Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 657–659
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Systèmes dynamiques

Théorèmes d'existence pour des inclusions différentielles du second ordre ☆

Existence theorems for second order differential inclusions

Messaoud Bounkhel [a,*,1], Dalila Laouir-Azzam [b]

[a] *Centro de Modelamiento Matemático, UMR, CNRS-UCHILE, Blanco Encalada 2120, 7 Piso, C.C. 170-3, Santiago, Chili*
[b] *Department of Mathematics, University of Jijel, BP 98, Ouled Aissa, Jijel, Algeria*

Reçu le 15 octobre 2001 ; accepté le 25 février 2003

Présenté par Charles-Michel Marle

Résumé

On montre différents théorèmes d'existence pour des inclusions différentielles du second ordre de la forme $\dot{x}(t) \in K(x(t))$, $\ddot{x}(t) \in -N_{K(x(t))}(\dot{x}(t)) + F(t, \dot{x}(t))$, où K (resp. F) est une multi-application prenant des valeurs nonconvexe (resp. convexe) dans un espace de Hilbert H. ***Pour citer cet article : M. Bounkhel, D. Laouir-Azzam, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

We prove several existence theorems for second order differential inclusions of the form $\dot{x}(t) \in K(x(t))$, $\ddot{x}(t) \in -N(K(x(t)); \dot{x}(t)) + F(t, \dot{x}(t))$, when K and F are set-valued mappings taking nonconvex and convex values, respectively, in a Hilbert space H. ***To cite this article: M. Bounkhel, D. Laouir-Azzam, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

1. Notations

Soient $r > 0$ et H un espace de Hilbert. On note par $\mathit{fup}(H)$, (resp. $ck(H)$, $f(H)$) l'ensemble des fermés uniformément r-prox-réguliers non vides (resp. l'ensemble des convexes compacts non vides, l'ensemble des fermés non vides) de H. Rappelons qu'un ensemble $S \subset H$ est uniformément r-prox-régulier (voir [7]) (ce qui est équivalent à r-proximalement lisse au sens de [5]) si pour tout $x \in S$ et tout $0 \neq \xi \in N^P(S; x)$ on a

☆ Ce travail a été financé partiellement, pour le premier auteur, par le projet ECOS.
* Auteur correspondant.
Adresses e-mail : bounkhel@dim.uchile.cl, bounkhel@ksu.edu.sa (M. Bounkhel), azzam_d@yahoo.com (D. Laouir-Azzam).
1 Adresse actuelle : King Saud University, College of Sciences, Department of Mathematics, PO Box 2455, Riyadh 11451, Saudi Arabia.

1631-073X/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00140-7

$\langle \frac{\xi}{\|\xi\|}, x' - x \rangle \leqslant \frac{1}{2r}\|x' - x\|^2$ pour tout $x' \in S$, où $N^P(S; \bar{x})$ désigne le cône normal proximal à S en $\bar{x} \in S$, qui coincide avec celui de Clarke $N(S; \bar{x})$ pour cette classe d'ensembles (voir [5]).

2. Théorème d'existence dans le cas non perturbé

Soit $K : H \to fup(H)$ λ-lipschitzienne et bornée par l. Soient $x_0 \in H$, $u_0 \in K(x_0)$ et $T > 0$. On cherche deux applications $u,\ x : [0, T] \to H$ qui satisfait le processus de rafle du second ordre suivant, que l'on note (*PRSO*) :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \displaystyle\int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s, \quad u(t) \in K(t),\ \forall t \in [0, T]\ ; \\ u(0) = u_0, \quad \dot{u}(t) \in -N_{K(x(t))}\big(u(t)\big), \quad \text{p.p. sur } [0, T]. \end{cases}$$

Théorème 1. *Si K est anti-monotone ou H est de dimension finie alors le problème* (*PRSO*) *a au moins une solution lipschitzienne.*

L'idée de la démonstration. On construit des solutions approchées (x_n) et (u_n) par l'algorithme de Castaing [3]. Ensuite, on utilise l'idée de [2] pour démontrer la propriété de Cauchy pour (u_n). La propriété de Cauchy pour (x_n) est assurée, soit par la dimension finie de H, soit par l'anti-monotonie de K. Ainsi, les limites x et u de (x_n) et (u_n) seront solutions de (*PRSO*) d'aprés le théorème de convergence des sous-différentiels de la fonction distance pour des ensembles uniformément prox-réguliers, démontré dans [2].

Remarque 1. Notons que, même dans le cas convexe, notre démonstration est différente de celles qui existent déja dans la littérature (voir [3,4,6]).

