

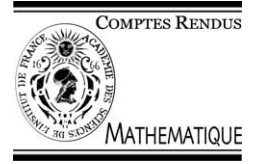


ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 387–392



Équations aux dérivées partielles

# Diffraction d'une onde électromagnétique par un dièdre infini absorbant

Jeanne-Marie Caron

CMAT, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France

Reçu le 22 janvier 2003 ; accepté le 3 juin 2003

Présenté par Gilles Lebeau

## Résumé

On étudie la diffraction des ondes électromagnétiques par un dièdre infini constitué de matériau diélectrique absorbant. A cette fin, en suivant la technique de Croisille et Lebeau (Lecture Notes in Math., Vol. 1723, Springer, 1999), on étudie le problème stationnaire de Maxwell couplé vide-diélectrique avec une condition sortante dans le vide, que l'on ramène à un système d'opérateurs de bord appelé système de Caldéron. On montre que ce système est équivalent au problème stationnaire pour certaines classes de données et on étudie sa solution (fonction spectrale) lorsque les données sont les traces sur le dièdre d'une onde monochromatique plane. On donne le premier terme du développement asymptotique à haute fréquence du signal diffracté à une distance fixe de l'arête, hors de certaines directions d'incidence. *Pour citer cet article : J.-M. Caron, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Diffraction of electromagnetic waves by an absorbing infinite wedge.** We study the diffraction of electromagnetic waves by an infinite wedge of dielectric material. For this aim we consider the stationary coupled vacuum-dielectric Maxwell equations with an outgoing condition in the vacuum. We show the equivalence of the latter problem to a Caldéron boundary operator system for particular classes of incoming data. We study the solutions of this system in the case of traces of monochromatic plane waves. In particular, we give the asymptotics of the diffracted signal in high frequency regime at a given point with fixed distance to the boundary and away from some incident directions. *To cite this article: J.-M. Caron, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abridged English version

Let us consider a wedge in  $\mathbb{R}^3$  with angle  $\gamma$ . We call  $F$  its interior and  $\Omega$  its complementary. We call outgoing waves of the Maxwell problem in the vacuum the boundary value when  $\varepsilon \rightarrow 0$  of a solution of (1) below, where  $\tilde{\omega} = \omega - i\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\omega \in \mathbb{R}^*$ . We introduce the spaces  $\widetilde{H}_{\xi_3}^+$ ,  $H_{\text{div}\xi_3}^+$ ,  $H_{\text{div}}^+$ ,  $\mathcal{A}_{\xi_3}$  and  $\mathcal{A}$  defined by (2)–(5) below.

Adresse e-mail : [jmcaron@math.polytechnique.fr](mailto:jmcaron@math.polytechnique.fr) (J.-M. Caron).

1631-073X/\$ – see front matter © 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

doi:10.1016/S1631-073X(03)00350-9

We are interested in the computation of the diffracted signal at a given point at fixed distance to the boundary, in terms of the incidence angle. We did this away from some incident directions which are characterized by the hypothesis (6) below on the Fourier transform of the data. Hence, the study reduces to considering the transmission problem (7) below,  $\omega$  being fixed in  $\mathbb{R}^*$ .

We restrict ourselves to the case  $\omega > 0$ , since the case  $\omega < 0$  follows from the previous one. We obtain the operator characterizing the Caldéron system for outgoing solutions, which we denote by  $\mathcal{P}_\gamma(\omega, \xi_3)$ , by formally taking the limit on the systems deduced from the perturbed problems.

By construction, any field  $(E^\Omega, H^\Omega, E^F, H^F)$  given by (11) (in the parametrization of  $\Gamma^+$ , for  $W = E$  or  $H$ ,  $D = \Omega$  or  $F$ ) with  $(\hat{j}^\Omega, \hat{j}^F)$  solution of the Caldéron system, satisfy (7). We prove the following results:

**Theorem 0.1.**

- (i) The operator  $\mathcal{P}_\gamma(\omega)$  is bijective on  $\{(j^\Omega, j^F) \in (H_{\text{div}}^+)^2; (j^\Omega, j^F) \text{ satisfying } H\}$  and on  $\mathcal{A}$ .
- (ii) The problem (7) has a unique solution described by (11).

We give the expression of the solution  $(j^\Omega(\cdot, \omega), j^F(\cdot, \omega))$  for incident monochromatic plane wave defined in (12) below.

