Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 39, 2006, p. 177 à 195.

QUASI-MORPHISMES ET INVARIANT DE CALABI

PAR PIERRE PY

RÉSUMÉ. – Dans ce texte, nous donnons deux constructions élémentaires de quasi-morphismes homogènes définis sur le groupe des difféomorphismes hamiltoniens d'une variété symplectique connexe fermée (ou sur son revêtement universel). Le premier quasi-morphisme, noté $\mathfrak{Cal}_S$, est défini sur le groupe des difféomorphismes hamiltoniens d'une surface fermée orientée de genre supérieur ou égal à 2. Cette construction est motivée par une question de M. Entov et L. Polterovich [M. Entov, L. Polterovich, Calabi quasimorphism and quantum homology, *Int. Math. Res. Not*. 30 (2003) 1635–1676]. Si $U \subset S$ est un disque ou un anneau, la restriction de $\mathfrak{Cal}_S$ au groupe des difféomorphismes qui sont le temps 1 d'une isotopie hamiltonienne dans U est égale au morphisme de Calabi. Le second quasi-morphisme est défini sur le revêtement universel du groupe des difféomorphismes hamiltoniens d'une variété symplectique pour laquelle la classe de cohomologie de la forme symplectique est un multiple de la première classe de Chern.

ABSTRACT. – In this paper, we give two elementary constructions of homogeneous quasi-morphisms defined on the group of Hamiltonian diffeomorphisms of certain closed connected symplectic manifolds (or on its universal cover). The first quasi-morphism, denoted by $\mathfrak{Cal}_S$, is defined on the group of Hamiltonian diffeomorphisms of a closed oriented surface S of genus greater than 1. This construction is motivated by a question of M. Entov and L. Polterovich [M. Entov, L. Polterovich, Calabi quasimorphism and quantum homology, *Int. Math. Res. Not*. 30 (2003) 1635–1676]. If $U \subset S$ is a disk or an annulus, the restriction of $\mathfrak{Cal}_S$ to the subgroup of diffeomorphisms which are the time one map of a Hamiltonian isotopy in U equals Calabi's homomorphism. The second quasi-morphism is defined on the universal cover of the group of Hamiltonian diffeomorphisms of a symplectic manifold for which the cohomology class of the symplectic form is a multiple of the first Chern class.

1. Introduction

Un *quasi-morphisme* sur un groupe Γ est une fonction $\phi : \Gamma \to \mathbb{R}$ telle que les quantités

$$\phi(xy) - \phi(x) - \phi(y)$$

soient bornées lorsque x, y décrivent Γ. Un quasi-morphisme est *homogène* s'il satisfait en outre $\phi(x^n) = n\phi(x)$ pour $x \in \Gamma$ et $n \in \mathbb{Z}$. On pourra consulter (par exemple) [6,8] pour une introduction à ce sujet. Nous noterons $QM_h(\Gamma, \mathbb{R})$ l'espace des quasi-morphismes homogènes sur le groupe Γ.

Si (V, ω) est une variété symplectique connexe fermée, le groupe $\mathrm{Ham}(V, \omega)$ de ses difféomorphismes hamiltoniens est simple d'après un théorème de A. Banyaga [4]. Il n'admet donc pas de morphisme non-trivial vers $\mathbb{R}$. Si (V, ω) est une variété symplectique connexe ouverte, sur laquelle ω est exacte, E. Calabi a introduit dans [9] un morphisme

$$\mathfrak{Cal}_V : \mathrm{Ham}(V,\omega) \to \mathbb{R}.$$

Le noyau de ce morphisme est simple d'après un autre théorème de Banyaga [4]. Si λ est une primitive de ω sur V et (f_t) une isotopie hamiltonienne issue de l'identité dans V, engendrée par le champ de vecteurs Z_t, on a :

$$\mathfrak{Cal}_V(f_1) = \int_V \int_0^1 \lambda(Z_t)\, dt\, \omega^n.$$

Cette quantité est aussi égale à

$$n \int_V \int_0^1 H_t\, dt\, \omega^n,$$

où $2n$ est la dimension de V, et H_t est une primitive à support compact de la 1-forme $\iota_{Z_t}\omega$.

Supposons maintenant que (V,ω) soit fermée. À chaque ouvert connexe $U \subset V$, on associe le sous-groupe Γ_U de $\mathrm{Ham}(V,\omega)$ formé des difféomorphismes qui sont le temps 1 d'une isotopie hamiltonienne dans U. Si ω est exacte sur U, on dispose alors du morphisme de Calabi : $\mathfrak{Cal}_U : \Gamma_U \to \mathbb{R}$. On notera $\mathcal{D}$ la famille des ouverts connexes U de V tels que ω soit exacte sur U et tels qu'il existe $f \in \mathrm{Ham}(V,\omega)$ avec $f(U) \cap \overline{U} = \emptyset$. Dans [13], M. Entov et L. Polterovich posent la question suivante :

Peut-on construire un quasi-morphisme homogène $\phi : \mathrm{Ham}(V,\omega) \to \mathbb{R}$ *dont les restrictions aux sous-groupes* $(\Gamma_U)_{U\in\mathcal{D}}$ *soient égales aux morphismes de Calabi* $(\mathfrak{Cal}_U)_{U\in\mathcal{D}}$?

Plus généralement, peut-on construire un tel quasi-morphisme sur le revêtement universel $\widetilde{\mathrm{Ham}}(V,\omega)$ du groupe des difféomorphismes hamiltoniens ? Dans [13] (voir aussi [7]), ils répondent positivement à cette question pour une certaine classe de variétés symplectiques, qui inclut notamment les espaces projectifs complexes, en particulier la sphère S^2. Leur méthode utilise des outils sophistiqués de topologie symplectique.

Dans l'esprit de constructions précédentes de J.-M. Gambaudo et É. Ghys, nous construisons un quasi-morphisme ayant une propriété comparable à celle énoncée dans la question ci-dessus, sur le groupe des difféomorphismes hamiltoniens d'une surface de genre supérieur ou égal à 2. Dans [14], on pourra trouver de nombreuses constructions de quasi-morphismes sur les groupes $\mathrm{Ham}(S,\omega)$, pour toute surface fermée orientée (les quasi-morphismes de Gambaudo et Ghys sont en fait définis sur le groupe $\mathrm{Symp}_0(S,\omega)$). Cependant les restrictions de ces quasi-morphismes aux sous-groupes (Γ_U) ne sont pas des homomorphismes. Les constructions de Gambaudo et Ghys peuvent être vues comme de possibles généralisations du nombre de translation τ sur le groupe $\widetilde{\mathrm{Hom\acute{e}o}}_+(S^1)$ des homéomorphismes croissants de la droite réelle qui commutent aux translations entières. Elles sont dans l'esprit de constructions précédentes par V.I. Arnold [2], D. Ruelle [23], S. Schwartzman [24].

THÉORÈME 1. – *Soit* S *une surface fermée orientée de genre supérieur ou égal à* 2, *munie d'une forme symplectique* ω. *Il existe un quasi-morphisme homogène*

$$\mathfrak{Cal}_S : \mathrm{Ham}(S,\omega) \to \mathbb{R},$$

dont la restriction aux sous-groupes Γ_U est égale au morphisme de Calabi, dès que U est difféomorphe à un disque ou à un anneau, et qui est invariant par conjugaison par tout difféomorphisme symplectique.

En utilisant des constructions de Gambaudo et Ghys, on peut renforcer cet énoncé de la manière suivante :

> *l'espace (affine) des quasi-morphismes homogènes sur* $\mathrm{Ham}(S,\omega)$ *ayant la première propriété du théorème 1 est de dimension infinie.*

Cela résultera simplement du fait que l'espace des quasi-morphismes homogènes sur $\mathrm{Ham}(S,\omega)$ dont les restrictions aux groupes Γ_U (où U est difféomorphe à un disque ou à un anneau) sont nulles, est un espace de dimension infinie. Remarquons également que la nature de ce quasi-morphisme est certainement très différente de celle du quasi-morphisme construit par Entov et Polterovich dans [13]. En effet, parmi les deux conditions qui définissent la famille d'ouverts $\mathcal{D}$, la première est vide en dimension 2, en revanche la seconde n'apparaît pas du tout dans notre travail. Il existe d'ailleurs des disques (ou des anneaux) ne la satisfaisant pas. Notons enfin que la méthode utilisée par Entov et Polterovich ne s'applique pas aux variétés symplectiques (V,ω) pour lesquelles la classe $[\omega]$ est nulle évaluée sur le groupe $\pi_2(V)$.

L'énoncé du théorème suivant est inspiré du théorème 5.2 de [13], où un calcul similaire est fait sur le groupe $\mathrm{Ham}(S^2,\omega)$. Notre méthode est cependant différente. Considérons donc une fonction de Morse $F:S\to\mathbb{R}$, dont les valeurs critiques sont toutes distinctes. Notons $x_1,\dots,x_l$, ses points critiques, $\lambda_j=F(x_j)$ ses valeurs critiques, avec $\lambda_1<\cdots<\lambda_l$. On a classiquement :

$$\sum_{j=1}^{l}(-1)^{\mathrm{ind}x_j}=2-2g,$$

où g est le genre de S. Considérons l'espace

$$\mathcal{F}=\bigl\{H:S\to\mathbb{R},\ C^\infty,\ \omega(X_H,X_F)=0\bigr\},$$

des fonctions sur la surface S qui commutent avec F au sens de Poisson (X_G désigne le gradient symplectique d'une fonction G). L'ensemble

$$\Gamma=\bigl\{\varphi_H^1,\ H\in\mathcal{F}\bigr\}$$

est un sous-groupe abélien de $\mathrm{Ham}(S,\omega)$ (où φ_H^t désigne le flot de X_H). La restriction de $\mathfrak{Cal}_S$ à Γ est donc un homomorphisme, que nous calculons dans le théorème suivant. La donnée de la fonction F permet de construire un graphe fini $\mathcal{G}$ appelé graphe de Reeb [22], de la manière suivante. Parmi les composantes connexes des niveaux de F, on trouve :

(1) les points critiques de F d'indice 0 ou 2,
(2) des courbes simples plongées,
(3) des courbes immergées ayant un unique point double (correspondant à un point critique d'indice 1 de F).

