



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 589–592



Géométrie analytique/Analyse complexe

Sur les ensembles d'unicité pour les automorphismes analytiques d'un domaine borné

Determination sets for holomorphic automorphisms of a bounded domain

Jean-Pierre Vigué

Université de Poitiers, département de mathématiques, UMR-CNRS 6086, BP 30179, 86962 Futuroscope cedex, France

Reçu le 3 mars 2003 ; accepté le 4 mars 2003

Présenté par Paul Malliavin

Résumé

Dans cette Note, nous étudions les ensembles d'unicité pour le groupe $\text{Aut}(D)$ des automorphismes analytiques d'un domaine borné D de \mathbb{C}^n . **Pour citer cet article :** J.-P. Vigué, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

In this Note, we study the determination sets for the group $\text{Aut}(D)$ of holomorphic automorphisms of a bounded domain D in \mathbb{C}^n . **To cite this article:** J.-P. Vigué, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

1. Introduction

Le groupe $\text{Aut}(D)$ des automorphismes analytiques d'un domaine borné D de \mathbb{C}^n (ou plus généralement d'un espace de Banach complexe) a fait l'objet de nombreuses études depuis les premiers papiers de Cartan [3,4]. Sur ce sujet, on peut consulter par exemple Franzoni et Vesentini [5], Harris [7], Narasimhan [8], Vigué [9]. En particulier, il faut citer le théorème d'unicité de H. Cartan qui s'énonce de la façon suivante.

Théorème 1.1. *Soit D un domaine borné de \mathbb{C}^n , soit a un point de D , et soit $f : D \rightarrow D$ une application holomorphe telle que $f(a) = a$ et que $f'(a) = \text{id}$. Alors $f = \text{id}$.*

Adresse e-mail : vigue@mathlabo.univ-poitiers.fr (J.-P. Vigué).

Ce théorème entraîne en particulier que, si $f \in \text{Aut}(D)$ et $g \in H(D, D)$ sont tels que $f(a) = g(a)$ et $f'(a) = g'(a)$, alors $f = g$ [$H(D, D)$ désigne l'ensemble des applications holomorphes de D dans D].

Il est naturel de définir alors un ensemble d'unicité de la façon suivante.

Définition 1.2. On dit qu'un ensemble (z_1, \dots, z_d) de points de D est un ensemble d'unicité pour $\text{Aut}(D)$ si, pour tout $f \in \text{Aut}(D)$, $f(z_i) = z_i$, $i = 1, \dots, d$ entraîne $f = \text{id}$.

Par des méthodes de géométrie différentielle, Fridman, Tim, Krantz et Ma [6] ont montré le théorème suivant.

Théorème 1.3. Soit M une variété complexe connexe hermitienne complète de dimension n telle que tout automorphisme analytique de M soit une isométrie pour la métrique hermitienne considérée. Alors il existe un ouvert dense W de M^{n+1} formé d'ensembles d'unicité pour $\text{Aut}(D)$.

De plus, des exemples montrent qu'il existe des familles de $n + 1$ points distincts de M^{n+1} qui ne sont pas des ensembles d'unicité pour $\text{Aut}(D)$. Si on considère un domaine borné D , il n'est pas toujours vrai qu'on puisse le munir d'une telle métrique hermitienne. Cependant, nous allons montrer que le théorème précédent demeure exact pour n'importe quel domaine borné D de \mathbb{C}^n . Notre démonstration est basée sur des propriétés du groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné et donne des résultats plus précis que ceux de [6]. Nous montrerons enfin que le théorème donné est vrai aussi topologiquement : ainsi, si $K \subset D^{n+1}$ est un ensemble d'unicité pour $\text{Aut}(D)$, l'application de $\text{Aut}(D)$ dans D^{n+1} définie par $f \mapsto f(K)$ est un homéomorphisme sur son image.

Commençons par rappeler quelques résultats sur les automorphismes analytiques d'un domaine borné D de \mathbb{C}^n .

2. Rappels et premiers résultats

Soit D un domaine borné de \mathbb{C}^n . L'ensemble $H(D, D)$ des applications holomorphes de D dans D est muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de D . Bien sûr, le groupe $\text{Aut}(D)$ qui est contenu dans $H(D, D)$, est muni de la topologie induite, et on vérifie que $\text{Aut}(D)$, muni de cette topologie, est un groupe topologique. Rappelons le théorème suivant dû à Cartan [4] (voir aussi Bedford [1]).

Théorème 2.1. Soit D un domaine borné de \mathbb{C}^n et soit $a \in D$. Soit $f_n \in \text{Aut}(D)$ une suite convergeant uniformément sur tout compact de D vers g . Supposons que $g(a)$ appartienne à D . Alors $g \in \text{Aut}(D)$.