**Proposition 0.2.** *The spectral function  $j$  relative to (12) decomposes for  $D = \Omega$  or  $F$  as*

$$j_j^D(\zeta) = \frac{K_{j,1}^D}{i(\zeta - \alpha_{j,1,1})} + \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^p \frac{K_{j,p,q}^D}{i(\zeta - \alpha_{j,p,q})} + \tilde{j}_j^D(\zeta),$$

where  $(\tilde{j}_j^\Omega, \tilde{j}_j^F)$  is a solution of the Caldéron system (8) with a given second term in  $\mathcal{H}_{\text{div} \tilde{k}_3}^+$ . In the above decomposition the constants  $\alpha_{j,p,q}$  and  $K_{j,p,q}^I$  are determined by the induction formulas (13), (14).

We deduce the following result on the regularity as well as the principal term of the diffracted signal at a fixed point at distance 1 from the boundary:

**Corollary 0.3.**

- (1)  $j_j^\Omega(\xi_1 - i0^-, \omega)$  is analytic outside the interval  $[-\sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - k_3^2}, \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - k_3^2}]$ .
- (2) Let  $a = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 - k_3^2}$ . At a point  $M$  of coordinates  $(\cos \theta, \sin \theta, x_3)$  such that  $a \cos \theta$  is not a pole of  $j_\pm^\Omega(\cdot, 1)$ , the diffracted signal (11) can be written under the form  $W(s, t, x_3, \omega) = e^{i\omega x_3 k_3} W_d(s, t, \omega) + e^{i\omega x_3 k_3} W_p(s, t, \omega)$  for  $W = E$  or  $H$ . The quantity  $e^{i\omega x_3 k_3} W_p(s, t, \omega)$  is the contribution of the poles of the spectral function (only those in the domain  $\{a \cos z, \text{Re } z \in ]0, \theta[ \}$  have a non vanishing contribution). The first term of the asymptotic expansion of  $W_d(s, t, \omega)$  for large values of  $\omega$  is

$$\frac{e^{ia\omega - i\pi/4}}{(4\pi a\omega)^{1/2}} (B_W(a \cos \theta, a \sin \theta, k_3) j_+^\Omega(a \cos \theta, 1) + B_W(a \cos(\theta + \gamma), a \sin(\theta + \gamma), k_3) \times j_-^\Omega(a \cos(\theta + \gamma), 1)).$$

Furthermore we have the homogeneous relation  $e^{-i\omega k_3 x_3} W(rs, rt, x_3, \omega) = e^{-i\omega k_3 x_3} W(s, t, x_3, r\omega)$ .

### 1. Notations et définitions

Le bord du dièdre est paramétré par  $\Gamma = \{s\tau_+ + x_3e_3, (s, x_3) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\} \cup \{s\tau_- + x_3e_3, (s, x_3) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\} = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$ . On nomme  $F$  son intérieur,  $\gamma$  son angle d'ouverture et  $\Omega$  son complémentaire. On désigne par  $(z)^{1/2}$  la racine à partie réelle négative de  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ . Les quantités  $\varepsilon_0, \mu_0$  (resp.  $\varepsilon, \mu$ ) sont les constantes diélectriques du vide (resp. du milieu absorbant). L'angle  $\delta_{\xi_3}$  est défini par  $\delta_{\xi_3} = \min(\arg(\omega^2\varepsilon\mu - \xi_3^2)^{1/2}; (\omega^2\varepsilon_0\mu_0 - \xi_3^2)^{1/2})$ . On note  $\xi_0^{\varepsilon\mu, \xi_3}$  la fonction analytique définie sur  $\mathbb{C} \setminus \{\pm R(\omega^2\varepsilon\mu - \xi_3^2)^{1/2}; R \geq 1\}$  par  $(\omega^2\varepsilon\mu - \xi_3^2 - \xi_1^2)^{1/2}$  et sur  $\{\pm R(\omega^2\varepsilon\mu - \xi_3^2)^{1/2}; R > 1\}$  par  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\omega^2\varepsilon\mu - \xi_3^2 - \xi_1^2 e^{i\varepsilon})^{1/2}$ . On appelle onde sortante du problème de Maxwell dans le vide, la valeur au bord pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  de la solution du problème perturbé suivant, où  $\tilde{\omega} = \omega - i\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0, \omega \in \mathbb{R}^*$

$$\text{Rot } E - i\tilde{\omega}\mu_0 H = 0, \quad \text{Rot } H + i\tilde{\omega}\varepsilon_0 E = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad n \wedge E|_{\partial\Omega} = m(\omega). \tag{1}$$

