $\mathbf{MHM}_{\text{nc}}^0 \mathbb{A}^n \times S$  est la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{MHM}_{\text{nc}} \mathbb{A}^n \times S$  des objets qui sont envoyés vers  $\mathbb{M}[n]_S^0$  par  $\Psi^n$ . Les objets de  $\mathbf{MHM}_{\text{nc}}^0 \mathbb{A}^n \times S$  sont appelés *modules de Hodge mixtes à croisements normaux unipotents* sur  $\mathbb{A}^n \times S$ .

**Corollaire 4.7.** Soit  $n \geq 0$ . Le foncteur  $\Psi^n$  induit une équivalence  $\mathbf{MHM}_{\text{nc}}^0 \mathbb{A}^n \times S \cong \mathbb{M}[n]_S^0$ .

La description 4.3 de la catégorie  $\mathbf{MHM}_{\text{nc}} \mathbb{A}^n \times S$  permet d'étudier quelques-uns des foncteurs de Saito associés à la stratification canonique de  $\mathbb{A}^n \times S$  (tels que les images inverses et directes associées aux immersions des strates). Voici l'observation clé ; elle résulte directement de la construction :

**Proposition 4.8.** Il existe des diagrammes naturels et commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{MHM}_{\text{nc}} \mathbb{A}^n \times S & \xrightarrow{\psi_{x_n}} & (\mathbf{MHM}_{\text{nc}} \mathbb{A}^{n-1} \times S, t) \\ \psi^n \downarrow & & \downarrow \psi^{n-1} \\ \mathbb{M}[n]_S & \xrightarrow{\psi_n} & (\mathbb{M}[n-1]_S, t) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{MHM}_{\text{nc}} \mathbb{A}^n \times S & \xrightarrow{\phi_{x_n,1}} & \mathbf{MHM}_{\text{nc}} \mathbb{A}^{n-1} \times S \\ \psi^n \downarrow & & \downarrow \psi^{n-1} \\ \mathbb{M}[n]_S & \xrightarrow{\phi_n} & \mathbb{M}[n-1]_S \end{array}$$

Avec ces identifications, les transformations naturelles  $\text{can}_n$  et  $\text{Var}_n$  entre  $\psi_{x_n,1}$  et  $\phi_{x_n,1}$  correspondent aux transformations naturelles  $\text{can}$  et  $\text{Var}$  entre  $\psi_n^0$  et  $\phi_n$  de 3.5.

**Remerciements**

L'auteur est heureux de remercier A. Abbès, W. Messing, B.C. Ngo et H. Padiou pour d'utiles discussions, ainsi que le rapporteur pour ses observations concernant la première version de ce texte.

**Références**

[1] A. Galligo, M. Granger, P. Maisonobe,  $\mathcal{D}$ -modules et faisceaux pervers dont le support singulier est un croisement normal, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 35 (1985) 1–48.  
 [2] R.M. Hain, S. Zucker, Unipotent variations of mixed Hodge structure, Invent. Math. 88 (1987) 83–124.  
 [3] M. Kashiwara, A study of variation of mixed Hodge structure, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 22 (1986) 991–1024.  
 [4] R. Pink, J. Wildeshaus, Automorphic sheaves, en préparation.  
 [5] M. Saito, Modules de Hodge polarisables, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 24 (1988) 849–995.  
 [6] M. Saito, Mixed Hodge modules, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 26 (1990) 221–333.  
 [7] J.-L. Verdier, Spécialisation de faisceaux et monodromie modérée, in : B. Teissier, J.-L. Verdier (Eds.), Analyse et topologie sur les espaces singuliers (II–III), in : Astérisque, Vol. 101–102, Soc. Math. France, 1982, pp. 332–364.  
 [8] J.-L. Verdier, Extension of a perverse sheaf over a closed subspace, in : A. Galligo, M. Granger, P. Maisonobe (Eds.), Systèmes différentiels et singularités, in : Astérisque, Vol. 130, Soc. Math. France, 1985, pp. 210–217.  
 [9] J. Wildeshaus, Mixed structures on fundamental groups, in: Realizations of Polylogarithms, in: Lecture Notes in Math., Vol. 1650, Springer-Verlag, 1997, pp. 23–76.