Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 525–530
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Problèmes mathématiques de la mécanique

Théorème d'unicité pour un problème d'ondes élastiques

Uniqueness theorem for an elastic waves problem

Leïla Alem, Lahcène Chorfi

Laboratoire de mathématiques appliquées, Université Badji Mokhtar, BP 12, 23000 Annaba, Algérie

Reçu le 30 juillet 2001 ; accepté après révision le 11 février 2003

Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

Résumé

Dans cette Note on démontre un théorème d'unicité de la solution d'un problème d'ondes élastiques (dans le domaine des fréquences). Le domaine de propagation est un demi-espace stratifié avec un trou vertical. On impose des conditions de radiation à l'infini qui assurent l'unicité de la solution. ***Pour citer cet article : L. Alem, L. Chorfi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

In this Note we prove a uniqueness theorem for the an elastic waves problem (in frequency domain). The propagation domain is a stratified half-space with a vertical borehole. We impose radiation conditions at infinity which ensure uniqueness of the solution. ***To cite this article: L. Alem, L. Chorfi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abridged English version

We consider the operator A, defined by (1) and (2) in the main text, governing the propagation of elastic waves. The propagation domain is a stratified half-space with a vertical borehole (Fig. 1). The generating medium is represented in cylindrical coordinates (r,z) by the open subset $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ of $\mathbb{R}^2$ such that: $\Omega_1 = \{r > a, 0 < z < h\}$ and $\Omega_2 = \{r > a, z > h\}$. The elastic parameters $(\lambda(z), \mu(z), \rho(z))$ are piecewise constant functions in z. The operator A is acting on the displacement field $U(r,z) = (v(r,z), w(r,z))$. With the notations below, we set the problem:

$$\begin{cases} \text{Find } U \in C^2(\Omega)^2 \cap C^1(\overline{\Omega})^2 \text{ such that:} \\ AU + \omega^2 U = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ U \text{ satisfies (T) and (CL),} \\ U = \mathrm{O}(1/R), \quad U \text{ satisfies (CR1) and (CR2) when } R \to +\infty. \end{cases} \tag{P}$$

The boundary conditions (CL), on each component $z = 0$ and $r = a$, are Neumann conditions. This problem arises in exploration geophysics (in borehole seismic methods) (see [1,2,7]). Previous reaserch (in the mechanical

Adresses e-mail : alem_lila@hotmail.com (L. Alem), l_chorfi@hotmail.com (L. Chorfi).

1631-073X/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00098-0

literature) neglected the question of uniqueness. In this Note we give a uniqueness result for (P). Problem (P) is a transmission problem with an unbounded interface and an unbounded boundary, which leads to significant difficulties compared with the already studied cases. We think about the works [3,5,6] devoted to the acoustic problems in exterior domains and to Kupradze's monograph [4]. The result is built on the proposition

Proposition 2.3. *Suppose U is a solution of the problem* (P). *Then U is represented, in the strip Ω_1, by series*:

$$U(r,z)=\sum_{|\omega_n|>k_p} U_{pn}\begin{bmatrix}\mathrm{i}\beta_n K_1(\beta_n r)\\ \omega_n K_0(\beta_n r)\end{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n z}+\sum_{|\omega_n|>k_s} U_{sn}\begin{bmatrix}-\mathrm{i}\omega_n K_1(\delta_n r)\\ \delta_n K_0(\delta_n r)\end{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n z}$$

with $\beta_n^2=\omega_n^2-k_p^2$, $\delta_n^2=\omega_n^2-k_s^2$, $\omega_n=n\pi/h$, $n\in Z$, $k_s=\omega/c_s^{(1)}$ *and* $k_p=\omega/c_p^{(1)}$.

Combining Proposition 2.3 and the free surface condition on $r=a$, we prove that $U_1=0$ in the strip Ω_1 (we set $U_j=U|_{\Omega_j}$, $j=1,2$). The transmission condition (T) implies $U_2(r,h)=\frac{\partial U_2}{\partial z}(r,h)=0$. Then U_2 satisfies in Ω_2 a Cauchy problem with analytic coefficients. Finally, we use the Holmgren uniqueness theorem to conclude that $U_2=0$ in Ω_2. Which proves that (P) has at most one solution.