Soit  $H^+ = \{u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^-), \sup_{b < 0} \int_{\mathbb{R}} |u(x + ib)|^2 dx < \infty\}$ . On définit les espaces suivants

$$\widetilde{H}_{\xi_3}^+ = \left\{ u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^-); \exists \delta, \exists C > 0; u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^- \cup B(-\xi_0^{\varepsilon_0\mu_0, \xi_3}(0), \delta)), \sup_{\theta \in ]-\pi; 0[} \int_{r > C} |u(r e^{i\theta})|^2 dr < \infty \right\}, \tag{2}$$

$$H_{\text{div}\xi_3}^+ = \left\{ (u_+, u_-) \in (H^+)^2 \times (H^+)^2; \mathcal{F}(1_{x>0}(\partial_x \hat{u}_{\pm,1}(x) + i\xi_3 \hat{u}_{\pm,3}(x))) \in H^+, \right. \\ \left. \text{tels que } \hat{u}_{+,1}(0) = -\hat{u}_{-,1}(0), \right. \tag{3}$$

$$H_{\text{div}}^+ = u \in L^2(\mathbb{R}_{\xi_3}; H_{\text{div}\xi_3}^+),$$

$$\mathbb{U}_{\delta_{\xi_3}} = \mathbb{C} \setminus \{z, \arg z \in [\delta_{\xi_3}, \pi], |z| \geq \min(|\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - \xi_3^2}|, |\sqrt{\omega^2\varepsilon_0\mu_0 - \xi_3^2}|)\},$$

$$\mathcal{H}_{\text{div}\xi_3}^+ = \{u \in \mathcal{O}(\mathbb{U}_{\delta_{\xi_3}}); \forall \theta \in [0, \delta_{\xi_3}[ u(\xi_1 e^{i\theta}, \xi_3) \in H_{\text{div}\xi_3}^+\},$$

$$\mathcal{A}_{\xi_3} = \left\{ (u_+, u_-) \in (\widetilde{H}_{\xi_3}^+)^2 \times (\widetilde{H}_{\xi_3}^+)^2; \mathcal{F}(1_{x_1>0}(\partial_{x_1} \hat{u}_{\pm,1}(x_1) + i\xi_3 \hat{u}_{\pm,3}(x_1))) \in \widetilde{H}_{\xi_3}^+, \right. \\ \left. \text{tels que } \hat{u}_{+,1}(0) = -\hat{u}_{-,1}(0), \right. \tag{4}$$

$$\mathcal{A} = \{u \in (\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2))^2 \times (\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2))^2; \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_{x_3}) \widehat{\varphi u}(\xi_3, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}_{\xi_3}; \mathcal{A}_{\xi_3})\}. \tag{5}$$

### 2. Résultats

On s'intéresse au calcul du signal diffracté à une distance fixée de l'arête, en fonction de l'angle d'incidence sur le dièdre, hors des directions

$$\mathbf{k} = a\tau_+ + b\tau_- + ce_3; \quad a \leq 0, b \leq 0.$$

Cette restriction sur la propagation des ondes incidentes permet de faire l'hypothèse suivante sur les transformées de Fourier des données

$$\begin{cases} \text{pour tout } (\omega, \xi_3) \text{ vérifiant } \omega^2\varepsilon_0\mu_0 - \xi_3^2 > 0, \text{ il existe } 0 < \delta < \sqrt{\omega^2\varepsilon_0\mu_0 - \xi_3^2}, \text{ tel que} \\ u(\omega, \cdot, \xi_3) \in \mathcal{O}(B(-\xi_0^{\varepsilon_0\mu_0, \xi_3}(0), \delta)). \end{cases} \tag{6}$$

L'étude porte donc sur le problème de transmission suivant,  $\omega$  étant fixé dans  $\mathbb{R}^*$

$$\begin{cases} \text{Rot } E - i\omega\mu_0 H = 0, & \text{Rot } H + i\omega\varepsilon_0 E = 0, & (E, H) \text{ « sortante » dans } \Omega, \\ \text{Rot } E - i\omega\mu H = 0, & \text{Rot } H + i\omega\varepsilon E = 0 & \text{dans } F, \\ [n \wedge E] = -n \wedge E_{\text{inc}}, & [n \wedge H] = -n \wedge H_{\text{inc}} \in \mathcal{A} \subset H_{\text{loc}}(\text{Div}, \Gamma). \end{cases} \tag{7}$$

