Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 393–396
Comptes Rendus Mathematique

Équations aux dérivées partielles

Estimation de la constante de Bernoulli dans le problème intérieur à frontière libre pour le p-laplacien

Idrissa Ly [a,b], Diaraf Seck [b]

[a] *Laboratoire d'analyse numérique et d'informatique, Université Gaston Berger, BP 234, Saint-Louis, Sénégal*
[b] *Faculté des sciences economiques et de gestion, Université Cheikh Anta Diop, BP 5683, Dakar, Sénégal*

Reçu le 30 octobre 2002 ; accepté après révision le 1er juillet 2003

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

Dans ce travail, considérant l'opérateur p-Laplace, nous établissons tout d'abord un résultat d'existence et de régularité d'un problème d'optimisation de forme. A partir d'un résultat de monotonie, nous montrons l'existence d'une solution d'un problème intérieur à frontière libre pour une famille de constantes de Bernoulli. Et nous donnons une estimation optimale de la borne supérieure pour la constante de Bernoulli. ***Pour citer cet article : I. Ly, D. Seck, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

Estimation of the Bernoulli constant in the interior problem with a free surface for the p-Laplacian. In this Note, considering the p-Laplacian operator, we first establish an existence and regularity result for an optimisation problem of form. From a monotony result we show the existence of a solution to the interior problem with a free surface for a family of Bernoulli constants; we also give an optimal estimation for the upper bound for the Bernoulli constant. ***To cite this article: I. Ly, D. Seck, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***
© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

Dans cette Note nous étudions d'une part le problème suivant : trouver un domaine Ω et une fonction u_Ω tels que

$$-\Delta_p u_\Omega = 0 \quad \text{dans } K \setminus \overline{\Omega}, 1 < p < \infty, \quad u_\Omega = 1 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad u_\Omega = 0 \quad \text{sur } \partial K, \quad \frac{\partial u_\Omega}{\partial \nu} = c \quad \text{sur } \partial\Omega, \tag{1}$$

où c est une constante strictement positive, ν est la normale intérieure à Ω et K un domaine borné de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^N$ contenant Ω.

Adresses e-mail : ndirkaly@ugb.sn (I. Ly), dseck@ucad.sn (D. Seck).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2003.07.004

En fait dans [1], en considèrant le laplacien, Flucher et Rumpf ont posé le problème suivant : soient K un domaine borné connexe et K^* une boule tels que $\mathrm{vol}(K) = \mathrm{vol}(K^*)$. Soit c_K (respectivement c_{K^*}) la plus petite constante pour laquelle (1) admet une solution en considérant K(respectivement K^*). A-t-on $c_K \geqslant c_{K^*}$?

Dans [2] en considèrant le p-laplacien, Henrot et Shahgholian ont étudié la question mais n'ont pas répondu à la question posée M. Flucher et M. Rumpf. En combinant une approche variationnelle et une méthode séquentielle, nous établissons un résultat d'existence de domaine non nécessairement convexe. Nous terminons par une comparaison entre c_K et c_{K^*}.

2. Résultat principal

Soient K^* une boule de centre l'origine et de rayon R_1, K un domaine borné, étoilé par rapport à l'origine et de classe $\mathcal{C}^2$. On définit le réel $\alpha(R_K, p, N)$ par :

$$\alpha(R_K, p, N) := \frac{e}{R_K} \quad \text{si } p = N,$$
$$\alpha(R_K, p, N) := \frac{|(p-N)/(p-1)|}{|((p-1)/(N-1))^{(N-1)/N-p)} - ((p-1)/(N-1))^{(p-1)/(N-p)}|}\frac{1}{R_K} \quad \text{si } p \neq N,$$

où $R_K = \sup\{R > 0 : B(o, R) \subset K\}$.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble défini par $\mathcal{E} := \{c_K\colon \mathrm{vol}(K) = \mathrm{vol}(K^*)\}$, où c_K est la plus petite valeur telle que le problème (1) admet une solution.