À chaque composante de type 1 ou 3 on associe un sommet de $\mathcal{G}$. Notons K la réunion des composantes de type 1 ou 3. L'ouvert $S\setminus K$ est une réunion finie de cylindres difféomorphes à $S^1\times\mathbb{R}$. À chaque cylindre C on associe une arête dont les extrémités sont les sommets associés aux composantes de niveaux de F qui contiennent ∂C. Nous avons une application naturelle $p_{\mathcal{G}}:S\to\mathcal{G}$, et, si $H\in\mathcal{F}$, on peut écrire $H=H_{\mathcal{G}}\circ p_{\mathcal{G}}$, où $H_{\mathcal{G}}$ est définie sur $\mathcal{G}$.

Nous pouvons *élaguer* le graphe $\mathcal{G}$ pour obtenir un graphe $\mathcal{G}'$, de la manière suivante. Le graphe $\mathcal{G}$ possède des sommets de degré 1 ou 3. Si v est un sommet de degré 1 de $\mathcal{G}$, nous retirons v ainsi que l'arête à laquelle il était relié, pour obtenir un nouveau graphe. Ce faisant, nous créons un sommet de degré 2 (ou de degré 1, à partir de la seconde itération de ce procédé). Répétons ce procédé jusqu'à obtenir un graphe $\mathcal{G}'$ qui ne possède plus que des sommets de degré 2 ou 3. Les sommets de degré 3 de $\mathcal{G}'$ sont en nombre $2g-2$. En effet la quantité

$$\sum_v 2 - \text{degré}(v),$$

où la somme porte sur tous les sommets de $\mathcal{G}$, est égale à la caractéristique d'Euler de la surface, et reste constante au cours de l'élagage. On note $\mathcal{V}$ l'ensemble de ces $2g-2$ sommets. Nous supposons dans le théorème suivant que l'aire totale de la forme ω est égale à $2g-2$.

THÉORÈME 2. – *Si H est dans $\mathcal{F}$, nous avons* :

$$\mathfrak{Cal}_S(\varphi_H^1) = \int_S H\omega - \sum_{v\in\mathcal{V}} H_{\mathcal{G}}(v).$$

Dans la dernière partie, nous proposons une construction élémentaire d'un quasi-morphisme homogène défini sur le revêtement universel du groupe des difféomorphismes hamiltoniens d'une variété symplectique connexe fermée (V,ω) pour laquelle $[\omega] = rc_1(V)$. Ici, $[\omega]$ désigne la classe de cohomologie de la forme symplectique et $c_1(V)$ la première classe de Chern de V. Pour les besoins de la cause, nous écrivons notre hypothèse sous la forme :

$$s[\omega] = 2c_1(V),$$

où s est un réel non-nul. Nous calculons la restriction de ce quasi-morphisme sur les isotopies hamiltoniennes supportées dans une boule ; son expression fait alors intervenir un quasi-morphisme $\tau_{B,\omega}$ introduit par J. Barge et É. Ghys, dont la construction est rappelée dans le texte. Si (f_t) est une isotopie hamiltonienne dans V, on note $\{f_t\}$ l'élément du revêtement universel du groupe $\mathrm{Ham}(V,\omega)$ qu'elle définit.

THÉORÈME 3. – *Si (V,ω) vérifie l'hypothèse ci-dessus, il existe un quasi-morphisme homogène*

$$\mathfrak{S} : \widetilde{\mathrm{Ham}}(V,\omega) \to \mathbb{R},$$

tel que, pour toute isotopie hamiltonienne $\{f_t\}$ supportée dans une boule B, on ait :

$$\mathfrak{S}(\{f_t\}) = \tau_{B,\omega}(f_1) + s\mathfrak{Cal}_B(f_1).$$

Soulignons que les quasi-morphismes construits par Entov et Polterovich dans [13] ont la propriété supplémentaire suivante : ils sont continus par rapport à la *distance de Hofer* sur le groupe des difféomorphismes hamiltoniens. Il serait intéressant de savoir si les quasi-morphismes construits dans cet article possèdent également cette propriété.

Le texte est organisé comme suit. Dans la seconde partie, nous prouvons les théorèmes 1 et 2, après avoir rappelé des résultats de Banyaga. Dans la troisième partie, nous rappelons des constructions de Barge et Ghys, puis nous prouvons le théorème 3. Exception faite des résultats mentionnés dans le paragraphe 2.1, qui sont utilisés dans la troisième partie, les parties 2 et 3 sont indépendantes.

Une annonce des théorèmes 1 et 2 est contenue dans [21].

2. Surfaces de genre supérieur

2.1. Extension du groupe des difféomorphismes hamiltoniens

Les résultats de ce paragraphe sont dus à Banyaga [3] ; nous les rappelons succinctement.

Considérons une variété (fermée, connexe) M munie d'une forme de contact α dont le champ de Reeb X est induit par une action libre du cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. La variété V, quotient de M par l'action du cercle, porte une forme symplectique ω telle que $\pi^*\omega = d\alpha$, où $\pi : M \to V$ est la projection canonique.

Dans cette situation nous avons une extension centrale par $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ du groupe des difféomorphismes hamiltoniens de V. Décrivons d'abord cette extension au niveau des algèbres de Lie de champs de vecteurs. Un élément Y de l'algèbre $\mathcal{L}_\alpha(M)$ des champs de vecteurs sur M qui préservent α est invariant par l'action du cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, il définit un champ de vecteurs hamiltonien π_*Y sur V. L'algèbre $\mathcal{L}_\alpha(M)$ est donc une extension centrale par $\mathbb{R}$ de l'algèbre $\mathrm{ham}(V,\omega)$ des champs de vecteurs hamiltoniens sur V. Si $Z \in \mathrm{ham}(V,\omega)$ (avec $\iota_Z\omega = dH_Z$, $\int_V H_Z\omega^n = 0$, $\dim V = 2n$), le champ de vecteurs $\theta(Z) = \widehat{Z} - (H_Z \circ \pi)X$ (où $\widehat{Z}$ est le relevé horizontal de Z : $\alpha(\widehat{Z}) = 0$) préserve α. L'application $Z \mapsto \theta(Z)$ est un morphisme d'algèbres de Lie qui scinde l'extension.

Notons $G_\alpha(M)_0$ le groupe des difféomorphismes de M qui préservent α, isotopes à l'identité via une isotopie qui préserve α. On a alors une extension centrale :

$$0 \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to G_\alpha(M)_0 \to \mathrm{Ham}(V,\omega) \to 0.$$

Si (f_t) est une isotopie hamiltonienne on note $\Theta(f_t)$ l'isotopie de M obtenue en « intégrant » θ. Sa classe d'homotopie ne dépend que de celle de (f_t). Ainsi, si le groupe $\mathrm{Ham}(V,\omega)$ est simplement connexe, l'extension précédente est scindée. Grâce au théorème de Banyaga qui assure que le groupe $\mathrm{Ham}(V,\omega)$ est simple [4], la section qui scinde l'extension est unique. Si V est une surface de genre supérieur, le groupe $\mathrm{Ham}(V,\omega)$ est simplement connexe [11,19], et l'extension ci-dessus est canoniquement scindée.

2.2. Construction du quasi-morphisme $\mathfrak{Cal}_S$

On suppose donc que S est une surface fermée orientée, de genre g supérieur ou égal à 2, munie d'une forme symplectique d'aire totale $2g-2$ (d'après un théorème de Moser deux telles formes sont l'image l'une de l'autre par un difféomorphisme isotope à l'identité, le choix de ω est donc sans importance).

