

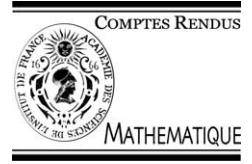


ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 419–424



Analyse numérique

# Résolution numérique d'un problème elliptique fortement anisotrope en deux dimensions par une méthode de paramétrisation

Philippe Guillaume<sup>a</sup>, Vladimir Latocha<sup>b</sup>

<sup>a</sup> MIP, UMR 5640 (CNRS-UPS-INSA), INSA de Toulouse, 135, avenue de Rangueil, 31077 Toulouse cedex 4, France

<sup>b</sup> Department of Aeronautics, Graduate School of Engineering, Kyoto University, 606-8501 Kyoto, Japon

Reçu le 2 février 2003 ; accepté après révision le 18 juillet 2003

Présenté par Olivier Pironneau

---

## Résumé

Nous introduisons une méthode pour résoudre un problème elliptique anisotrope en deux dimensions, en nous attachant au cas où la direction de l'anisotropie est variable, et où l'anisotropie est forte. Une méthode de volumes finis est mise en oeuvre pour résoudre le problème dans le cas où l'anisotropie est faible, et notre méthode de paramétrisation consiste à approcher la solution du problème anisotrope en résolvant une suite de problèmes isotropes. *Pour citer cet article : P. Guillaume, V. Latocha, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Numerical resolution of a highly anisotropic two-dimensional elliptic problem by a parameterization method.** We introduce a numerical method for solving an anisotropic elliptic problem. We address the case where the direction of the anisotropy varies, and the anisotropy is high. A finite volume scheme is implemented to solve the problem for small anisotropy ratio, then the parameterization method consists in devising an extrapolation of the solution of the anisotropic problem by combining solutions of a sequence of isotropic problems. *To cite this article: P. Guillaume, V. Latocha, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

---

## Abridged English version

Anisotropic elliptic problems appear in many areas, such as the oil reservoirs modelling, magnetized plasma physics, or semiconductor physics. We want to solve Eq. (1), subject to the boundary conditions (2), where the mobility matrix is anisotropic. We address here the case where the mobility matrix has variable principal directions (as opposed to [10] for instance), and the anisotropy is high.

To this purpose, we introduce a very simple finite volume scheme on a centered cell Cartesian grid [7]. As shown in [7], this scheme provides accurate results when the anisotropy ratio is small (say smaller than  $10^2$ ) but

---

Adresses e-mail : [Philippe.Guillaume@insa-tlse.fr](mailto:Philippe.Guillaume@insa-tlse.fr) (P. Guillaume), [latocha@gmm.insa-tlse.fr](mailto:latocha@gmm.insa-tlse.fr) (V. Latocha).

as the ratio increases, the error becomes unacceptably large. The physical problem that motivated our study [4] requires results for ratios as high as  $10^6$ , so we designed a parameterization method that allows us to approximate the solution  $W$  to a highly anisotropic problem by solving a sequence of isotropic problems.

The method is similar to computing the coefficients of a Taylor expansion. We introduce a parameter  $h$  in the anisotropic problem, in such a way that for  $h = 1$  the problem is unchanged, and when  $h$  is equal to the anisotropy ratio (which is supposed to be constant in the domain) we get an isotropic problem.

The terms (namely the matrix and the right-hand side) of the linear system obtained through the finite volume scheme depend on this parameter. Proposition 3.1 clarifies the dependency of these terms on  $h$ , and holds for quite general numerical schemes, provided some linearity conditions. The proposition shows that the coefficients of the series approximating  $W$  are solutions of linear systems discretizing an isotropic problem. Furthermore, the matrix of the linear systems is the same for all, and since we used a direct method for solving the linear systems, the cost of the computation of 50 or more terms of the series is not much greater than the first resolution only, which requires factorization.