Théorème 2.1. *Si Ω, solution du problème d'optimisation de forme* $\min\{J(w),\ w \in \mathcal{O}_\epsilon\}$ *est de classe $\mathcal{C}^2$ alors pour toute constante c vérifiant* : $c \geqslant \alpha(R_K, p, N)$, *$\Omega$ est l'unique solution classique du problème à frontière libre* (1). *De plus* :

(i) *La constante c_K vérifie* $0 < c_K \leqslant \alpha(R_K, p, N)$.
(ii) *En remplaçant K par K^*, la constante c_{K^*} qui est la plus petite valeur telle que le problème* (1) *admet une solution, vérifie* : $c_{K^*} = \alpha(R_1, p, N)$ *et* $0 < c_{K^*} \leqslant \alpha(R_K, p, N)$.
On a aussi $\alpha(R_K, p, N) = \max \mathcal{E}$.

3. Résultats auxiliaires

Proposition 3.1. *Le problème* : « *trouver Ω appartenant à $\mathcal{O}_\epsilon$ tel que* $J(\Omega) = \min\{J(w),\ w \in \mathcal{O}_\epsilon\}$ » *possède une solution.*

Pour la définition de la fonctionnelle de forme cf. [3]. Dans toute la suite, on supposera que Ω est de classe $\mathcal{C}^2$ pour pouvoir dériver aisément par rapport au domaine.

Proposition 3.2. *Si Ω est solution du problème d'optimisation de forme* $\min\{J(w),\ w \in \mathcal{O}_\epsilon\}$ *alors il existe $\lambda_\Omega > 0$ tel que $\partial u/\partial \nu = (\frac{p}{p-1}\lambda_\Omega)^{1/p}$ sur $\partial\Omega$.*

On a le résultat de monotonie qui se démontre par le principe du maximum cf. [4].

Proposition 3.3. *On suppose que K est étoilé par rapport à l'origine. Soient Ω_1 et Ω_2 deux domaines distincts étoilés par rapport à l'origine solutions du problème d'optimisation de forme* $\{J(w),\ w \in \mathcal{O}_\epsilon\}$ *tels que $\Omega_1 \subset \Omega_2$ et $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \neq \emptyset$. Alors l'application qui à Ω associe λ_Ω est décroissante c'est à dire que $\lambda_{\Omega_1} \geqslant \lambda_{\Omega_2}$.*

Preuve du théorème principal 2.1. Soit $r > 0$ tel que $B(o, r) \subset B(o, R_K)$. On cherche d'abord une solution u_0 du problème :

$$-\Delta_p u = 0 \quad \text{dans } B_{R_K} \setminus B_r, \qquad u = 0 \quad \text{sur } \partial B_{R_K}, \qquad u = 1 \quad \text{sur } \partial B_r \tag{2}$$

u_0 est déterminé explicitement par

$$u_0(x) = \frac{\ln\|x\| - \ln R_K}{\ln r - \ln R_K} \quad \text{si } p = N, \qquad u_0(x) = \frac{-\|x\|^{(p-N)/(p-1)} + R_K^{(p-N)/(p-1)}}{R_K^{(p-N)/(p-1)} - r^{(p-N)/(p-1)}} \quad \text{si } p \neq N. \tag{3}$$

Soit c une constante strictement positive. On a $\|\nabla u_0\| > c$ sur ∂B_r pour r suffisamment petit. Soit u_r la solution du problème aux limites suivant :

$$-\Delta_p u = 0 \quad \text{dans } K \setminus B_r, \qquad u = 1 \quad \text{sur } \partial B_r, \qquad u = 0 \quad \text{sur } \partial K. \tag{4}$$

Par le principe de comparaison cf. [4], on a $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$ et $0 \leqslant u_r \leqslant 1$. Sur $\partial(B_{R_K} \setminus B_r)$, on a $u_r \geqslant u_0$ et d'après [4], on a $u_r \geqslant u_0$ dans $B_{R_K} \setminus B_r$, d'où $\|\nabla u_r\| \leqslant \|\nabla u_0\|$ sur ∂B_r.