Nous noterons M la variété des droites orientées tangentes à S, $\widetilde{S}$ le revêtement universel de S, et $\widetilde{M}$ la variété des droites orientées tangentes à $\widetilde{S}$. Le choix d'une métrique à courbure constante sur S, de forme d'aire égale à ω, fournit une structure de S^1-fibré principal sur M et $\widetilde{M}$. Nous noterons X le champ de vecteurs sur M tangent aux fibres de l'application $\pi : M \to S$ engendré par cette action du cercle. On note également S^1_∞ le cercle à l'infini de $\widetilde{S}$ déterminé par cette métrique, et $p_\infty : \widetilde{M} \to S^1_\infty$ la projection. La variété $\widetilde{M}$ est difféomorphe à $\widetilde{S} \times S^1_\infty$ et le feuilletage $(\widetilde{S} \times \{*\})_{* \in S^1_\infty}$ descend en un feuilletage sur M appelé feuilletage horocyclique. Nous noterons α une 1-forme sur M telle que $\alpha(X) = 1$ et $\pi^*\omega = d\alpha$. La forme α est une forme de contact de champ de Reeb égal à X. On notera encore X le relevé à $\widetilde{M}$ de ce champ. Enfin, si $\gamma : [0,1] \to S^1_\infty$ est un chemin continu, nous noterons $n(\gamma)$ l'entier défini comme suit. Si un paramétrage de S^1_∞ par $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est donné, notons $\widetilde{\gamma}$ un relevé de γ à $\mathbb{R}$. On pose :

$$n(\gamma) = \left[\widetilde{\gamma}(1) - \widetilde{\gamma}(0)\right],$$

cet entier ne dépend pas du choix du paramétrage. Si γ et β sont deux chemins dans S^1_∞ avec $\gamma(1)=\beta(0)$ nous avons :

$$(*) \qquad \left|n(\gamma*\beta)-n(\gamma)-n(\beta)\right| \leqslant 2.$$

Observations. Avant de construire le quasi-morphisme annoncé dans le théorème 1, faisons quelques remarques. À chaque ouvert connexe $U\subset S$, distinct de S, nous allons associer un élément canonique de l'espace

$$QM_h\big(\pi_1(U),\mathbb{R}\big)/\operatorname{Hom}\big(\pi_1(U),\mathbb{R}\big).$$

Puisqu'un quasi-morphisme homogène est invariant par conjugaison, nous oublierons parfois de choisir un point base pour le groupe $\pi_1(U)$. Soit $\psi: U\times S^1\to\pi^{-1}(U)$ une trivialisation du fibré $\pi: M\to S$ au-dessus de U. Si z_0 est un point sur S^1 et si γ est un lacet dans U, basé en x_0, on pose :

$$\phi_{z_0}\big([\gamma]\big)=n\big(p_\infty\big(\widetilde{\psi(\gamma(t),z_0)}\big)\big),$$

où $\widetilde{\psi(\gamma(t),z_0)}$ est un relevé à $\widetilde{M}$ du chemin $\psi(\gamma(t),z_0)$. Vu la propriété $(*)$, l'application ϕ_{z_0} est un quasi-morphisme sur le groupe $\pi_1(U,x_0)$. Son homogénéisé ϕ ne dépend pas du point z_0. Si deux métriques à courbure constante sur S sont données, on peut identifier par un homéomorphisme les bords à l'infini de $\widetilde{S}$ associés, l'indice n ne dépend donc pas de la métrique. À l'addition d'un homomorphisme près, l'application ϕ ne dépend pas de la trivialisation ψ, la classe

$$[\phi]\in QM_h\big(\pi_1(U),\mathbb{R}\big)/\operatorname{Hom}\big(\pi_1(U),\mathbb{R}\big)$$

est donc canonique. Une autre manière de la décrire serait la suivante. On fixe un point $\widetilde{x_0}\in M$ au-dessus de x_0. Si $[\gamma]\in\pi_1(U,x_0)$, on note $\widetilde{\gamma}$ son relevé issu de $\widetilde{x_0}$ tangent au feuilletage horocyclique. On peut écrire $\widetilde{\gamma}(t)=\psi(\gamma(t),z(t))$. Notons $f([\gamma])$ la variation de l'argument de $z(t)$ comptée en tours. Alors f est un quasi-morphisme dont l'homogénéisé est égal à $-\phi$. On peut en quelque sorte penser à un feuilletage transverse aux fibres du fibré $M\to S$ comme à une « quasi-trivialisation » du fibré. Alors que la comparaison de deux trivialisations du fibré au-dessus de l'ouvert U fournit un homomorphisme $\pi_1(U)\to\mathbb{Z}$, la comparaison du feuilletage avec une trivialisation fournit un quasi-morphisme homogène sur le groupe $\pi_1(U)$. Si le groupe $\pi_1(U)$ est abélien, il n'admet pas de quasi-morphisme homogène non-trivial (c'est-à-dire autre que les homomorphismes). En revanche si le groupe $\pi_1(U)$ est libre non-abélien, la classe $[\phi]$ va apparaître comme une obstruction à ce que le quasi-morphisme $\mathfrak{Cal}_S:\operatorname{Ham}(S,\omega)\to\mathbb{R}$ que nous allons définir se restreigne en le morphisme de Calabi sur le groupe Γ_U.

Donnons enfin une dernière interprétation de la classe $[\phi]$. Rappelons qu'à toute représentation ρ d'un groupe discret Γ dans le groupe $\text{Homéo}_+(S^1)$ des homéomorphismes du cercle qui préservent l'orientation, on peut associer une classe de cohomologie bornée $eu_b(\rho)\in H^2_b(\Gamma,\mathbb{Z})$, appelée classe d'Euler bornée, voir [15]. La représentation $\pi_1(S)\to\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ associée à une métrique à courbure constante sur S fournit donc une classe $eu_b(S)\in H^2_b(\pi_1(S),\mathbb{Z})$, qui ne dépend pas de la métrique. Pour tout groupe discret Γ, le noyau de l'application $H^2_b(\Gamma,\mathbb{R})\to H^2(\Gamma,\mathbb{R})$ est isomorphe à l'espace

$$QM_h(\Gamma,\mathbb{R})/\operatorname{Hom}(\Gamma,\mathbb{R}).$$

Si $U\subset S$ est un ouvert connexe distinct de S, on note $i_U:\pi_1(U)\to\pi_1(S)$ le morphisme naturel. Puisque le groupe $H^2(\pi_1(U),\mathbb{R})$ est trivial, la classe $i_U^*eu_b(S)$ (que nous considérons comme une classe réelle) est dans le noyau

$$\mathrm{Ker}\big(H_b^2\big(\pi_1(U),\mathbb{R}\big)\to H^2\big(\pi_1(U),\mathbb{R}\big)\big).$$

C'est la classe $[\phi]$ précédemment décrite.

Nous pouvons maintenant construire le quasi-morphisme $\mathfrak{Cal}_S$. Soit (f_t) une isotopie hamiltonienne dans S. Notons $\Theta(f_t): M\to M$ l'isotopie qui relève (f_t) précédemment construite, et (F_t) l'isotopie de $\widetilde{M}$ qui relève $\Theta(f_t)$. Si v et w sont deux points de $\widetilde{M}$ tels que $\widetilde{\pi}(v)=\widetilde{\pi}(w)$ (où $\widetilde{\pi}$ est la projection $\widetilde{M}\to\widetilde{S}$), on écrit $w=\phi_X^{u_0}(v)$ avec $u_0\in[0,1]$, où ϕ_X^u est le flot de X. Notons $G(u,t)=p_\infty(F_t(\phi_X^{uu_0}v))$. Le lacet lu sur le « bord » de G a un indice n égal à 0. Puisque les chemins $G(-,0)$ et $G(-,1)$ ont un indice borné par 1, on a $|n(p_\infty(F_t(v)))-n(p_\infty(F_t(w))|\leqslant 2$. On définit alors, pour $\widetilde{x}\in\widetilde{S}$, $\widetilde{\mathrm{angle}}(\widetilde{x},f_1)=-\inf_{\widetilde{\pi}(v)=\widetilde{x}}n(p_\infty(F_t(v)))$. La fonction $\widetilde{\mathrm{angle}}(-,f_1)$ est invariante sous l'action du groupe fondamental de S et définit une fonction mesurable bornée $\mathrm{angle}(-,f_1)$ sur S. Elle vérifie :

$$\big|\mathrm{angle}(x,f_1g_1)-\mathrm{angle}(x,g_1)-\mathrm{angle}\big(g_1(x),f_1\big)\big|\leqslant 8.$$

Ainsi l'application qui, au difféomorphisme hamiltonien f_1, associe l'intégrale

$$\int_S \mathrm{angle}(-,f_1)\omega$$

est un quasi-morphisme. Nous pouvons l'homogénéiser pour définir :

$$\mathfrak{Cal}_S(f_1)=\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\int_S \mathrm{angle}\big(-,f_1^p\big)\omega.$$

D'après le théorème ergodique sous-additif [18,20], la suite de fonctions

$$\frac{1}{p}\,\mathrm{angle}\big(-,f^p\big)$$

converge ω-presque partout quand p tend vers l'infini, vers une fonction mesurable $\widehat{\mathrm{angle}}(-,f)$. Cette fonction est bornée et satisfait :

$$\mathfrak{Cal}_S(f)=\int_S \widehat{\mathrm{angle}}(-,f)\omega.$$

Discutons maintenant des différents choix effectués pour notre construction. Nous avons déjà indiqué pourquoi l'indice n d'une courbe ne dépend pas du choix de la métrique. Par ailleurs :

- Si l'on change de métrique, l'action du cercle sur M (i.e. le champ X) change, mais la classe d'Euler du fibré n'étant pas modifiée, on peut trouver un difféomorphisme de M, induisant l'identité sur S, qui entrelace les deux actions. On en déduit aisément l'invariance du quasi-morphisme.
- Lorsque la métrique est fixée, le choix de la forme α est sans importance. Une autre primitive de $\pi^*\omega$ valant 1 sur X serait de la forme $\alpha+\pi^*\beta$, où β est une 1-forme fermée sur la surface. En utilisant la nullité du flux d'une isotopie hamiltonienne, on voit que le

quasi-morphisme final est inchangé. Notons que, lorsque M est identifié au fibré unitaire tangent à S, la forme α peut être prise nulle dans la direction du flot géodésique.

- Une fois acquise l'indépendance de $\mathfrak{Cal}_S$ vis-à-vis de la métrique, l'invariance par conjugaison dans $\mathrm{Symp}(S,\omega)$ est claire. Il suffit de considérer une métrique (à courbure constante, de forme d'aire ω) et de la transporter par le difféomorphisme symplectique considéré.