On déduit de ce résultat la proposition suivante.

Proposition 2.2. Soit D un domaine borné de \mathbb{C}^n , soit $a \in D$ et soit K un compact de D . Soit $\text{Aut}_{a,K}(D)$ l'ensemble des automorphismes analytiques f de D tels que $f(a) \in K$. Alors $\text{Aut}_{a,K}(D)$ est compact.

La démonstration consiste seulement à remarquer que, d'après le théorème de Montel, on peut extraire de toute suite d'éléments de $\text{Aut}_{a,K}(D)$ une sous-suite convergente et que sa limite, d'après le Théorème 2.1, appartient à $\text{Aut}_{a,K}(D)$.

Comme nous l'avons déjà dit, étant donné $a \in D$, un élément $f \in \text{Aut}(D)$ est caractérisé par $(f(a), f'(a))$. En fait, nous avons, pour le groupe d'isotropie d'un point, un résultat plus précis que nous allons maintenant démontrer (voir Cartan [3], p. 80)).

Théorème 2.3. Soit D un domaine borné de \mathbb{C}^n , soit $a \in D$ et soit $\text{Aut}_a(D)$ le groupe d'isotropie du point $a \in D$. Alors, il existe une application holomorphe $\varphi : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ telle que $\varphi(a) = 0$, que φ soit une carte locale au voisinage de a et que, pour tout $f \in \text{Aut}_a(D)$, on ait :

$$\varphi \circ f = f'(a) \circ \varphi.$$

Ce résultat exprime que f est linéaire dans la carte locale φ .

Démonstration. Le groupe $\text{Aut}_a(D)$ qui est compact peut être muni d'une mesure de Haar μ invariante à droite et à gauche (voir par exemple Bourbaki [2]). On définit φ par la formule :

$$\varphi(z) = \int_{\text{Aut}_a(D)} g'(a)^{-1} \cdot (g(z) - a) \, d\mu(g).$$

Il est clair que $\varphi(a) = 0$ et que $\varphi'(a) = \text{id}$. Ainsi, φ est une carte locale. Soit $f \in \text{Aut}_a(D)$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi(f(z)) &= \int_{\text{Aut}_a(D)} g'(a)^{-1} \cdot (g(f(z)) - a) \, d\mu(g) \\ &= f'(a) \cdot \int_{\text{Aut}_a(D)} [(g \circ f)'(a)]^{-1} \cdot ((g \circ f)(z) - a) \, d\mu(g), \end{aligned}$$

et, comme μ est invariante par translation à droite,

$$\varphi(f(z)) = f'(a) \cdot \varphi(z),$$

et le théorème est démontré. \square

Signalons enfin le résultat suivant.

Proposition 2.4. Soit D un domaine borné de \mathbb{C}^n , soit $a \in D$ et soit $f \in \text{Aut}(D)$ tel que $f(a) = a$. Alors toutes les valeurs propres de $f'(a)$ sont de module 1 et l'application linéaire $f'(a)$ est diagonalisable.

Ce résultat se montre facilement en considérant les itérées de f et de f^{-1} et en utilisant les inégalités de Cauchy.

3. Ensembles d'unicité

Soit D un domaine borné de \mathbb{C}^n . Pour tout entier d , on note $W(d) \subset D^d$ l'ensemble $(z_1, \dots, z_d) \in D^d$ tels que (z_1, \dots, z_d) soit un élément d'unicité pour $\text{Aut}(D)$. Le premier résultat est le suivant.

Théorème 3.1. L'ensemble $W(d)$ est un ouvert (éventuellement vide) de D^d .

Démonstration. Faisons la démonstration par l'absurde et supposons que $W(d)$ n'est pas ouvert. Si c'est le cas, on peut trouver $Z^0 \in W(d) \subset D^d$ et une suite Z^n convergeant vers Z^0 et tels que $Z^n \notin W(d)$. Il existe donc $f_n \in \text{Aut}(D)$ tel que $f_n|_{Z^n} = \text{id}$ et que f_n ne soit pas égal à l'identité. Soit z_1^n le premier élément de Z^n . Comme $f_n(z_1^n) = z_1^n$ et que $f_n'(z_1^n)$ est diagonalisable et distinct de l'identité, et quitte à remplacer f_n par une puissance bien choisie, on peut supposer que $f_n'(z_1^n)$ a une valeur propre de partie réelle ≤ 0 . En utilisant le théorème de Montel, on peut extraire une sous-suite f_{n_k} convergeant vers un automorphisme g . Il est clair que $g|_{Z^0}$ est égal à l'identité mais $g'(z_1^0)$ a une valeur propre de partie réelle ≤ 0 . C'est une contradiction avec le fait que Z^0 est un ensemble d'unicité. \square