Eventually, by perturbation methods we compute the solution to the limiting case where the anisotropy ratio goes to infinity. We write the problem (1), (2) in an appropriate coordinate system, and we obtain a one-dimensional diffusion equation whose coefficients are deduced from the coefficients of (1). This result should be compared to [9], where an error estimate was obtained for a very similar case. Then, we compare the approximation of this asymptotic solution to the solution obtained by the finite volume scheme on the one hand, and the solution constructed following Proposition 3.1 on the other hand. The result for a typical test case is given by Fig. 1, which shows that the parameterization method succeeds where the finite volume scheme we implemented fails to provide accurate results.

## 1. Introduction

Dans de nombreux domaines tels que la physique des plasmas magnétisés, la modélisation de fluides dans le sous-sol, ou encore la modélisation des semiconducteurs, les équations telles que l'équation de Poisson sont remplacées par des problèmes elliptiques anisotropes du fait des propriétés du milieu.

On trouvera dans [2,10] des exemples de discrétisation de ce genre de problèmes, où les directions propres de la matrice de mobilité sont en général fixées. Cette simplification permet de discrétiser assez précisément les dérivées croisées à l'aide d'une stratégie de maillage adaptée, comme dans [10] par exemple. Par ailleurs, pour résoudre le système linéaire issu de la discrétisation du problème, les méthodes itératives que nous avons testées ne convergent pas lorsque l'anisotropie est forte. A notre connaissance, les seuls succès enregistrés dans ce domaine s'appuient sur des méthodes multigrilles [11].

Notre objectif est de proposer une méthode pour résoudre les problèmes fortement anisotropes dans le cas où les directions propres de la matrice de mobilité sont variables, tout en conservant des maillages suffisamment lâches pour que le système linéaire obtenu soit accessible à une méthode directe. Nous avons mis en place un schéma volumes finis très simple pour approcher le problème anisotrope, qui fonctionne correctement lorsque le rapport d'anisotropie est inférieur à  $10^2$  [7]. Pour atteindre des rapports d'anisotropie plus élevés, nous approchons la solution du problème fortement anisotrope par une série dont les coefficients sont solutions d'une suite de problèmes isotropes. La discrétisation de ceux-ci font tous intervenir la même matrice, aussi le coût du calcul des termes de la série n'est pas beaucoup plus élevé qu'une seule factorisation de matrice. Cette Note a pour objet de présenter brièvement la méthode, dont le détail pourra être trouvé dans [5].

## 2. Un problème elliptique anisotrope

Soit un domaine bidimensionnel  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < L, R_0 < y < R_1\}$  où  $R_1 - R_0$  est du même ordre de grandeur que  $L$ . Nous notons les quatre segments du bord de  $\Omega$  :  $\partial\Omega_0 = \{(x, y) \in \bar{\Omega}, y = R_0\}$ ,  $\partial\Omega_1 = \{(x, y) \in \bar{\Omega}, y = R_1\}$ ,  $\partial\Omega_a = \{(x, y) \in \bar{\Omega}, x = 0\}$ ,  $\partial\Omega_c = \{(x, y) \in \bar{\Omega}, x = L\}$ .

Sur ce domaine on définit un champ de vecteurs  $B : (x, y) \in \overline{\Omega} \mapsto B(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . On note  $\theta(x, y)$  l'angle que forme  $B(x, y)$  avec l'axe des  $x$ , et  $P(\theta(x, y))$  la matrice de passage entre la base canonique et la base orthonormée dont le premier vecteur est aligné avec  $B(x, y)$ . L'anisotropie du problème est alors décrite par la matrice de conductivité

$$\sigma(x, y) = P(\theta(x, y)) \begin{bmatrix} \sigma_{\parallel}(x, y) & 0 \\ 0 & \sigma_{\perp}(x, y) \end{bmatrix} P(-\theta(x, y)),$$

et nous considérons le cas particulier où le rapport d'anisotropie  $\gamma(x, y) = \frac{\sigma_{\parallel}(x, y)}{\sigma_{\perp}(x, y)}$  est constant dans tout le domaine, i.e.  $\gamma(x, y) \equiv \bar{\gamma}$  (le cas où  $\gamma$  est variable sera présenté dans un travail ultérieur). Alors, la matrice de mobilité s'écrit :

$$\sigma(x, y) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} = P(\theta(x, y)) \sigma_{\perp}(x, y) \begin{bmatrix} \bar{\gamma} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P(-\theta(x, y)).$$