Supposons que $U \subset S$ soit un ouvert connexe distinct de S et (f_t) une isotopie hamiltonienne dans U. On note $f = f_1$. Nous allons calculer $\mathfrak{Cal}_S(f)$.

Choisissons une trivialisation $\psi : U \times S^1 \to \pi^{-1}(U)$ du fibré M au-dessus de U, telle que $X = \frac{\partial}{\partial s}$ (où s est la coordonnée angulaire sur le cercle). On a alors $\alpha = ds + \pi^*\lambda$, où λ est une primitive de ω sur U. Notons également ϕ le quasi-morphisme homogène sur $\pi_1(U)$ associé à cette trivialisation. Enfin, on note Z_t le champ de vecteurs qui engendre l'isotopie, H_t un hamiltonien pour Z_t avec $\mathrm{supp}(H_t) \subset U$ et $\widetilde{H}_t$ la fonction d'intégrale nulle sur S qui diffère de H_t par une constante.

Fixons un point x_0 dans U et un compact K tel que $\mathrm{supp}(f_t) \subset K$. Pour tout point x de K, on choisit un chemin α_{x_0x} de classe C^1 par morceaux de x_0 à x, contenu dans U, de dérivée bornée indépendamment de x. On note γ_{x,f^p} le lacet $\alpha_{x_0x} * (h_{p,t}(x)) * \overline{\alpha_{x_0f^p(x)}}$ et $\langle[\phi], f\rangle(x)$ la limite de la suite $(\frac{1}{p}\phi([\gamma_{x,f^p}]))_{p\geqslant 0}$. Ici, $(h_{p,t})$ désigne l'isotopie $(f_t) * (f_t \circ f) * \cdots * (f_t \circ f^{p-1})$, $Z_{p,t}$ le champ de vecteurs associé, et $\widetilde{H}_{p,t}$ un hamiltonien pour $Z_{p,t}$, de moyenne nulle sur S.

PROPOSITION 2.1. – *Pour presque tout x de U nous avons* :

$$\widehat{\mathrm{angle}}(x,f) = -\bigl\langle[\phi], f\bigr\rangle(x) + \mathfrak{M}\left(y \mapsto \int_0^1 \bigl(\lambda(Z_t) + \widetilde{H}_t\bigr)\bigl(f_t(y)\bigr)\,dt\right)(x).$$

Dans cette proposition, et dans la suite, $\mathfrak{M}(\varphi)$ désignera la limite des moyennes de Birkhoff d'une fonction (intégrable) φ relativement à la transformation $f = f_1$.

Preuve. – si x est dans U et z dans S^1 nous avons :

$$\Theta(h_{p,t})\bigl(\psi(x,z)\bigr) = \psi\left(h_{p,t}(x), \exp\left(-2i\pi\int_0^t \bigl(\lambda(Z_{p,t'}) + \widetilde{H}_{p,t'}\bigr)\bigl(h_{p,t'}(x)\bigr)\,dt'\right)\cdot z\right).$$

Notons $v(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$ les courbes

$$\Theta(h_{p,t})\bigl(\psi(x,z)\bigr), \qquad \psi\bigl(h_{p,t}(x), z\bigr),$$
$$\psi\left(f^p(x), \exp\left(-2i\pi\int_0^t \bigl(\lambda(Z_{p,t'}) + \widetilde{H}_{p,t'}\bigr)\bigl(h_{p,t'}(x)\bigr)\,dt'\right)\right),$$

respectivement. On choisit deux relevés $\widetilde{v}_1$ et $\widetilde{v}_2$ à $\widetilde{M}$ tels que $\widetilde{v}_1(1) = \widetilde{v}_2(0)$, et l'on note $\widetilde{v} = \widetilde{v}_1 * \widetilde{v}_2$. Dans la suite d'égalités ci-dessous, le symbole $\simeq$ voudra dire que les deux membres de l'égalité diffèrent d'une quantité bornée, la valeur exacte de la borne important peu (mais pouvant cependant aisément être déterminée).

$$\mathrm{angle}\bigl(x, f^p\bigr) \simeq -n\bigl(p_\infty\bigl(\widetilde{v}(t)\bigr)\bigr) \simeq -n\bigl(p_\infty\bigl(\widetilde{v}_1(t)\bigr)\bigr) - n\bigl(p_\infty\bigl(\widetilde{v}_2(t)\bigr)\bigr),$$

$$-n\bigl(p_\infty\bigl(\widetilde{v}_2(t)\bigr)\bigr) \simeq \int_0^1 \bigl(\lambda(Z_{p,t'}) + \widetilde{H}_{p,t'}\bigr)\bigl(h_{p,t'}(x)\bigr)\,dt', \qquad -n\bigl(p_\infty\bigl(\widetilde{v}_1(t)\bigr)\bigr) \simeq -\phi\bigl([\gamma_{x,f^p}]\bigr).$$

Nous obtenons au total l'existence d'une constante C telle que :

$$\left|\operatorname{angle}(x, f^p) - \int_0^1 \left(\lambda(Z_{p,t'}) + \widetilde{H}_{p,t'}\right)\left(h_{p,t'}(x)\right) dt' + \phi\left([\gamma_{x,f^p}]\right)\right| \leqslant C.$$

Le résultat suit. □

Une fois la proposition précédente acquise, nous pouvons conclure la preuve du théorème 1. Hors de U, la fonction $\widehat{\operatorname{angle}}(x,f)$ est égale à $\int_0^1 \widetilde{H}_t(x)\,dt$. Nous obtenons donc :

$$\mathfrak{Cal}_S(f) = -\int_U \left\langle[\phi], f\right\rangle \omega + \mathfrak{Cal}_U(f).$$

Si U est simplement connexe, le terme $\langle[\phi], f\rangle$ est identiquement nul. Si U est un anneau, le quasi-morphisme homogène ϕ est un morphisme qui se représente par une 1-forme fermée β. Dans ce cas, on vérifie sans peine que

$$\left\langle[\phi], f\right\rangle(x) = \mathfrak{M}\left(y \mapsto \int_0^1 \beta(Z_t)\left(f_t(y)\right) dt\right)(x).$$

On en déduit :

$$\int_U \left\langle[\phi], f\right\rangle \omega = \int_U \int_0^1 \beta(Z_t)\,dt\,\omega.$$

Mais cette dernière intégrale est nulle pour une isotopie hamiltonienne. Dans le cas d'un flot hamiltonien, cela traduit simplement le fait que le cycle asymptotique de Schwartzman pour la mesure ω est nul. On a donc bien $\mathfrak{Cal}_S(f_1) = \mathfrak{Cal}_U(f_1)$ dans ce cas. Si le groupe $\pi_1(U)$ est libre non-abélien, l'espace

$$QM_h\left(\pi_1(U), \mathbb{R}\right) / \operatorname{Hom}\left(\pi_1(U), \mathbb{R}\right)$$

n'est pas trivial [6,8], et l'intégrale $\int_U \langle[\phi, f]\rangle\omega$ peut ne pas s'annuler. Nous avons achevé la preuve du théorème 1.

Décrivons maintenant les constructions de Gambaudo et Ghys qui permettent de prouver que l'espace des quasi-morphismes homogènes sur $\operatorname{Ham}(S,\omega)$ nuls en restriction aux sous-groupes (Γ_U) où U est un disque ou un anneau, est de dimension infinie. Considérons une 1-forme η, non nécessairement fermée, sur la surface S, et notons $\widetilde{\eta}$ son relèvement à $\widetilde{S}$. On suppose toujours qu'une métrique à courbure constante de forme d'aire ω est fixée. Nous allons construire un quasi-morphisme homogène

$$\Phi_\eta : \operatorname{Symp}_0(S,\omega) \to \mathbb{R}.$$

Un élément f de $\operatorname{Symp}_0(S,\omega)$ admet un relevé canonique $\widetilde{f}$ à $\widetilde{S}$: puisque le groupe $\operatorname{Symp}_0(S,\omega)$ est simplement connexe nous choisissons une isotopie (f_t) reliant l'identité à f, et nous considérons son relevé $(\widetilde{f_t})$ à $\widetilde{S}$. On pose alors $\widetilde{f} = \widetilde{f}_1$. Si x est dans $\widetilde{S}$, nous noterons $\delta(x,f)$ l'unique géodésique (pour la métrique fixée) qui relie x à $\widetilde{f}(x)$. La fonction

$$x \mapsto \int_{\delta(x,f)} \widetilde{\eta},$$

est $\pi_1(S)$-invariante et définit donc une fonction $u(\eta,f)$ sur la surface S. En utilisant le fait que la 2-forme $d\widetilde{\eta}$ vérifie une inégalité de la forme $\|d\widetilde{\eta}\| \leqslant C\|\widetilde{\omega}\|$ sur $\widetilde{S}$, et le fait que les triangles géodésiques de $\widetilde{S}$ sont d'aire bornée, nous obtenons aisément :

$$\bigl|u(\eta,fg) - u(\eta,g) - u(\eta,f)\circ g\bigr| \leqslant \pi C.$$

Ainsi $f \mapsto \int_S u(\eta,f)\omega$ définit un quasi-morphisme sur $\mathrm{Symp}_0(S,\omega)$, son homogénéisé sera noté Φ_η (contrairement à $\mathfrak{Cal}_S$, il dépend de la métrique).

Dans [14], il est montré que la famille $(\Phi_\eta)_\eta$, restreinte au groupe $\mathrm{Ham}(S,\omega)$, engendre un espace de dimension infinie dans l'espace $QM_h(\mathrm{Ham}(S,\omega),\mathbb{R})$. Les auteurs utilisent pour cela des « twists » supportés au voisinage d'une géodésique fermée simple. Notons que, pour que ceux-ci soient hamiltoniens, cette géodésique doit être homologue à 0.