1. Introduction

Le plan $\mathbb{R}^2$ étant muni du repère orthonormé (O,r,z), on considère les ouverts suivants :

$$\Omega_1=\{r>a,\ 0<z<h\}\quad\text{et}\quad\Omega_2=\{r>a,\ z>h\},$$

($a>0$ et $h>0$ fixés), ainsi que les paramètres élastiques :

$$\big(\lambda(z),\mu(z),\rho(z)\big)=\begin{cases}(\lambda_1,\mu_1,\rho_1) & \text{si } 0<z<h,\\ (\lambda_2,\mu_2,\rho_2) & \text{si } z>h.\end{cases}$$

Posons $R=\sqrt{r^2+z^2}$, $n=\frac{1}{R}(r,z):=(\cos\theta,\sin\theta)$ et $\tau=(-\sin\theta,\cos\theta)$.

Considérons l'opérateur de l'élasticité A agissant sur le champ $U(r,z)=(v(r,z),w(r,z))$ en coordonnées cylindriques (r,ϕ,z), tel que :

$$\begin{cases}(AU)_1=\dfrac{1}{r\rho(z)}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\big(rt_{rr}(U)\big)+\dfrac{\partial}{\partial z}\big(rt_{rz}(U)\big)-\lambda(z)\left(\dfrac{\partial v}{\partial r}+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)-\big(\lambda(z)+2\mu(z)\big)\dfrac{v}{r}\right],\\ (AU)_2=\dfrac{1}{r\rho(z)}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\big(rt_{rz}(U)\big)+\dfrac{\partial}{\partial z}\big(rt_{zz}(U)\big)\right]\end{cases}\tag{1}$$

avec

$$\begin{cases}t_{rz}(U)=\mu(z)\left(\dfrac{\partial w}{\partial r}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\right),\\ t_{zz}(U)=\big(\lambda(z)+2\mu(z)\big)\dfrac{\partial w}{\partial z}+\lambda(z)\left(\dfrac{v}{r}+\dfrac{\partial v}{\partial r}\right),\\ t_{rr}(U)=\big(\lambda(z)+2\mu(z)\big)\dfrac{\partial v}{\partial r}+\lambda(z)\left(\dfrac{v}{r}+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right).\end{cases}\tag{2}$$

On introduit les quantités suivantes :

- Le tenseur des contraintes $T(U)=\begin{pmatrix}t_{rr}(U) & t_{rz}(U)\\ t_{rz}(U) & t_{zz}(U)\end{pmatrix}$ et le vecteur contrainte $t(n,U)=T(U)n$.
- La contrainte normale $t_{nn}(U)=t(n,U)\cdot n$ et la contrainte tangentielle $t_{n\tau}(U)=t(n,U)\cdot\tau$.
- Le déplacement normal $U_n=U\cdot n$ et le déplacement tangentiel $U_\tau=U\cdot\tau$.

On note $U_j = (v_j, w_j)$ la restriction de U à Ω_j, $j = 1, 2$, et on définit à partir des paramètres élastiques, la vitesse des ondes de compression $c_p^{(j)} = ((\lambda_j + 2\mu_j)/\rho_j)^{1/2}$ et la vitesse des ondes de cisaillement $c_s^{(j)} = (\mu_j/\rho_j)^{1/2}$.

Pour une fréquence donnée $\omega > 0$, on définit les nombres d'ondes $k_p^{(j)} = \omega/c_p^{(j)}$ et $k_s^{(j)} = \omega/c_s^{(j)}$.

Définition 1. Le champ U appartient à l'espace E si $U_j \in C^2(\Omega_j)^2 \cap C^1(\overline{\Omega}_j)^2$, $j = 1, 2$, et satisfait les conditions de transmission :

$$U_1(r,h) = U_2(r,h), \quad t_{rz}(U_1) = t_{rz}(U_2) \quad \text{et} \quad t_{zz}(U_1) = t_{zz}(U_2) \quad \text{si } z = h. \tag{T}$$