Notre objectif est, pour  $\bar{\gamma}$  grand ( $10^3$  et plus), de résoudre l'équation d'inconnue  $W$  :

$$\nabla \cdot \mathcal{J}(x, y) = S(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega, \quad \text{avec } \mathcal{J}(x, y) = -\sigma \nabla W(x, y) \tag{1}$$

soumise aux conditions aux limites :

$$\begin{aligned} W(x, y) &= W_a(y), & \forall (x, y) \in \partial\Omega_a, \\ W(x, y) &= W_c(y), & \forall (x, y) \in \partial\Omega_c, \\ (\mathcal{J}(x, y) \cdot e_y) &= 0, & \forall (x, y) \in \partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_1. \end{aligned} \tag{2}$$

### 3. Discrétisation et paramétrisation du problème anisotrope

Nous présentons ici la paramétrisation du problème anisotrope, qui nous a permis de contourner les difficultés numériques rencontrées par une méthode de volumes finis. La méthode que nous décrivons s'applique aussi bien à d'autres schémas numériques, sous réserves de certaines conditions de linéarité que nous énoncerons plus loin. Nous renvoyons à [6] pour une des premières applications des idées que nous utilisons ici.

Soit  $\overline{\mathcal{T}}$  un maillage (cartésien par exemple) de  $\overline{\Omega}$  et  $\mathcal{T} \subset \overline{\mathcal{T}}$  la partie du maillage ne contenant pas les points du bord. Nous notons  $f_{\mathcal{T}} = (f_i)_{i \in \mathcal{T}}$  le vecteur des valeurs en chacun des noeuds de  $\mathcal{T}$  d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$ . Ainsi,  $W_{\mathcal{T}}$  désigne le vecteur  $(W_i)_{i \in \mathcal{T}}$  destiné à approximer  $W(x, y)$  la solution de (1), (2), et  $\sigma_{\mathcal{T}}$  est le vecteur des matrices de conductivité sur les noeuds de  $\mathcal{T}$ . Soit à résoudre le système linéaire discrétisant (1), (2) :

$$AW_{\mathcal{T}} = b_{\mathcal{T}} - d_{\mathcal{T}}, \tag{3}$$

où  $A$  est la matrice du système linéaire obtenu grâce à un schéma volumes finis (par exemple),  $W_{\mathcal{T}}$  est la solution recherchée,  $b_{\mathcal{T}}$  est la prise en compte du second membre de (1) et  $-d_{\mathcal{T}}$  est la prise en compte des conditions de Dirichlet. Les tests que nous avons menés avec un schéma volumes finis relativement simple [3,7] montrent que la discrétisation (3) n'est pas adaptée lorsque le rapport d'anisotropie  $\bar{\gamma}$  devient grand [7], et la Fig. 1 donne un exemple de résultats non satisfaisants pour  $\bar{\gamma} = 10^6$ . Nous constatons dans [7] que la vitesse de convergence de la solution approchée – lorsque le pas du maillage tend vers zéro – est d'autant plus faible que  $\gamma$  est grand. Pour  $\bar{\gamma} = 10^6$ , l'erreur ne décroît quasiment pas et la solution du problème est donc hors d'atteinte.

Nous cherchons alors à contourner cette difficulté en nous ramenant à une suite de problèmes isotropes, dont la résolution est quant à elle correcte. Pour cela, multiplions  $\sigma_{\perp}$  par un paramètre  $h$  de sorte que  $h\sigma_{\perp} \approx \sigma_{\parallel}$ , et définissons la matrice de conductivité :

$$\tilde{\sigma}(h; x, y) = P(\theta(x, y)) \sigma_{\perp}(x, y) \begin{bmatrix} \bar{\gamma} & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix} P(-\theta(x, y)).$$

A cette matrice de conductivité est associé le problème  $\mathcal{P}(h)$ , déduit de (1), (2) en remplaçant  $\sigma(x, y)$  par  $\tilde{\sigma}(h; x, y)$ . Ainsi  $\mathcal{P}(1)$  est le problème de départ et  $\mathcal{P}(\bar{\gamma})$  est un problème isotrope.