Supposons que (f_t) soit une isotopie *symplectique* supportée dans le compact K contenu dans l'ouvert simplement connexe U de S. Notons $\widetilde{K} \subset \widetilde{U}$ des relevés à $\widetilde{S}$. Le compact $\widetilde{K}$ est stable par $\widetilde{f}$ et de diamètre fini. On a donc $|u(\eta,f^p)| \leqslant |\eta|\cdot \mathrm{diam}(\widetilde{K})$ pour tout p. Ceci assure que $\Phi_\eta(f_1)=0$. Soit maintenant (f_t) une isotopie *hamiltonienne* (engendrée par le champ Z_t) supportée dans l'anneau $A = \,]0,1[\, \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \hookrightarrow S$. On suppose bien sûr ce plongement injectif au niveau du groupe fondamental, sans quoi on serait ramené au cas précédent. On vérifie alors que

$$\widehat{u}(\eta,f) = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} u\bigl(\eta,f^p\bigr)$$

vaut $l\cdot \mathfrak{M}(\int_0^1 \beta(Z_t)\circ f_t\,dt)$, où la classe de la 1-forme fermée β sur A engendre $H^1(A,\mathbb{Z})$ et l est l'intégrale de la 1-forme η sur la géodésique fermée librement homotope dans S au générateur de $\pi_1(A)$. On en déduit $\Phi_\eta(f_1)=0$.

2.3. Calcul sur des hamiltoniens autonomes

Nous prouvons ici le théorème 2. Notons U l'ouvert $S - \{x_l\}$ et fixons une trivialisation du fibré $\pi : M \to S$ au-dessus de U. Celle-ci fournit une primitive λ de ω sur U et un quasi-morphisme homogène ϕ sur le groupe $\pi_1(U)$, comme précédemment. Si a est une arête du graphe $\mathcal{G}$ nous noterons a^+ et a^- les sommets à ses extrémités (avec la convention $F_{\mathcal{G}}(a^-) < F_{\mathcal{G}}(a^+)$). Pour chaque arête a, nous fixons un paramétrage de $p_{\mathcal{G}}^{-1}(a)$ par $(\theta,t) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \,]t_-,t_+[$, tel que $\omega = d\theta\wedge dt$. Si H est une fonction dans $\mathcal{F}$, le champ hamiltonien Z_H s'écrit sur $p_{\mathcal{G}}^{-1}(a)$:

$$\vartheta(t)\frac{\partial}{\partial\theta},$$

où la fonction ϑ satisfait :

$$\int_{t_-}^{t_+} \vartheta(t)\,dt = H_{\mathcal{G}}\bigl(a^+\bigr) - H_{\mathcal{G}}(a^-).$$

Pour un domaine à bord lisse $D \subset U$ nous noterons $\langle[\phi],\partial D\rangle$ la somme des valeurs de ϕ sur les classes de conjugaison déterminées par chacune des composantes du bord de D. Cette valeur ne dépend que de la classe $[\phi]$.

PROPOSITION 2.2. – *Si D est à bord géodésique, pour une métrique à courbure constante quelconque sur S, on a $\langle[\phi],\partial D\rangle = -\chi(D)$.*

Preuve. – On peut supposer que ω est la forme d'aire associée à la métrique qui rend le bord de D géodésique (car le quasi-morphisme ϕ est indépendant de ω). On a vu que la 1-forme α peut alors être choisie nulle dans la direction du flot géodésique. Au-dessus de U, dans une trivialisation dans laquelle $X = \partial/\partial s$, on a $\alpha = ds + \pi^*(\lambda)$. Soit γ une orbite périodique du flot géodésique telle que $\pi(\gamma)$ est une composante du bord de D. Puisque γ est fermée on a : $\phi([\pi(\gamma)]) = -\int_\gamma ds = \int_{\pi(\gamma)} \lambda$. En sommant sur les différentes composantes de bord, on obtient : $\langle[\phi], \partial D\rangle = \int_D \omega = -\chi(D)$. □

Si H est dans $\mathcal{F}$, bien que l'isotopie (φ_H^t) ne soit pas nécessairement à support dans U, on peut répéter le raisonnement qui a servi à établir la proposition 2.1. Si x est dans U et $p_{\mathcal{G}}(x)$ n'est pas un sommet de $\mathcal{G}$, on notera $[x]$ la classe d'homotopie libre du cercle $p_{\mathcal{G}}^{-1}(p_{\mathcal{G}}(x))$, orienté par X_F. Notant $\widetilde{H}$ la fonction d'intégrale nulle sur S qui diffère de H par une constante, on a, presque partout sur U :

$$\widehat{\text{angle}}\big(x, \varphi_H^1\big) = \mathfrak{M}\big(y \mapsto \lambda(X_H)(y) + \widetilde{H}(y)\big)(x) - \vartheta(x)\phi\big([x]\big).$$

La fonction $\mathfrak{M}(y \mapsto \lambda(X_H)(y) + \widetilde{H}(y))$ a pour intégrale $\int_S H\omega - (2g-2)H(x_l)$. Si a est une arête de $\mathcal{G}$, nous noterons $[a]$ la valeur commune des classes $[x]$ pour $x \in p_{\mathcal{G}}^{-1}(a)$. La somme des intégrales de $\vartheta(x)\phi([x])$ sur les différentes arêtes vaut :

$$\sum_a \phi\big([a]\big)\big(H_{\mathcal{G}}\big(a^+\big) - H_{\mathcal{G}}\big(a^-\big)\big).$$

On peut écrire la somme sous la forme

$$\sum_v C(v) H_{\mathcal{G}}(v),$$

où la somme porte cette fois sur les sommets de $\mathcal{G}$. Il faut calculer les constantes $C(v)$. Au préalable, notons le fait suivant :

Observation. Si x et y sont deux lacets dans $\pi^{-1}(U)$, tangents au feuilletage horocyclique de S, ayant même point base, alors $\phi([\pi(x * y)]) = \phi([\pi(x)]) + \phi([\pi(y)])$.

On peut alors commencer le calcul des constantes $C(v)$:

- Si v correspond à un extremum local autre que le maximum global, la constante $C(v)$ est nulle. En effet, elle est égale à la valeur de ϕ sur un petit lacet qui entoure l'extremum. Comme celui-ci est dans U le lacet est nul dans $\pi_1(U)$.
- Si $v = p_{\mathcal{G}}(x_l)$, la constante $C(v)$ est égale à la valeur de ϕ sur la classe d'homotopie dans U d'un petit lacet γ qui entoure x_l (avec l'orientation opposée à celle du bord de $\{F \leqslant \lambda_l - \epsilon\}$). On constate alors que $\phi([\gamma]) = -(2g-2)$ (la classe d'Euler du fibré en cercles au-dessus de S).

Il reste alors à calculer les constantes $C(v)$ pour les sommets v correspondant à des points critiques d'indice 1. Il n'est pas difficile de vérifier que

$$C\big(p_{\mathcal{G}}(x_j)\big) = \big\langle[\phi], \partial\{\lambda_j - \epsilon \leqslant F \leqslant \lambda_j + \epsilon\}\big\rangle$$

(pour ϵ assez petit). Le domaine $\{\lambda_j - \epsilon \leqslant F \leqslant \lambda_j + \epsilon\}$ est constitué d'un nombre fini de cylindres sur le bord desquels ϕ est nul et d'un pantalon P. Évaluons le terme $\langle[\phi], \partial P\rangle$.

- Si l'une des composantes du bord de P est homotope à 0 dans U, ϕ est nul évalué contre celle-ci. Les deux autres composantes sont alors librement homotopes dans U, et les deux valeurs de ϕ correspondantes sont opposées. On peut donc supposer les trois composantes de ∂P essentielles dans U sans quoi $C(v)=0$.

- Si en outre ces trois composantes sont essentielles dans S, on peut trouver une métrique à courbure constante (de forme d'aire égale à ω) qui rend le bord de P géodésique (ou seulement deux composantes sur trois de ∂P si deux d'entre elles sont librement homotopes). Une généralisation immédiate de la proposition 2.2 permet alors de montrer que la constante $C(v)$ vaut 1.
- Il reste à traiter le cas où l'une des composantes, disons α_1, de ∂P est contractile dans S. Dans ce cas elle borde un disque plongé qui contient le point x_l (puisque l'on a supposé cette même courbe essentielle dans U). Les deux autres composantes α_2 et α_3 de ∂P sont alors essentielles dans S. Modifions le pantalon P en un pantalon P' de composantes de bord $(\alpha_i')_{1\leqslant i\leqslant 3}$ telles que α_i' est homotope à α_i, et α_1' et α_2' ont même point base. Le lacet α_1' peut être choisi contenu dans un disque arbitrairement petit au voisinage de x_l. On peut alors trouver une métrique à courbure constante qui rend α_2' géodésique. Notant β_2 l'orbite périodique du flot géodésique telle que $\pi(\beta_2)=\alpha_2'$, on peut trouver un relevé, tangent au feuilletage horocyclique et fermé, β_1 de α_1', issu du même point que l'orbite β_2. Dans ce cas l'observation ci-dessus assure que $\phi([\alpha_1' * \alpha_2'])=\phi([\alpha_1'])+\phi([\alpha_2'])$. Puisque la dernière composante de bord de P' définit la classe de conjugaison de $[\alpha_1' * \alpha_2']^{-1}$, on a $\langle[\phi],\partial P'\rangle=0$.