3.1. *Cas où $p = N$*

$\|\nabla u_0\|_{|\partial B_r} = \frac{1}{r(\ln R_K - \ln r)} = g(r)$, $\forall r \in]0, R_K[$, $g(r)$ est décroissante strictement sur $]0, R_K/e[$ et strictement croissante sur $]R_K/e, R_K[$ donc $\forall r \in]0, R_K[: \|\nabla u_0\|_{|\partial B_r} \geqslant g(R_K/e) = e/R_K$.

(1) Pour $c = e/R_K$, soit $\delta > 0$ fixé aussi petit que l'on veut. Pour initialiser on prend $r_0 \in]0, R_K/e[\cup]R_K/e, R_K[$ tel que $|\|\nabla u_0\|_{|\partial B_{r_0}} - c| > \delta$.

Pour fixer les idées faisons le raisonnement en considèrant $r_0 \in]0, R_K/e[$. Pour le cas de $r_0 \in]R_K/e, R_K[$, la démarche sera identique.

En faisant varier r dans le sens croissant, on arrivera à une étape qu'on note par n telle que

$$r_n \in \left]0, \frac{R_K}{e}\right[\quad \text{et } \left|\|\nabla u_0\|_{|\partial B_{r_n}} - c\right| < \delta.$$

Posons

$$\mathcal{O}_n = \left\{w,\ w \in \mathcal{O}_\epsilon,\ B_{r_n} \subset w,\ \partial B_{r_n} \cap \partial w \neq \emptyset,\ \text{et } \operatorname{vol}(w) = V_0\right\},$$

où V_0 est une constante strictement positive, fixée. On cherche $\Omega \in \mathcal{O}_n$ tel que

$$\begin{aligned} &-\Delta_p u = 0 \quad \text{dans } K \setminus \overline{\Omega}, \qquad u = 1 \quad \text{sur } \partial\Omega; \qquad u = 0 \quad \text{sur } \partial K, \\ &\frac{\partial u}{\partial \nu} = \left(\frac{p}{p-1}\lambda_\Omega\right)^{1/p} = c_\Omega \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{5}$$

Le problème (5) admet une solution. On a $\Omega \in \mathcal{O}_n$ donc $B_{r_n} \subset \Omega$ et $\partial B_{r_n} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$. u_{r_n} vérifie

$$-\Delta_p u_{r_n} = 0 \quad \text{dans } K \setminus B_{r_n}, \qquad u_{r_n} = 1 \quad \text{sur } \partial B_{r_n}, \qquad u_{r_n} = 0 \quad \text{sur } \partial K. \tag{6}$$

Par le principe de comparaison [4], on a $0 \leqslant u_{r_n} \leqslant 1$ et $0 \leqslant u \leqslant 1$. Sur $\partial(K \setminus B_{r_n})$, on a $u_{r_n} \leqslant u$. Comme $\partial\Omega \cap \partial B_{r_n} \neq \emptyset$, soit $x_0 \in \partial\Omega \cap \partial B_{r_n}$, on a $\frac{\partial u_{r_n}}{\partial \nu}(x_0) \geqslant \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = c_\Omega$. Posons $\Omega = \Omega_0$. On itére en cherchant $\Omega_1 \in \mathcal{O}_n^1$ tel que

$$\begin{aligned} &-\Delta_p u_1 = 0 \quad \text{dans } K \setminus \overline{\Omega}_1, \qquad u_1 = 1 \quad \text{sur } \partial\Omega_1, \qquad u_1 = 0 \quad \text{sur } \partial K, \\ &\frac{\partial u_1}{\partial \nu} = \left(\frac{p}{p-1}\lambda_{\Omega_1}\right)^{1/p} = c_{\Omega_1} \quad \text{sur } \partial\Omega_1. \end{aligned} \tag{7}$$

$\mathcal{O}_n^1 = \{w,\ w \in \mathcal{O}_\epsilon,\ \Omega_0 \subset w \subset B_{\Gamma_n}$, et $\partial w \cap \partial B_{r_n} \neq \emptyset,\ \operatorname{vol}(w) = V_1\}$, V_1 est une constante strictement positive ($V_0 < V_1$).