Bien sûr, si d est petit, l'ensemble $W(d)$ peut être vide. En revanche, dès que $d \geq n + 1$, nous allons montrer que $W(d)$ est un ouvert dense de D^d . Plus précisément, nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.2. *Soit $a \in D$ et soit $d \geq n + 1$. L'ensemble $W_a(D)$ des $(z_1, \dots, z_{d-1}) \in D^{d-1}$ tels que (a, z_1, \dots, z_{d-1}) n'appartienne pas à $W(d)$ est contenu dans un sous-ensemble analytique strict de D^{d-1} . Par suite, $W(d)$ est dense dans D^d .*

Démonstration. Soit $a \in D$. D'après le Théorème 2.3, il existe une application holomorphe $\varphi : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ telle que $\varphi(a) = 0$, que φ soit une carte locale au voisinage de a et que, pour tout $f \in \text{Aut}_a(D)$, on ait, pour tout $z \in D$,

$$\varphi(f(z)) = f'(a) \cdot \varphi(z).$$

D'après le théorème d'unicité de H. Cartan, pour que f soit égale à l'identité, il faut et il suffit que $f'(a) = \text{id}$. Si $(\varphi(z_1), \dots, \varphi(z_{d-1}))$ forme un système générateur de l'espace vectoriel \mathbb{C}^n , et si l'on a $f(z_i) = z_i, i = 1, \dots, d-1$, alors $f'(a) = \text{id}$ et $f = \text{id}$. Il est facile de voir que l'ensemble des (z_1, \dots, z_{d-1}) tels que $(\varphi(z_1), \dots, \varphi(z_{d-1}))$ ne soit pas un système générateur de \mathbb{C}^n est un sous-ensemble analytique strict de D^{d-1} . \square

Pour terminer, je voudrais remarquer une propriété topologique de ces ensembles d'unicité.

Proposition 3.3. *Soit D un domaine borné de \mathbb{C}^n , et soit $(z_1, \dots, z_d) \in D^d$ un ensemble d'unicité. Alors l'application $\varphi : \text{Aut}(D) \rightarrow D^d$ définie par $f \mapsto (f(z_1), \dots, f(z_d))$ est un homéomorphisme de $\text{Aut}(D)$ sur son image.*

Démonstration. Le fait que (z_1, \dots, z_d) est un ensemble d'unicité signifie que φ est injective. Il est clair que φ est continue. Il reste à montrer que, si une suite (f_n) d'automorphismes analytiques de D et $f \in \text{Aut}(D)$ sont tels que $f_n(z_i) \rightarrow f(z_i)$, pour $i = 1, \dots, d$, alors $f_n \rightarrow f$ pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de D .

Soit $g \in H(D, D)$ adhérent à la suite f_n . D'après le Théorème 2.3, $g \in \text{Aut}(D)$, et on a $g(z_i) = f(z_i), i = 1, \dots, d$. Comme (z_1, \dots, z_d) est un élément d'unicité, $f = g$. Ainsi, f est le seul élément adhérent à la suite f_n , qui est contenue dans un compact. Alors $f_n \rightarrow f$, et la proposition est démontrée.

Références

- [1] E. Bedford, On the automorphism group of a Stein manifold, *Math. Ann.* 266 (1983) 215–227.
- [2] N. Bourbaki, *Intégration*, Chapitre 7, Hermann, Paris, 1963.
- [3] H. Cartan, Les fonctions de deux variables complexes et le problème de la représentation analytique, *J. Math. Pures Appl.* (9) 11 (1931) 1–114.
- [4] H. Cartan, Sur les fonctions de plusieurs variables complexes. L'itération des transformations intérieures d'un domaine borné, *Math. Z.* 35 (1932) 760–773.
- [5] T. Franzoni, E. Vesentini, Holomorphic Maps and Invariant Distances, in: *North-Holland Math. Stud.*, Vol. 40, North-Holland, Amsterdam, 1980.
- [6] B. Fridman, K. Kim, S. Krantz, D. Ma, On fixed points and determining sets for holomorphic automorphisms, *Michigan Math. J.* 50 (2002) 507–515.
- [7] L. Harris, Schwarz–Pick systems of pseudometrics for domains in normed linear spaces, in: *Advances in Holomorphy*, in: *North-Holland Math. Stud.*, Vol. 34, North-Holland, Amsterdam, 1979, pp. 345–406.
- [8] R. Narasimhan, *Several Complex Variables*, in: *Chicago Lectures in Math.*, University Chicago Press, Chicago, IL, 1971.
- [9] J.-P. Vigué, Le groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné d'un espace de Banach complexe. Application aux domaines bornés symétriques, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 9 (1976) 203–282.