Sur cette base, définissons les opérateurs :

$$\begin{aligned} A : \tilde{\sigma} &\mapsto (A_{ij})_{(i,j) \in \mathcal{T}^2}, \\ d : W_a, W_c, \tilde{\sigma} &\mapsto d_{\mathcal{T}} \end{aligned} \quad (4)$$

de sorte que la discrétisation de  $\mathcal{P}(h)$  s'écrit de manière plus précise :

$$A(\sigma(h))W_{\mathcal{T}} = b_{\mathcal{T}} - d_{\mathcal{T}}(W_a, W_c, \sigma(h)), \quad (5)$$

où les tildes sont omis pour alléger l'écriture.

Explicitons alors la dépendance par rapport à  $h$  de ce système linéaire, avec pour objectif de construire une approximation de la somme  $W_N(h; x, y) = \sum_{k=0}^N W^{(k)}(h_0; x, y) \frac{(h-h_0)^k}{k!}$ . Nous adoptons les hypothèses suivantes, qui concernent une large classe de schémas de discrétisation de (1), (2) :

**Hypothèse 3.1.** Soient  $A$  et  $d$  définis par (4). Nous supposons que  $\sigma \mapsto A(\sigma)$  et  $\sigma \mapsto d(W_a, W_c, \sigma)$  sont linéaires.

De ces hypothèses, il est aisé de déduire la

**Proposition 3.1.** Si  $W_{\mathcal{T}}$  se développe en puissances de  $(h - h_0)$  sous la forme  $W_{\mathcal{T}}(h) = \sum_{k=0}^{+\infty} W_{\mathcal{T}}^{(k)}(h_0) \frac{(h-h_0)^k}{k!}$  alors les vecteurs  $W_{k,\mathcal{T}} = \frac{W_{\mathcal{T}}^{(k)}(h_0)}{k!}$  sont solution de :

$$\begin{aligned} A(\sigma(h_0))W_{0,\mathcal{T}} &= b_{\mathcal{T}} - d_{\mathcal{T}}(W_a, W_c, \sigma(h_0)), \\ A(\sigma(h_0))W_{1,\mathcal{T}} &= -A(D\sigma)W_{0,\mathcal{T}} - d_{\mathcal{T}}(W_a, W_c, D\sigma), \\ A(\sigma(h_0))W_{k,\mathcal{T}} &= -A(D\sigma)W_{k-1,\mathcal{T}}, \quad k \geq 2, \end{aligned} \quad (6)$$

où l'on note  $D\sigma = P(\theta(x, y)) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\perp(x,y)} \end{bmatrix} P(-\theta(x, y))$ .

**Démonstration.** Substituons  $W_{\mathcal{T}}(h) = \sum_{k=0}^{+\infty} W_{\mathcal{T}}^{(k)}(h_0) \frac{(h-h_0)^k}{k!}$  et  $\sigma(h) = \sigma(h_0) + D\sigma \cdot (h - h_0)$  dans l'Éq. (5). En utilisant la linéarité de  $A$  et  $d$  par rapport à  $\sigma$  et en regroupant les facteurs de  $(h - h_0)^k$  la proposition en découle.  $\square$

Pour être plus explicite, la méthode consiste à résoudre  $N$  systèmes linéaires donnés par la Proposition 3.1 et de construire la série  $\sum_{k=0}^N W_{k,\mathcal{T}}(h_0)(h - h_0)^k$ . Remarquons que la résolution du système d'inconnue  $W_{k,\mathcal{T}}$  est nécessaire pour calculer le second membre du système d'inconnue  $W_{k+1,\mathcal{T}}$ , aussi nous résolvons les systèmes successivement. Notons de plus que tous les systèmes linéaires ont la même matrice  $A(\sigma(h_0))$ . Aussi, puisque nous utilisons une méthode directe, le coût du calcul de cinquante termes ou plus de la série n'est pas beaucoup plus élevé que la résolution du premier système, qui nécessite la factorisation de la matrice.