Il n'est pas difficile de vérifier que l'ensemble des sommets pour lesquels $C(v)=1$ correspond à l'ensemble $\mathcal{V}$ défini dans l'introduction. Une autre manière de décrire cet ensemble serait la suivante. Les éléments de $\mathcal{V}$ sont les sommets correspondant à des points critiques d'indice 1 pour lesquels les trois composantes du bord du pantalon P décrit précédemment sont essentielles dans S. En résumé, la constante $C(p_{\mathcal{G}}(x_l))$ vaut $-(2g-2)$, les autres constantes sont égales à 1 pour les éléments de $\mathcal{V}$ et 0 sinon. Finalement, la somme initiale est égale à :

$$\sum_{v\in\mathcal{V}} H_{\mathcal{G}}(v)-(2g-2)H(x_l).$$

Nous obtenons ainsi :

$$\mathfrak{Cal}_S(\varphi_H^1)=\int_S \widehat{\mathrm{angle}}(-,\varphi_H^1)\omega=\int_S H\omega-\sum_{v\in\mathcal{V}} H_{\mathcal{G}}(v).$$

3. Quasi-morphisme sur certaines variétés symplectiques de première classe de Chern non-nulle

3.1. Exposant de Lyapunov symplectique

Notons B une boule de $\mathbb{R}^{2n}$, munie d'une forme symplectique ν de volume fini. Nous rappelons ici une construction due à Barge et Ghys [5], d'un quasi-morphisme homogène $\tau_{B,\nu}$ sur le groupe $\Gamma_{B,\nu}=\mathrm{Diff}^c(B,\nu)$ des difféomorphismes symplectiques de B à support compact. Cette construction apparaît déjà implicitement dans [23]. Nous renvoyons à [5] pour plus de détails.

On commence par construire un quasi-morphisme Φ sur le revêtement universel $\widetilde{\mathrm{Sp}}(E,\omega)$ du groupe symplectique d'un espace vectoriel symplectique (E,ω). Cette construction est bien connue [5,10,17] ; nous la rappelons cependant, dans un souci de complétude. Supposons que J soit une structure presque-complexe sur E compatible avec ω : J est un endomorphisme de E, de carré -1, qui préserve ω, avec $\omega(u,Ju)>0$ pour tout vecteur non-nul u de E. Muni de la forme $(u,v)_J = \omega(u,Jv) - i\omega(u,v)$, E devient un espace vectoriel hermitien. Nous noterons $\Lambda(E)$ la grassmannienne lagrangienne de E. Si L_0 et L_1 sont deux lagrangiens, il existe un endomorphisme unitaire u de E tel que $u(L_0) = L_1$. Le nombre complexe

$$\det{}^2_{\mathbb{C}}(u) \in S^1,$$

ne dépend pas du choix de u. On le note $\det^2_{L_0} L_1$. Il vérifie la relation (de cocycle) :

$$\det{}^2_{L_0} L_2 = \det{}^2_{L_0} L_1 \cdot \det{}^2_{L_1} L_2.$$

En particulier, si (L_t) est une courbe dans $\Lambda(E)$ la variation de l'argument du nombre complexe $\det^2_W L_t$ (comptée en tours) ne dépend pas du choix de W. On note $\Delta(\det^2 L_t)$ ce nombre.

PROPOSITION 3.1. – *Si (L_t) est une courbe dans $\Lambda(E)$ qui reste toujours transverse à un lagrangien donné W, on a $|\Delta(\det^2 L_t)| \leqslant n$.*

Il est classique que l'application

$$\begin{aligned} \Lambda(E) &\to S^1, \\ L &\mapsto \det{}^2_{L_0} L \end{aligned}$$

induit un isomorphisme entre les groupes fondamentaux. Par ailleurs, il est également bien connu que, pour tout lagrangien W, l'intersection avec l'hypersurface

$$\{L, \dim L \cap W > 0\},$$

engendre le groupe $H^1(\Lambda(E), \mathbb{Z})$. Il n'est donc pas surprenant que le fait de rester transverse à un lagrangien donné empêche une courbe de $\Lambda(E)$ de « trop tourner » (voir [1]). Prouvons maintenant la proposition.

Preuve. – L'application qui à un endomorphisme f de W, symétrique pour le produit scalaire $\langle u,v\rangle_J = \omega(u,Jv)$, associe le graphe $L_f = \{f(x) + Jx\}_{x\in W}$ est un difféomorphisme sur l'ouvert des lagrangiens transverses à W. On a :

$$\det{}^2_W L_f = \prod_{k=1}^{n} \frac{(\lambda_k + i)^2}{1+\lambda_k^2},$$

où les λ_k sont les valeurs propres de f. Si (f_t) est un chemin d'endomorphismes symétriques de W, de valeurs propres $\lambda_1(t) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(t)$, la variation de l'argument du nombre complexe

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{(\lambda_k(t) + i)^2}{1+\lambda_k(t)^2}$$

est inférieure à n. $\square$

Un élément $[\gamma]$ du revêtement universel $\widetilde{\mathrm{Sp}}(E,\omega)$ du groupe symplectique $\mathrm{Sp}(E,\omega)$ est la donnée d'un chemin $\gamma : [0,1] \to \mathrm{Sp}(E,\omega)$, tel que $\gamma(0) = \mathrm{Id}$, défini à une homotopie fixant les extrémités près. Si $L_0 \in \Lambda(E)$, on note $\varphi_{L_0}([\gamma]) = \Delta(\det^2(\gamma_t \cdot L_0))$. Si L_0 et L_1 sont deux lagrangiens on a

$$\left|\varphi_{L_0}([\gamma]) - \varphi_{L_1}([\gamma])\right| \leqslant 2n$$

(il suffit de considérer l'application $(s,t)\in[0,1]^2\mapsto \det_*^2(\gamma_t\cdot L_s)$, où L_s est un chemin de L_0 à L_1 qui reste transverse à un lagrangien donné, et d'appliquer la proposition précédente). De plus nous avons l'égalité

$$\varphi_{L_0}\big([\gamma]\cdot[\eta]\big)-\varphi_{L_0}\big([\gamma]\big)-\varphi_{L_0}\big([\eta]\big)=\varphi_{\gamma_1\cdot L_0}\big([\eta]\big)-\varphi_{L_0}\big([\eta]\big),$$

cette dernière quantité est bornée par $2n$. L'application φ_{L_0} est donc un quasi-morphisme sur le groupe $\widetilde{\mathrm{Sp}}(E,\omega)$, dont l'homogénéisé Φ ne dépend pas de L_0. Pour tout lagrangien L on a :

$$\Phi\big([\gamma]\big)=\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\Delta\big(\det{}^2\big(\gamma_t^p\cdot L\big)\big).$$

PROPOSITION 3.2. – *Le quasi-morphisme Φ est continu.*

Preuve. – On montre par récurrence sur k l'inégalité :

$$\big|\varphi_{L_0}\big(x^{kp}\big)-k\varphi_{L_0}\big(x^p\big)\big|\leqslant 2nk.$$

En divisant par kp et en faisant tendre k vers l'infini, nous obtenons :

$$\left|\Phi(x)-\frac{1}{p}\varphi_{L_0}\big(x^p\big)\right|\leqslant\frac{2n}{p}.$$

La continuité de φ_{L_0} implique alors celle de Φ. □

Nous avons vu que le quasi-morphisme $\Phi:\widetilde{\mathrm{Sp}}(E,\omega)\to\mathbb{R}$ ne dépend d'aucun choix de point base dans la grassmannienne lagrangienne. Il est également indépendant du choix de la structure presque-complexe. En effet, si T est le générateur du groupe infini cyclique

$$\pi_1\big(\mathrm{Sp}(E,\omega),\mathrm{Id}\big)\hookrightarrow\widetilde{\mathrm{Sp}}(E,\omega),$$

on vérifie aisément que $\Phi(T)=2$. Ainsi les deux quasi-morphismes homogènes construits à partir de deux structures presque-complexes J et J' distinctes, prennent la même valeur sur l'élément T. D'après un argument de Barge et Ghys [5], cela entraîne qu'ils sont égaux. Indiquons finalement que l'on peut donner d'autres descriptions du quasi-morphisme Φ, qui permettent de le calculer effectivement [5].