On se restreint au cas où  $\omega > 0$ , le cas  $\omega < 0$  s'en déduisant. On obtient l'opérateur relatif au système de Caldéron pour les solutions sortantes, noté  $\mathcal{P}_\gamma(\omega, \xi_3)$  par un passage à la limite formel sur les systèmes obtenus à partir des problèmes perturbés par  $\omega \rightarrow \omega e^{-i\delta}$ ,  $\delta > 0$ . Il s'écrit

$$\mathcal{P}_\gamma(\omega, \xi_3)(\zeta) \begin{pmatrix} j^\Omega \\ j^F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}^+(\omega, \xi_3)j_+(\zeta) + C_\gamma^+(\omega, \xi_3)j_-(\zeta) \\ C_\gamma^-(\omega, \xi_3)j_+(\zeta) + \mathcal{D}^-(\omega, \xi_3)j_-(\zeta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^+ \\ v^- \end{pmatrix}, \tag{8}$$

avec  $j_\pm = (j_\pm^\Omega, j_\pm^F)$  et  $v^\pm = (-n \wedge E_{\text{inc}}^\pm, -n \wedge H_{\text{inc}}^\pm)$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\pm(\omega, \xi_3)j(\zeta) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\xi_1 - \zeta} D^\pm(\omega, \xi_1, \xi_0^{\varepsilon_0\mu_0}, \xi_0^{\varepsilon\mu}, \xi_3)j(\xi_1) \frac{d\xi_1}{2\pi}, \\ C_\gamma^\pm(\omega, \xi_3)j(\zeta) &= \int_{\mathbb{R}} C_\gamma^\pm(\omega, \xi_1, \xi_0^{\varepsilon_0\mu_0}, \xi_0^{\varepsilon\mu}, \xi_3)R_\gamma(\xi_1, \xi_0^{\varepsilon_0\mu_0}, \xi_0^{\varepsilon\mu})j(\xi_1) \frac{d\xi_1}{2\pi}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$R_\gamma(\xi_1, \xi_0^{\varepsilon_0\mu_0}, \xi_0^{\varepsilon\mu}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_\gamma(\xi_1, -\xi_0^{\varepsilon_0\mu_0}) - \zeta} \text{Id} & 0 \\ 0 & \frac{1}{g_\gamma(\xi_1, -\xi_0^{\varepsilon\mu}) - \zeta} \text{Id} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Les matrices  $C_\gamma^\pm$  et  $D^\pm$  sont de dimension quatre, homogènes par rapport à  $(\omega, \xi_1, \xi_3)$ , de degré au plus deux, singulières en  $1/\xi_0$ . La fonction  $g_\gamma$  est définie par  $g_\gamma(x, y) = x \cos \gamma - y \sin \gamma$ .

Soit  $\Gamma_0$  un contour comme dans [1]. Par construction, tout champ  $(E^\Omega, H^\Omega, E^F, H^F)$  défini (dans le paramétrage de  $\Gamma^+$ , pour  $W = E$  ou  $H$ ,  $D = \Omega$  ou  $F$ ) par

$$\begin{aligned} W^D(s, t, x_3, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma_0} (e^{i(s\xi_1 + |t|\xi_0^{\varepsilon\mu, \xi_3} + x_3\xi_3)} B_W(j_+^D)(\xi_1, \text{sgn}(t)\xi_0^{\varepsilon\mu, \xi_3}, \xi_3) \\ &\quad + e^{i(g(s,t)\xi_1 + |g(t,-s)|\xi_0^{\varepsilon\mu, \xi_3})} B_W(j_-^D)(\xi_1, \text{sgn}(g(t,-s))\xi_0^{\varepsilon\mu, \xi_3}, \xi_3)) d\xi_1 d\xi_3, \\ B_E(j)(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= i\omega\mu j(\xi_1, \xi_3) - \frac{1}{i\omega} \vec{\xi} (\vec{\xi} \cdot j)(\xi_1, \xi_3), \quad B_H(j)(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -i\vec{\xi} \wedge j(\xi_1, \xi_3) \end{aligned} \tag{11}$$

avec  $(\hat{j}^\Omega, \hat{j}^F)$  solution de (8), vérifie (7). Nous démontrons les résultats suivants :

**Théorème 2.1.**

- (i) L'opérateur  $\mathcal{P}_\gamma(\omega)$  est bijectif sur  $\{(j^\Omega, j^F) \in (H_{\text{div}}^+)^2; (j^\Omega, j^F) \text{ vérifient } H\}$  et sur  $\mathcal{A}$ .
- (ii) Le problème (7) possède une unique solution décrite par (11).