Nous montrerons dans [5] que la série converge au moins pour  $|h - h_0| < |h_0|$ . Ainsi, comme nous l'avons indiqué plus haut en introduisant la paramétrisation, choisir  $h = 1$  et  $h_0 = \bar{\gamma}$  permet d'extrapoler la solution du problème anisotrope en résolvant une suite de problèmes isotropes. Remarquons que  $h = 1$  est situé à l'intérieur du domaine de convergence car on cherche à résoudre le cas  $\bar{\gamma}$  grand et donc  $h_0 = \bar{\gamma} > 1$ .

Notons ici que nous avons fait l'hypothèse que le rapport d'anisotropie est constant dans tout le domaine, ainsi il suffit de paramétrer une seule des deux valeurs propres de la matrice de mobilité pour obtenir un problème partout isotrope. Dans un travail ultérieur, nous présenterons l'extension de notre méthode au cas où le rapport d'anisotropie varie, et pour cela il faudra paramétrer les deux valeurs propres de sorte à contrôler leur quotient. Par ailleurs, le problème physique à l'origine de cette étude [4] mène à des matrices de mobilité symétriques, et ainsi à une base orthogonale de vecteurs propres, mais nous ne voyons pas d'obstacle à appliquer la méthode que nous présentons dans cette Note à des cas où les directions propres ne sont pas orthogonales. Il faudra toutefois vérifier le bon comportement de la méthode numérique si les directions propres sont proches.

#### 4. Solution asymptotique et test de la méthode

Pour tester la méthode de paramétrisation, nous avons besoin d’une solution de référence. Pour cela, nous menons une analyse asymptotique du problème (1), (2) pour  $\bar{\gamma} \rightarrow +\infty$ . Le problème que nous examinons est à rapprocher de [9], et pour les références bibliographiques et le traitement de cas plus généraux, nous renvoyons à [1].

Afin de limiter le champ de l’étude, nous choisissons une configuration du champ  $B(x, y)$  cohérente avec un sujet d’étude issu de la physique des plasmas [4], dont les lignes de champ sont représentées dans la Fig. (1). Avec cette configuration, on peut définir un nouveau système de coordonnées  $(\alpha, \beta)$ ,  $\alpha$  étant la variable orthogonale au champ  $B$  et  $\beta$  la variable le long de ce champ. Les lignes de champ étant les lignes  $\alpha = k \in \mathbb{R}$ , on note  $\mathcal{C}(\alpha)$  la portion de courbe  $\bar{\Omega} \cap \{(\alpha, \beta), \beta \in \mathbb{R}\}$ . Alors on note  $\alpha_c$  la valeur de  $\alpha$  telle que  $\mathcal{C}(\alpha_c) = \partial\Omega_c$ , et  $\alpha_a$  est telle que  $\alpha \leq \alpha_a \Rightarrow \mathcal{C}(\alpha) \cap \partial\Omega_a \neq \emptyset$ . Enfin, les extrémités de  $\mathcal{C}(\alpha)$  sont notées  $(\alpha, \beta_0(\alpha))$  et  $(\alpha, \beta_1(\alpha))$ .