Passons alors à la construction du quasi-morphisme homogène $\tau_{B,\nu}:\Gamma_{B,\nu}\to\mathbb{R}$. Nous choisissons une trivialisation symplectique du fibré tangent à B. Si $f\in\Gamma_{B,\nu}$, la différentielle de f « lue » dans cette trivialisation est une application

$$\begin{aligned}B&\to\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}),\\ x&\mapsto df(x).\end{aligned}$$

Un changement de trivialisation est donné par une application $\theta:B\to\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$. La différentielle de f est alors changée en $x\mapsto\theta(f(x))^{-1}\cdot df(x)\cdot\theta(x)$. Notons $\widetilde{\theta}:B\to\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n,\mathbb{R})$ un relevé quelconque de θ, et $\widetilde{df}:B\to\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n,\mathbb{R})$ l'unique relevé de df qui vaut $\widetilde{\mathrm{Id}}$ hors d'un compact. Si f et g sont dans le groupe $\Gamma_{B,\nu}$, nous avons :

$$\widetilde{d(fg)}(x)=\widetilde{df}\big(g(x)\big)\cdot\widetilde{dg}(x),$$

et donc

$$\left|\Phi\big(\widetilde{d(fg)}(x)\big) - \Phi\big(\widetilde{dg}(x)\big) - \Phi\big(\widetilde{df}\big(g(x)\big)\big)\right| \leqslant C(\Phi).$$

L'application $f \mapsto \int_B \Phi(\widetilde{df})\nu^n$ est donc un quasi-morphisme sur le groupe $\Gamma_{B,\nu}$. Nous allons vérifier que son homogénéisé ne dépend pas de la trivialisation symplectique choisie. Si l'on change de trivialisation, l'application $\widetilde{df}$ est changée en $\widetilde{\theta}^{-1} \circ f \cdot \widetilde{df} \cdot \widetilde{\theta}$. Nous avons donc, puisque Φ est homogène :

$$\left|\Phi\big(\widetilde{df^p}(x)\big) - \Phi\big(\widetilde{\theta}^{-1}\big(f^p(x)\big) \cdot \widetilde{df^p}(x) \cdot \widetilde{\theta}(x)\big)\right| \leqslant C(\Phi) + \left|\Phi\big(\widetilde{\theta}^{-1}\big(f^p(x)\big)\widetilde{\theta}(x)\big)\right|.$$

Si le support de f est contenu dans le compact K de B, nous avons pour x dans K,

$$\left|\Phi\big(\widetilde{\theta}^{-1}\big(f^p(x)\big)\widetilde{\theta}(x)\big)\right| \leqslant C(\Phi) + 2\sup_K |\Phi \circ \widetilde{\theta}|;$$

si x n'est pas dans K, la quantité $\Phi(\widetilde{\theta}^{-1}(f^p(x))\widetilde{\theta}(x))$ est nulle. Ainsi :

$$\left|\Phi\big(\widetilde{df^p}(x)\big) - \Phi\big(\widetilde{\theta}^{-1}\big(f^p(x)\big)\widetilde{df^p}(x)\widetilde{\theta}(x)\big)\right| \leqslant 2C(\Phi) + 2\sup_K |\Phi \circ \widetilde{\theta}|,$$

pour tout x de B et tout entier p. En divisant par p, en intégrant, et en passant à la limite, nous obtenons bien le résultat voulu : la quantité

$$\tau_{B,\nu}(f) = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \int_B \Phi\big(\widetilde{df^p}\big)\nu^n$$

ne dépend pas de la trivialisation choisie. L'application $\tau_{B,\nu} : \Gamma_{B,\nu} \to \mathbb{R}$ est le quasi-morphisme homogène annoncé.

3.2. Le quasi-morphisme $\mathfrak{S}$

Notons d'abord que, puisque la classe $[\omega]$ n'est jamais nulle, notre hypothèse force $c_1(V) \neq 0$. Cela exclut par exemple les variétés symplectiques telles que les surfaces $K3$ ou les tores (on pourra consulter [12] pour la construction d'un quasi-morphisme homogène sur le groupe $\widetilde{\mathrm{Ham}}(V,\omega)$, pour les variétés de première classe de Chern nulle). Dans le cas où V est ou bien $\mathbb{CP}^2$ ou bien $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ muni du produit de la forme symplectique standard par elle-même, des résultats de M. Gromov [16] assurent que le groupe fondamental de $\mathrm{Ham}(V,\omega)$ est fini. Tout quasi-morphisme homogène sur $\widetilde{\mathrm{Ham}}(V,\omega)$ descend donc sur $\mathrm{Ham}(V,\omega)$. Notre construction fournit donc un nouvel exemple de quasi-morphisme homogène sur les groupes $\mathrm{Ham}(\mathbb{CP}^2,\omega_0)$ et $\mathrm{Ham}(\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1, \omega_0 \times \omega_0)$.

Fixons un S^1-fibré principal $\pi : M \to V$ de classe d'Euler égale à $2c_1(V)$. Notant X le champ de vecteurs sur M engendré par l'action du cercle, on peut trouver une 1-forme α sur M telle que $\alpha(X) = 1$ et $d\alpha = \pi^*(s\omega)$. Nous sommes dans la situation du paragraphe 2.1. Fixons également une structure presque-complexe J sur V, compatible avec ω. Le fibré vectoriel TV devient alors un fibré hermitien, dont on peut choisir une trivialisation au-dessus d'un recouvrement $\{U_\beta\}$, avec des applications de transition $g_{\beta\gamma} : U_\beta \cap U_\gamma \to U(n)$, à valeurs dans le groupe des matrices unitaires de taille n. La famille d'applications $(\det^2(g_{\beta\gamma}))$, détermine un fibré en cercles E au-dessus de V, isomorphe à M. Si l'on note $\Lambda(V)$ le fibré en grassmannienne lagrangienne au-dessus de V, on a une application $\det^2 : \Lambda(V) \to E$ qui n'est autre qu'une version fibrée de l'application déjà rencontrée dans le cas linéaire. Dans une trivialisation $U_\gamma \times \mathbb{C}^n$, un élément L de $\Lambda(V)$ s'écrit $(x, u_\gamma(\mathbb{R}^n))$, pour une matrice unitaire u_γ. On lui associe l'élément $(x, \det^2(u_\gamma))$ dans la trivialisation correspondante de E. En choisissant un isomorphisme entre E et M on obtient une application $\varphi : \Lambda(V) \to M$. Elle n'est bien sûr pas unique, le choix de J et l'isomorphisme entre E et M interviennent. Cependant, elle a la vertu suivante : en restriction à chaque fibre, elle induit un isomorphisme entre les groupes fondamentaux. Une autre application $\varphi' : \Lambda(V) \to E$ construite par le même procédé serait donc de la forme

$$\varphi'(L) = \chi\big(\pi(L)\big) \cdot e^{2i\pi\kappa(L)} \cdot \varphi(L),$$

pour des applications $\chi : V \to S^1$ et $\kappa : \Lambda(V) \to \mathbb{R}$.

Passons à la construction de notre dernier quasi-morphisme. On considère une isotopie hamiltonienne (f_t) engendrée par le champ de vecteurs Z_t (avec $\iota_{Z_t}\omega = dH_t$, $\int_V H_t\omega^n = 0$). On note toujours $\Theta(f_t)$ l'isotopie de M engendrée par le champ de vecteurs $\widehat{Z_t} - (H_t \circ \pi)X$. Si $L \in \Lambda(V)$, les deux courbes

$$\varphi(df_t \cdot L) \quad \text{et} \quad \Theta(f_t)\big(\varphi(L)\big),$$

dans M, sont issues du même point et relèvent la même courbe de V. Bien que le fibré en cercles M ne soit pas trivial, on peut se servir de la courbe $\Theta(f_t)(\varphi(L))$ comme d'une horizontale « le long du chemin $f_t(\pi(L))$ » pour mesurer le nombre de rotation de la courbe $\varphi(df_t \cdot L)$. On peut donc écrire $\varphi(df_t \cdot L) = e^{2i\pi\vartheta(t)} \cdot \Theta(f_t)(\varphi(L))$ et définir une fonction continue sur $\Lambda(V)$ par $\operatorname{angle}(L, \{f_t\}) = \vartheta(1) - \vartheta(0)$. Elle satisfait la relation :

$$\operatorname{angle}\big(L, \{f_t * g_t f_1\}\big) = \operatorname{angle}\big(L, \{f_t\}\big) + \operatorname{angle}\big(df_1 \cdot L, \{g_t\}\big).$$

PROPOSITION 3.3. – *Pour toute paire de lagrangiens (L_0, L_1) contenus dans la même fibre de $\Lambda(V) \to V$, et toute isotopie hamiltonienne $\{f_t\}$, nous avons* :

$$\big|\operatorname{angle}\big(L_0, \{f_t\}\big) - \operatorname{angle}\big(L_1, \{f_t\}\big)\big| \leqslant 2n.$$

Preuve. – C'est une version fibrée des résultats du paragraphe 3.1, qui permettent de construire le quasi-morphisme homogène sur le revêtement universel du groupe symplectique. □

Nous définissons alors une fonction mesurable bornée sur V par : $\operatorname{angle}(x, \{f_t\}) = \inf_{L \in \Lambda(V)_x} \operatorname{angle}(L, \{f_t\})$. Elle satisfait :

$$\big|\operatorname{angle}\big(x, \{f_t * g_t f_1\}\big) - \operatorname{angle}\big(x, \{f_t\}\big) - \operatorname{angle}\big(f_1(x), \{g_t\}\big)\big| \leqslant 6n.$$

L'application

$$\begin{aligned} &\widetilde{\operatorname{Ham}}(V, \omega) \to \mathbb{R}, \\ &\{f_t\} \mapsto \int_V \operatorname{angle}\big(-, \{f_t\}\big)\omega^n \end{aligned}$$

est donc un quasi-morphisme. Si l'application φ est modifiée en une application φ', comme expliqué ci-dessus, la fonction angle se trouve changée en la fonction $\operatorname{angle}'(x, \{f_t\})$ égale à :

$$\operatorname{angle}\big(L, \{f_t\}\big) + \kappa(df_1 \cdot L) - \kappa(L) + \int_0^1 \beta(X_t)\big(f_t(x)\big)\, dt,$$

si β désigne la 1-forme fermée $d(\frac{ln\chi}{2i\pi})$. Nous avons donc :

$$\left|\operatorname{angle}'\big(x,\{f_t\}\big)-\operatorname{angle}\big(x,\{f_t\}\big)-\int_0^1\beta(X_t)\big(f_t(x)\big)\,dt\right|\leqslant 4n+2\sup_{\Lambda(V)}|\kappa|.$$

L'intégrale $\int_V\int_0^1\beta(X_t)\,dt\omega^n$ étant nulle, on a :

$$\left|\int_V\operatorname{angle}'\big(-,\{f_t\}\big)\omega^n-\int_V\operatorname{angle}\big(-,\{f_t\}\big)\omega^n\right|\leqslant\Big(4n+2\sup_{\Lambda(V)}|\kappa|\Big)\operatorname{vol}(V).$$

L'homogénéisé

$$\mathfrak{S}\big(\{f_t\}\big)=\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\int_V\operatorname{angle}\big(-,\{f_t\}^p\big)\omega^n$$

de notre quasi-morphisme ne dépend donc pas du choix de l'application φ, et donc pas de J. Il ne dépend pas non plus du choix de la 1-forme α (vérifiant $\alpha(X)=1$ et $d\alpha=\pi^*(s\omega)$). Nous calculons maintenant sa restriction sur les isotopies à support dans une boule $i:B\hookrightarrow V$.