On donne alors l'expression de la solution  $(j^\Omega(\cdot, \omega), j^F(\cdot, \omega))$  pour l'onde monochromatique plane incidente

$$E_{\text{inc}} = E_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot x + \omega t)}, \quad H_{\text{inc}} = H_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot x + \omega t)}, \quad E_0 \cdot H_0 = 0, \quad \tilde{\mathbf{k}} = \omega \mathbf{k}, \quad \varepsilon_0 \mu_0 - |\mathbf{k}|^2 = 0. \tag{12}$$

**Proposition 2.2.** La fonction spectrale  $j$  relative à (12) se décompose pour  $D = \Omega$  ou  $F$  en

$$j_j^D(\zeta) = \frac{K_{j,1}^D}{i(\zeta - \alpha_{j,1,1})} + \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^p \frac{K_{j,p,q}^D}{i(\zeta - \alpha_{j,p,q})} + \tilde{j}_j^D(\zeta),$$

où  $(\tilde{j}_j^\Omega, \tilde{j}_j^F)$  est la solution du système de Caldéron (8) pour un second membre donné dans  $\mathcal{H}_{\text{div } \tilde{\mathbf{k}}_3}^+$ . L'entier  $N$  est donné par  $N = \lfloor \theta_0/\gamma \rfloor$  pour  $\theta_0 = \sup(|\theta_+|; |\theta_-|)$  avec  $\theta_+ = (-\tau_+; \mathbf{k})$  et  $\theta_- = (-\tau_-; \mathbf{k})$  dans  $]-\pi, \pi[$ . Dans cette décomposition les constantes  $\alpha_{j,p,q}$  et  $K_{j,p,q}^I$  sont déterminées par les relations de récurrence (13), (14) :

$$\begin{cases} \alpha_{+,1,1} = (\tau_+, \mathbf{k}), & \alpha_{-,1,1} = (\tau_-, \mathbf{k}), \\ \alpha_{\pm,p,q} = g(\alpha_{\mp,p-1,q}, -\xi_0^{\varepsilon_0\mu_0}(\alpha_{\mp,p-1,q})) \quad \forall q \in \{1, \dots, p-1\}, \\ \alpha_{\pm,p,p} = \alpha_{\pm,p} = g(\alpha_{\mp,p-1,p-1}, -\xi_0^{\varepsilon\mu}(\alpha_{\mp,p-1,p-1})), \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} K_{\pm,1,1}^{\Omega} \\ K_{\pm,1,1}^F \end{pmatrix} = -D_+^{-1}(\alpha_{\mp,1,1}) \begin{pmatrix} n_{\pm} \wedge E_0 \\ n_{\pm} \wedge H_0 \end{pmatrix}, \\ K_{\pm,p,q}^{\Omega} = \frac{1}{\xi_0(\alpha_{\mp})} c_H(\alpha_{\mp}, -\xi_0^{\varepsilon_0\mu_0}(\alpha_{\mp})) K_{\mp,p-1,q}^{\Omega}; \quad K_{\pm,p,q}^F = 0 \quad \forall q \in \{1, \dots, p-1\}, \\ \begin{pmatrix} K_{\pm,p,p}^{\Omega} \\ K_{\pm,p,p}^F \end{pmatrix} = -\frac{1}{\Delta(\alpha_{\pm,p})} \begin{pmatrix} -2A(\alpha_{\pm,p}) \frac{c_E^{\varepsilon\mu}(\alpha_{\mp,p-1}, \xi_0^{\varepsilon\mu}(\alpha_{\mp,p-1}))}{\xi_0^{\varepsilon\mu}(\alpha_{\mp,p-1})} K_{\mp,p-1,p-1}^F \\ -A(\alpha_{\pm,p}) \tilde{A}(\alpha_{\pm,p}) \frac{c_H(\alpha_{\mp,p-1}, \xi_0^{\varepsilon\mu}(\alpha_{\mp,p-1}))}{\xi_0^{\varepsilon\mu}(\alpha_{\mp,p-1})} K_{\mp,p-1,p-1}^F \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (14)$$