Nous examinons la limite où  $\frac{1}{\varepsilon} = \bar{\gamma}$  tend vers l’infini. En introduisant le développement de Hilbert  $W(\alpha, \beta) = W_0(\alpha, \beta) + \varepsilon W_1(\alpha, \beta) + \dots$  dans le problème ainsi traduit, par des techniques classiques d’analyse asymptotique [8] nous obtenons la proposition suivante :

**Proposition 4.1.** *Si  $W_a(y) \equiv w_a \in \mathbb{R}$ , et  $W_c(y) \equiv w_c \in \mathbb{R}$ , alors*

- (i)  $\forall (\alpha, \beta) \in \Omega, \partial W_0 / \partial \beta = 0$ ,
- (ii) pour  $\alpha < \alpha_a, (\alpha, \beta) \in \Omega \Rightarrow W_0(\alpha) = w_a$ ,
- (iii) pour  $\alpha \geq \alpha_a, W_0(\alpha)$  est soumise à l’équation de diffusion unidimensionnelle :

$$-\frac{d}{d\alpha} \left( \mathbb{D}(\alpha) \frac{d}{d\alpha} W_0(\alpha) \right) = \int_{\beta_0(\alpha)}^{\beta_1(\alpha)} \frac{S(\alpha, \beta)}{|B(\alpha, \beta)|^2} d\beta$$

munie des conditions aux limites  $W_0(\alpha_a) = w_a$  et  $W_0(\alpha_c) = w_c$ , où  $\mathbb{D}(\alpha) = \int_{\beta_0(\alpha)}^{\beta_1(\alpha)} \sigma_{\perp}(\alpha, \beta) d\beta$ .

On trouvera le calcul menant à cette proposition dans [5], et dans [9] on trouve une estimation d’erreur pour un problème suffisamment proche pour que les résultats soient applicables à notre cas. Notons que la géométrie que

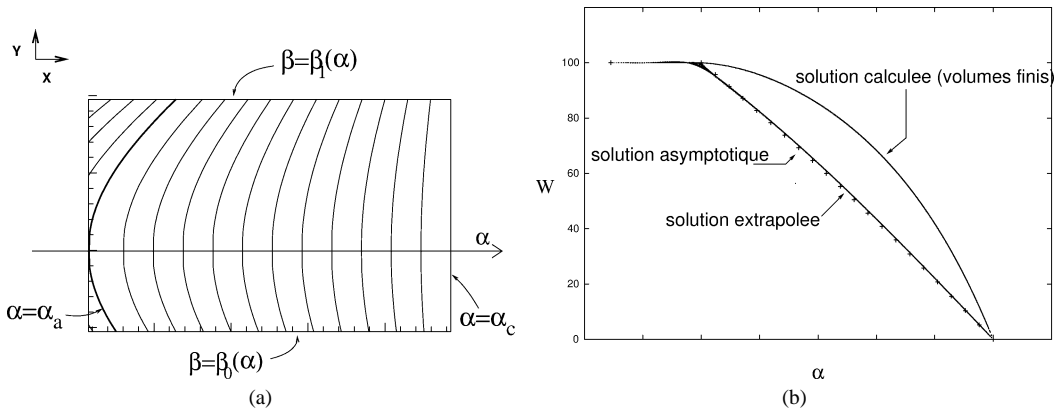


Fig. 1. (a) Domaine et lignes de champ choisies. (b) Pour  $\bar{\gamma} = 10^6$  et un maillage  $200 \times 200$ , comparaison entre la solution de référence, la solution obtenue par le schéma volumes finis que nous avons testé [7], et la solution extrapolée grâce au résultat de la Proposition 3.1 en sommant 53 termes de la série.

Fig. 1. (a) Chosen domain and field lines. (b) For  $\bar{\gamma} = 10^6$  and a  $200 \times 200$  grid the comparison between the reference solution and the solution obtained by the finite volume we tested, [7], and the extrapolated solution coming from Proposition 3.1, summing 53 terms of the series.

nous avons choisie implique que toutes les lignes de champ rencontrent les bords  $\partial\Omega_0$  ou  $\partial\Omega_1$ , ce qui nous donne le résultat (i) sur tout le domaine. Par suite, la condition de Dirichlet détermine la solution sur les lignes de champ qui rencontrent  $\partial\Omega_a$  d'une part, et  $\partial\Omega_0$  ou  $\partial\Omega_1$  d'autre part.