Par le même raisonnement que ci-dessus, on conclut $\frac{\partial u_{r_n}}{\partial \nu}(x_1) \geqslant \frac{\partial u_1}{\partial \nu}(x_1) = c_{\Omega_1}$ où $x_1 \in \partial\Omega_1 \cap \partial B_{r_n}$.

On continue le même principe jusqu' à un rang k que l'on determinera. Donc on a $c_{\Omega_0} \geqslant c_{\Omega_1} \geqslant c_{\Omega_2} \geqslant \cdots \geqslant c_{\Omega_k}$.

Comme sur ∂B_{r_n} on a $\|\nabla u_{r_n}\| \leqslant \|\nabla u_0\|$, k est choisi de telle sorte que : en un point $s_0 \in \partial B_{r_n}$, on ait $c_{\Omega_k} \leqslant \frac{\partial u_0}{\partial \nu}(s_0) \leqslant c_{\Omega_{k-1}}$. Donc

$$c_{\Omega_k} - \frac{e}{R_K} \leqslant \frac{\partial u_0}{\partial \nu}(s_0) - \frac{e}{R_K} \leqslant c_{\Omega_{k-1}} - \frac{e}{R_K}.$$

La suite $(c_{\Omega_j})_{(0\leqslant j\leqslant k)}$ est décroissante et minorée, donc elle est convergente, soit l sa limite. On a à la limite $l = e/R_K$ et il existe Ω solution du problème (1) et la suite $(\Omega_j)_{(0\leqslant j\leqslant k)}$ donne une bonne approximation de Ω. L'unicité de Ω est assurée par le résultat de monotonie.

(2) Pour $c > e/R_K$ et $r \in]0, R_K/e[\cup]R_K/e, R_K[$. Par le même raisonnement que précédemment, on arrive à montrer que le problème (1) admet une unique solution.

3.2. *Cas où $p \neq N$*

Là aussi le raisonnement est identique au cas $p = N$. Prouvons à présent les assertions (i) et (ii) du Théorème 2.1. D'après ce qui précède, $0 < c_K \leqslant \alpha(R_K, p, N)$. Si K est une boule de rayon R, par un calcul explicite $c_K = \alpha(R, p, N)$ et pour tout $0 < c < c_K$ le problème (1) n'admet pas de solution. Pour ce qui est du (ii), soient $K^* = B(o, R_1)$ et $K \subset \mathbb{R}^N$ étoilé par rapport à l'origine o tel que $\mathrm{vol}(K) = \mathrm{vol}(K^*)$. Alors

$$R_K \leqslant R_1 \quad \text{et donc} \quad \alpha(R_1, p, N) \leqslant \alpha(R_K, p, N), \quad c_{K^*} = \alpha(R_1, p, N).$$

La suite $(\alpha(R_K, p, N))_K$ est minorée par c_{K^*} et est décroissante dans le sens : pour tout K, K' : $\mathrm{vol}(K) = \mathrm{vol}(K^*) = \mathrm{vol}(K')$ si $R_K \leqslant R'_K$ alors $\alpha(R_{K'}, p, N) \leqslant \alpha(R_K, p, N)$ donc la suite $\alpha(R_K, p, N)$ converge vers c_{K^*}. $\square$

Références

[1] M. Flucher, M. Rumpf, Bernoulli's free boundary problem, qualitative theory and numerical approximation, J. Reine Angew. Math. 486 (1997) 165–204.
[2] A. Henrot, H. Shahgholian, Existence of classical solutions to a free boundary problem for the p-Laplace operator II: the interior convex case, Indiana Univ. Math. J. 49 (1) (2000) 301–323.
[3] I. Ly, D. Seck, Etude d'un problème à frontière libre pour le p-laplacien, C. R. Acad. Sci., Paris Ser. I 332 (2001) 899–902.
[4] P. Tolksdorf, On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domains with conical boundary points, Comm. Partial Differential Equations 8 (1983) 773–817.