où  $A$  et  $\tilde{A}$  sont les matrices définies par

$$A(\xi) = \frac{1}{\xi_0^{\varepsilon_0\mu_0}(\xi)} d_E^{\varepsilon_0\mu_0}(\xi) + \frac{1}{\xi_0^{\varepsilon\mu}(\xi)} d_E^{\varepsilon\mu}(\xi), \quad \tilde{A}(\xi) = \frac{1}{\xi_0^{\varepsilon_0\mu_0}(\xi)} d_E^{\varepsilon_0\mu_0}(\xi) - \frac{1}{\xi_0^{\varepsilon\mu}(\xi)} d_E^{\varepsilon\mu}(\xi)$$

et  $c_{E,\gamma}^{\varepsilon\mu}, d_E^{\varepsilon\mu}, c_H$  par  $d_E^{\varepsilon\mu} = c_{E,0}^{\varepsilon\mu}$

$$c_{E,\gamma}^{\varepsilon\mu}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\omega\varepsilon} \begin{pmatrix} -\xi_1\xi_3 & \omega^2\varepsilon\mu - \xi_3^2 \\ -\omega^2\varepsilon\mu \cos(\gamma) + g(\xi_1, -\xi_2)\xi_1 & g(\xi_1, -\xi_2)\xi_3 \end{pmatrix} c_H(\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} \xi_2 & 0 \\ \sin(\gamma)\xi_3 & g(\xi_2, \xi_1) \end{pmatrix}.$$

On en déduit le résultat de régularité suivant et le terme principal du signal diffracté en un point à distance 1 de l'arête :

**Corollaire 2.3.**

- (1)  $j_+^{\Omega}(\xi_1 - i0^-, \omega)$  est analytique en dehors de l'intervalle  $[-\sqrt{\omega^2\varepsilon_0\mu_0 - k_3^2}, \sqrt{\omega^2\varepsilon_0\mu_0 - k_3^2}]$ .
- (2) Soit  $a = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0 - k_3^2}$ . En un point  $M$  de coordonnées  $(\cos\theta, \sin\theta, x_3)$  tel que  $a \cos\theta$  ne soit pas un pôle de  $j_{\pm}^{\Omega}(\cdot, 1)$ , le signal diffracté (11) se met sous la forme  $W(s, t, x_3, \omega) = e^{i\omega x_3 k_3} W_d(s, t, \omega) + e^{i\omega x_3 k_3} W_p(s, t, \omega)$  pour  $W = E$  ou  $H$ . La quantité  $e^{i\omega x_3 k_3} W_p(s, t, \omega)$  est la contribution des pôles de la fonction spectrale (seuls ceux qui se trouvent dans le domaine  $\{a \cos z, \operatorname{Re} z \in ]0, \theta[ \}$  ont une contribution non nulle). Le premier terme du développement asymptotique de  $W_d(s, t, \omega)$  pour les grandes valeurs de  $\omega$  est

$$\frac{e^{ia\omega - i\pi/4}}{(4\pi a\omega)^{1/2}} (B_W(a \cos\theta, a \sin\theta, k_3) j_+^{\Omega}(a \cos\theta, 1) + B_W(a \cos(\theta + \gamma), a \sin(\theta + \gamma), k_3) \times j_-^{\Omega}(a \cos(\theta + \gamma), 1)).$$

On a de plus la relation d'homogénéité  $e^{-i\omega k_3 x_3} W(rs, rt, x_3, \omega) = e^{-i\omega k_3 x_3} W(s, t, x_3, r\omega)$ .

**3. Résumé des preuves**

La différence principale avec le cas traité dans [1] est la condition de raccord des traces sur l'arête du dièdre (qui se rapproche des conditions de raccord de [2], dans lequel est traité le cas des conditions d'impédance scalaire),

dont il résulte qu'on ne peut pas dissocier brutalement  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$ . On représente le problème de transmission par un hyperplan comme celui sur un dièdre d'angle d'ouverture  $\pi$ . Nous utilisons la décomposition

$$(\mathcal{P}_\gamma(\omega, \xi_3) - \mathcal{P}_\pi(\omega, \xi_3)) \begin{pmatrix} j^\Omega \\ j^F \end{pmatrix}(\zeta) = \begin{pmatrix} (\mathcal{C}_\gamma^+(\omega, \xi_3) - \mathcal{C}_\pi^+(\omega, \xi_3))j_-(\zeta) \\ (\mathcal{C}_\gamma^-(\omega, \xi_3) - \mathcal{C}_\pi^-(\omega, \xi_3))j_+(\zeta) \end{pmatrix} = \mathcal{E} \begin{pmatrix} j^\Omega \\ j^F \end{pmatrix}(\zeta) \quad (15)$$

et les propriétés suivantes sur les opérateurs de (15) :