Les solutions obtenues sur le domaine  $(x, y) \in \Omega$  – à savoir la solution extrapolée grâce au résultat de la Proposition 3.1 et la solution calculée par le schéma volumes finis – sont projetées sur un plan  $\beta = Cte$  et comparées à la solution asymptotique  $W_0(\alpha)$ . Nous avons choisi le cas test suivant :

- $\sigma_{\perp}$  et  $\sigma_{\parallel}$  sont constantes dans tout le domaine,  $\bar{\gamma} = 10^6$ ,
- $S(\alpha, \beta)$  est typique de simulations d'une situation physique existante [4],
- $w_a = 100$  et  $w_c = 0$  (en valeurs adimensionnées).

En sommant 53 termes de la série définie par la Proposition 3.1 (on observe qu'au-delà, pour  $\bar{\gamma} = 10^6$ , l'erreur ne décroît plus pour des raisons numériques [5]), nous obtenons la solution représentée dans la Fig. 1. Nous obtenons un bon degré de précision grâce à la méthode de paramétrisation, alors que le schéma volumes finis que nous avons choisi (cf. [7]) aboutit à des résultats (de l'ordre de 30 % pour un maillage  $200 \times 200$ ) lorsque le rapport d'anisotropie est aussi élevé [7]. Qui plus est, en appliquant la méthode de paramétrisation sur un maillage  $100 \times 100$ , nous obtenons quasiment le même degré de précision (l'erreur  $l^\infty$  varie de moins de  $10^{-3}$ ) pour un coût de calcul nettement réduit. Nous étudierons le domaine d'application de la méthode dans [5].

## Remerciements

Nous souhaitons remercier le professeur Kazuo Aoki et Pierre Degond pour leur aide précieuse, ainsi que Jean Pierre Boeuf, Laurent Garrigues, et Jérôme Bareilles pour avoir invité à cette étude. Nous remercions également le rapporteur pour ses questions et remarques constructives. Enfin, une partie de ce travail a reçu le soutien de la Japanese Society for the Promotion of Science par le biais d'un financement post-doctoral.

## Références

- [1] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, Vol. II: Theory of Plates*, North-Holland, 1997.
- [2] P.I. Crumpton, G.J. Shaw, A.F. Ware, Discretisation and multigrid solution of elliptic equations with mixed derivative terms and strongly discontinuous coefficients, *J. Comput. Phys.* 166 (1995) 343–358.
- [3] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin, *Finite Volume Methods*, in: *Handbook of Numerical Analysis*, P.G. Ciarlet, J.-L. Lions (Eds.), North-Holland.
- [4] L. Garrigues, *Modélisation d'un propulseur à plasma stationnaire pour satellites*, Thèse de doctorat de l'université Paul Sabatier, Toulouse, 1998.
- [5] Ph. Guillaume, V. Latocha, Numerical convergence of a parameterization method for the resolution of a highly anisotropic two-dimensional elliptic problem, en préparation.
- [6] Ph. Guillaume, M. Masmoudi, Solution to the time-harmonic Maxwell's equations in a waveguide, use of higher order derivatives for solving the discrete problem, *SIAM J. Numer. Anal.* 34 (4) (1997) 1306–1330.
- [7] V. Latocha, *Deux problèmes en transport des particules chargées intervenant dans la modélisation d'un propulseur ionique*, Thèse de doctorat de l'INSA Toulouse, INSA de Toulouse, 2001.
- [8] A. Nayfeh, *Perturbation Methods*, Wiley, 1973.
- [9] A. Sili, Asymptotic behaviour of the solutions of monotone problems in flat cylinders, *Asymptotic Anal.* 19 (1999) 1.
- [10] D. Thangaraj, A. Nathan, A rotated monotone difference scheme for the two dimensional anisotropic drift diffusion equation, *J. Comput. Phys.* 145 (1998) 445–461.
- [11] G. Wittum, Robust Interface Reduction for Highly Anisotropic Elliptic Equations, in: *Multigrid Methods, Vol. V*, Springer, 1998.