3. Théorèmes d'existence dans le cas perturbé

Soient H de dimension finie, $K : H \to fup(H)$ λ-lipschitzienne et bornée par l. Soit $F : \mathbb{R}_+ \times H \to ck(H)$ telle que $F(t, \cdot)$ est semicontinue supérieurement pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $F(\cdot, x)$ est Lebesgue mesurable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $x \in H$. Soit $x_0 \in H$ et $u_0 \in K(x_0)$. On cherche l'existence d'un réel positif T et deux applications $x : [0, T] \to H$, $u : [0, T] \to H$ qui satisfait le processus de rafle du second ordre perturbé suivant, que l'on note (*PRSOP*) :

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + \displaystyle\int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s, \quad u(t) \in K\big(x(t)\big),\ \forall t \in [0, T]\ ; \\ u(0) = u_0, \quad -\dot{u}(t) \in N_{K(x(t))}\big(u(t)\big) + F\big(t, u(t)\big), \quad \text{p.p sur } [0, T]. \end{cases}$$

La technique (voir par exemple [8]) employée dans les démonstrations des résultats de cette partie consiste à utiliser un théorème de point fixe et des résultats sur la rafle non convexe du premier ordre, prouvés dans [2]. Dans le théorème suivant on traite le cas où la perturbation F est supposée bornée.

Théorème 2. *Outres les hypothèses ci-dessus, supposons qu'il existe $m > 0$ tel que $|F(t, x)| \leqslant m$, $\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times H$. Alors, il existe $T > 0$ et deux applications $x : [0, T] \to H$ l-lipschitzienne, $u : [0, T] \to H$ $\lambda l + m$-lipschitzienne, vérifiant* (*PRSOP*).

Le théorème suivant montre l'existence de solutions de (*PRSOP*) dans le cas où F est univoque et indépendante de t, i.e., $F(t,u)=\{\gamma u\}$ où $\gamma \neq 0$. Ce cas n'est pas contenu dans le Théorème 2, car la perturbation F n'est pas bornée.

Théorème 3. *Soient H de dimension finie, $\gamma \neq 0$ et $K : H \to fup(H)$ λ-lipschitzienne et bornée par l. Alors, il existe $T > 0$ et deux applications lipschitziennes $x : [0,T] \to H$, $u : [0,T] \to H$ vérifiant*

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + \displaystyle\int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s, \quad u(t) \in K(t),\ \forall t \in [0,T]\,; \\ u(0) = u_0, \quad -\dot{u}(t) \in N_{K(x(t))}\big(u(t)\big) + \gamma u(t), \quad \textit{p.p. sur } [0,T]. \end{cases}$$

Remarque 2. A notre connaissance, les résultats de cette partie sont nouveaux même dans le cas où K est supposée convexe.

4. Conclusion

Plusieurs résultats d'existence de la rafle du second ordre perturbée et plus précisément le cas de dimension infinie où la perturbation F est nonconvexe, dépendant de t et de l'état x et ne dépend pas de la dérivée $\dot{x}$, sont aussi étudiés dans [1]. Le lecteur peut trouver dans cet article les détails des techniques et preuves de plusieurs résultats d'existence de (*PRSOP*), dont cette Note annonce certains.

Références

[1] M. Bounkhel, D. Laouir-Azzam, Existence results on the second-order nonconvex sweeping processes with perturbations, Preprint CMM, Universidad de Chile, 2001.
[2] M. Bounkhel, L. Thibault, Further characterizations of regular sets in Hilbert spaces and their applications to nonconvex sweeping process, Preprint CMM, Universidad de Chile, 2000.
[3] C. Castaing, Quelques problèmes d'évolution du second ordre, Sém. Anal. Convexe 5 (1988).
[4] C. Castaing, T.X. Duc Ha, M. Valadier, Evolution equations governed by the sweeping process, Set-Valued Anal. 1 (1993) 109–139.
[5] F.H. Clarke, R.J. Stern, P.R. Wolenski, Proximal smoothness and the lower C^2 property, J. Convex Anal. 2 (1/2) (1995) 117–144.
[6] M.D.P. Monteiro-Marques, Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problem, Shoks and Dry Friction, Birkhäuser, 1995.
[7] R.A. Poliquin, R.T. Rockafellar, L. Thibault, Local differentiability of distance functions, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (11) (2000) 5231–5249.
[8] A. Syam, Contributions aux inclusions différentielles, Thèse, Université de Montpellier 2, Montpellier, 1993.