PROPOSITION 3.4. – *Si l'isotopie $\{f_t\}$ est à support dans B, nous avons*

$$\mathfrak{S}\big(\{f_t\}\big)=\tau_{B,\omega}(f_1)+s\mathfrak{Cal}_B(f_1).$$

Preuve. – On fixe une trivialisation unitaire du fibré tangent au-dessus de B, et une trivialisation du fibré en cercles M au-dessus de B. On note λ la primitive de ω sur B telle que $\alpha=d(\frac{\ln z}{2i\pi})+s\lambda$ dans cette trivialisation (z désigne la coordonnée sur le cercle). L'application φ lue dans cette trivialisation est de la forme :

$$\begin{aligned}&B\times\Lambda\big(\mathbb{R}^{2n}\big)\to B\times S^1,\\&\qquad(x,L)\mapsto\big(x,e^{2i\pi\kappa(x,L)}\cdot\det{}^2_{\mathbb{R}^n}(L)\big)\end{aligned}$$

pour une application $\kappa:B\times\Lambda(\mathbb{R}^{2n})\to\mathbb{R}$. On considère alors une isotopie hamiltonienne (f_t) à support contenu dans un compact K de B, engendrée par le champ de vecteurs Z_t (avec $\iota_{Z_t}\omega=d\widetilde{H}_t$, où $\widetilde{H}_t$ est d'intégrale nulle sur V, constante hors de B). Nous avons d'une part :

$$\varphi\big(f_t(x),df_t\cdot L\big)=\big(f_t(x),e^{2i\pi\kappa(f_t(x),df_t\cdot L)}\cdot\det{}^2_{\mathbb{R}^n}(df_t\cdot L)\big)$$

et d'autre part :

$$\Theta(f_t)\big(\varphi(x,L)\big)=\big(f_t(x),e^{-2i\pi\int_0^t(s\lambda(Z_u)+s\widetilde{H}_u)(f_u(x))\,du}\cdot e^{2i\pi\kappa(x,L)}\cdot\det{}^2_{\mathbb{R}^n}(L)\big).$$

La valeur de $\operatorname{angle}(L,\{f_t\})$ est donc :

$$\Delta\big(\det{}^2_{\mathbb{R}^n}\big(df_t(x)\cdot L\big)\big)+\int_0^1\big(s\lambda(Z_t)+s\widetilde{H}_t\big)\big(f_t(x)\big)\,dt+\kappa\big(f_1(x),df_1(x)\cdot L\big)-\kappa(x,L).$$

En notant C le maximum de $|\kappa|$ sur $\operatorname{supp}(f) \times \Lambda(\mathbb{R}^{2n})$, on a alors :

$$\left| \operatorname{angle}\big(x, \{f_t\}\big) - \Delta\big(\det^2_{\mathbb{R}^n}\big(df_t(x) \cdot L\big)\big) - s \int_0^1 \big(\lambda(Z_t) + \widetilde{H}_t\big)\big(f_t(x)\big)\, dt \right| \leqslant 2C + 2n.$$

Hors de la boule B la fonction $\operatorname{angle}(x, \{f_t\})$ est égale à $-s\int_0^1 \widetilde{H}_t(f_t(x))\, dt$. En tenant compte de l'inégalité $|\Delta(\det^2_{\mathbb{R}^n}(df_t(x) \cdot L)) - \Phi(\{df_t(x)\})| \leqslant 2n$, nous obtenons :

$$\left| \int_V \operatorname{angle}\big(-, \{f_t\}\big)\nu^n - s \int_0^1 \int_B \lambda(Z_t)\, dt \nu^n - \int_B \Phi\big(\big\{df_t(x)\big\}\big)\nu^n \right| \leqslant (2C + 4n) \operatorname{vol}(B).$$

La même estimation reste vraie pour les itérés de f car leur support est contenu dans celui de f. Nous obtenons donc : $\mathfrak{S}(\{f_t\}) = s\int_0^1 \int_B \lambda(Z_t)\, dt\omega^n + \tau_{B,\nu}(f_1) = s\mathfrak{Cal}(f_1) + \tau_{B,\nu}(f_1)$. □

Remerciements

Étienne Ghys m'a proposé de réfléchir à ce sujet et m'a encouragé ; je le remercie pour tout cela. Je tiens également à remercier Emmanuel Giroux et Bruno Sévennec pour de nombreuses discussions. Enfin, je tiens à remercier vivement Leonid Polterovich qui m'a signalé une erreur dans une version antérieure du théorème 2.

RÉFÉRENCES

[1] ARNOLD V.I., On a characteristic class entering into conditions of quantization, *Funct. Anal. Appl.* **1** (1967) 1–14.

[2] ARNOLD V.I., The asymptotic Hopf invariant and its applications, *Sel. Math. Sov.* **5** (1986) 327–345.

[3] BANYAGA A., The group of diffeomorphisms preserving a regular contact form, in: *Topology and algebra, Proc. Colloq., Eidgenoss. Tech. Hochsch., Zurich, 1977*, in: Monograph. Enseign. Math., vol. **26**, Univ. Genève, 1978, pp. 47–53.

[4] BANYAGA A., Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique, *Comment. Math. Helv.* **53** (2) (1978) 174–227.

[5] BARGE J., GHYS É., Cocycles d'Euler et de Maslov, *Math. Ann.* **294** (2) (1992) 235–265.

[6] BAVARD C., Longueur stable des commutateurs, *Enseign. Math. (2)* **37** (1991) 109–150.

[7] BIRAN P., ENTOV M., POLTEROVICH L., Calabi quasimorphisms for the symplectic ball, *Commun. Contemp. Math.* **6** (2004) 793–802.

[8] BROOKS R., Some remarks on bounded cohomology, in: *Riemann Surfaces and Related Topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference, State Univ. New York, Stony Brook, NY, 1978*, in: Ann. of Math. Stud., Princeton University Press, Princeton, NJ, 1981, pp. 53–63.

[9] CALABI E., On the group of automorphisms of a symplectic manifold, in: *Problems in Analysis, Symposium in honour of S. Bochner*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970, pp. 1–26.

[10] DUPONT J., Bounds for the characteristic numbers of flat bundles, in: Lecture Notes in Math., vol. **763**, Springer, Berlin, 1979, pp. 109–119.

[11] EARLE C.J., EELLS J., A fibre bundle description of Teichmüller theory, *J. Differential Geom.* **3** (1969) 19–43.

[12] ENTOV M., Commutator length of symplectomorphisms, *Comment. Math. Helv.* **79** (2004) 58–104.

[13] ENTOV M., POLTEROVICH L., Calabi quasimorphism and quantum homology, *Int. Math. Res. Not.* **30** (2003) 1635–1676.

[14] GAMBAUDO J.-M., GHYS É, Commutators and diffeomorphisms of surfaces, *Ergodic Theory Dynamical Systems* **24** (5) (2004) 1591–1671.

[15] GHYS É, Groups acting on the circle, *Enseign. Math. (2)* **47** (2001) 329–407.
[16] GROMOV M., Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds, *Invent. Math.* **82** (1985) 307–347.
[17] GUICHARDET A., WIGNER D., Sur la cohomologie réelle des groupes de Lie simples réels, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **11** (1978) 277–292.
[18] KINGMAN J.F.C., Subadditive Processes, Lecture Notes in Math., vol. **539**, Springer, Berlin, 1976.
[19] MCDUFF D., SALAMON D., Introduction to Symplectic Topology, second ed., Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press/Oxford University Press, New York, 1998.
[20] OSELEDEC V.I., A multiplicative ergodic theorem, Ljapunov characteristic numbers for dynamical systems, *Trans. Moscow Math. Soc.* **19** (1968) 197–231.
[21] PY P., Quasi-morphisme de Calabi sur les surfaces de genre supérieur, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **341** (1) (2005) 29–34.
[22] REEB G., Sur les points singuliers d'une forme de Pfaff complètement intégrable ou d'une fonction numérique, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **222** (1946) 847–849.
[23] RUELLE D., Rotation numbers for diffeomorphisms and flows, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.* **42** (1) (1985) 109–115.
[24] SCHWARTZMAN S., Asymptotic cycles, *Ann. of Math. (2)* **66** (1957) 270–284.

(Manuscrit reçu le 13 juin 2005 ;
accepté, après révision, le 29 novembre 2005.)

Pierre PY
Unité de Mathématiques Pures et Appliquées,
UMR 5669 CNRS,
École Normale Supérieure de Lyon,
46, allée d'Italie,
69364 Lyon cedex 07, France
E-mail : pierre.py@umpa.ens-lyon.fr