(1)  $\mathcal{P}_\pi(\omega, \xi_3)(\zeta)$  est bijectif sur  $\{(j^\Omega, j^F) \in (H_{\text{div}}^+)^2; (j^\Omega, j^F) \text{ vérifient } H\}$  et sur  $\mathcal{A}$ . Cela résulte directement des expressions intégrales de ses solutions. De plus il conserve le domaine d'holomorphicité des second membres au voisinage de l'axe réel.

(2)  $\mathcal{E}$  laisse stable  $\{(j^\Omega, j^F) \in (H_{\text{div}}^+)^2; (j^\Omega, j^F) \text{ vérifient } H\}$ . De plus si  $j(\zeta)$  est holomorphe dans un voisinage complexe de  $[a, +\infty[$ ,  $a > 0$ , alors  $\mathcal{E}j(\zeta)$  est holomorphe sur un voisinage de  $[a - \alpha(a), +\infty[$  où  $\alpha(a)$  est strictement positif.

(3) Pour tout  $\xi_3$ ,  $\mathcal{P}_\gamma(\omega, \xi_3)(\zeta)$  est bijectif sur  $\mathcal{H}_{\text{div}\xi_3}^+$ . Cela résulte du fait que pour toute rotation du contour d'intégration,  $\mathcal{P}_\gamma(\omega, \xi_3)(\zeta)$  décrit les conditions de transmissions d'un problème elliptique qui admet une unique solution dans un espace qui relève  $H_{\text{div}\xi_3}^+$  et qu'on ne décrit pas ici.

De plus, on remarque que

$$\mathcal{P}_\gamma(\omega, \xi_3) \begin{pmatrix} j^\Omega \\ j^F \end{pmatrix}(\zeta) + T\mathcal{P}_{\pi-\gamma}(\omega, \xi_3) \begin{pmatrix} Jj^\Omega \\ Jj^F \end{pmatrix}(\zeta) = \begin{pmatrix} (\mathcal{D}^+(\omega, \xi_3) + \mathcal{C}_\pi^+(\omega, \xi_3))j_+(\zeta) \\ (\mathcal{D}^-(\omega, \xi_3) + \mathcal{C}_\pi^-(\omega, \xi_3))j_-(\zeta) \end{pmatrix}, \quad (16)$$

où pour  $j(\xi_1) = (j_1(\xi_1), j_3(\xi_1))$  on a défini  $Jj(\xi_1)$  par  $Jj(\xi_1) = (j_1(-\xi_1), -j_3(-\xi_1))$  et où  $T(v^+, v^-) = (v^-, v^+)$ .

- L'existence d'une solution de (8), pour  $\gamma < \pi$  provient de la régularisation progressive du second membre à l'aide du système défini par  $\mathcal{P}_\pi(\omega, \xi_3)$  de façon similaire à [1]. Pour l'unicité, on remarque que si une solution existe pour un second membre nul, alors elle est dans  $\mathcal{H}_{\text{div}\xi_3}^+$  pour presque tout  $\xi_3$ .
- Le fait que la solution soit contrôlable en norme  $H^+$  sur  $\mathbb{C}^-$  résulte de la relation (16).
- La proposition résulte du calcul d'une partie de la solution par application de la formule des résidus. L'analyticité de la fonction spectrale est une conséquence de la relation (16), et le calcul du terme  $W_d$  d'un procédé de phase stationnaire.

## Remerciements

L'auteur remercie Olivier Lafitte pour son soutien constant.

## Références

- [1] J.P. Croisille, G. Lebeau, Diffraction by an Immersed Elastic Wedge, in: Lecture Notes in Math., Vol. 1723, Springer, 1999.  
 [2] O. Lafitte, The wave diffracted by a wedge with mixed boundary conditions, Mém. Soc. Math. France (N.S.) 88 (2002).