Définition 2. $U \in E$ satisfait les conditions de radiation à l'infini si

$$\begin{cases} \lim_{r\to+\infty} r\big(t_{rr}(U_1) - \mathrm{i}\omega\rho_1 c_p^{(1)} v_1\big) = 0, \\ \lim_{r\to+\infty} r\big(t_{rz}(U_1) - \mathrm{i}\omega\rho_1 c_s^{(1)} w_1\big) = 0 \end{cases} \quad \text{(uniformément par rapport à } z \in\,]0, h[), \tag{CR1}$$

$$\begin{cases} \lim_{R\to+\infty} R\big(t_{nn}(U_2) - \mathrm{i}\omega\rho_2 c_p^{(2)} U_{2n}\big) = 0, \\ \lim_{R\to+\infty} R\big(t_{n\tau}(U_2) - \mathrm{i}\omega\rho_2 c_s^{(2)} U_{2\tau}\big) = 0 \end{cases} \quad \text{(uniformément par rapport à } \theta \in [0, \tfrac{\pi}{2}]). \tag{CR2}$$

Avec les définitions précédentes, on pose le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } U \in E \text{ tel que :} \\ AU + \omega^2 U = 0 \quad \text{dans } \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \\ t_{rz}(U) = t_{zz}(U) = 0 \quad \text{si } z = 0 \text{ et } r > a, \\ t_{rr}(U) = \Psi_1(z), t_{rz}(U) = \Psi_2(z) \quad \text{si } r = a \text{ et } z > 0, \\ U = \mathrm{O}(1/R), \quad U \text{ satisfait les conditions (CR1) et (CR2), lorsque } R \to +\infty \end{cases} \tag{P}$$

avec Ψ_1 et Ψ_2 deux fonctions (données) continues et à supports compacts dans $(0, +\infty)$.

Remarquons que l'expression différentielle de A découle de l'opérateur de Lamé : $\Delta^* U = \mu\Delta U + (\lambda + \mu) \times \nabla(\nabla \cdot U) + \rho\omega^2 U$, lorsque le champ de déplacement a la forme $U(r, \phi, z) = v(r, z)e_r + w(r, z)e_z$. En effet, le problème (P) modélise le mouvement (ω-périodique) d'un demi-espace élastique stratifié avec un puits vertical. Le mouvement est engendré par une pression axisymétrique Ψ appliquée à la surface latérale du puits (voir Fig. 1). On rencontre ce problème, par exemple, dans les explorations géophysiques (par la méthode de sismique de puits) [1,2,7]. Dans ces travaux de recherche la question d'unicité est souvent négligée ou énoncée sans preuve. Le but de cette note est de prouver un théorème d'unicité pour le problème (P). Il s'agit d'un problème de transmission avec une interface et une frontière non bornées, ce qui présente des difficultés supplémentaires par rapport aux cas étudiés, par exemple [3,5,6] pour le modèle acoustique et [4] en élasticité. La démonstration se fait par étapes :

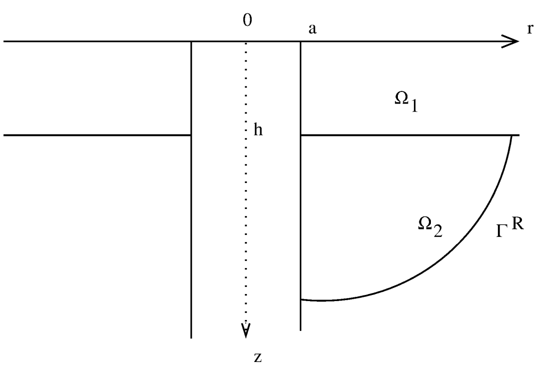

Fig. 1. Profil du milieu élastique.

Fig. 1. Profile of the elastic medium.

(1) On donne une décomposition en série de Fourier de U_1, solution de (P) dans la bande Ω_1.
(2) La condition de surface libre sur la face $r = a$ nous permet d'obtenir $U_1 = 0$.
(3) Enfin, on utilise le principe de prolongement analytique pour montrer que $U_2 = 0$ dans Ω_2.

Pour la suite, on note ($\mathrm{P_h}$) le problème homogène associé à (P) (i.e., avec $\Psi = 0$).

2. Théorème d'unicité

Soit $\Omega \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$ un domaine borné de frontière Γ, C^1 par morceaux. Pour $U = (u_1, u_2)$ et $V = (v_1, v_2)$ on définit le produit scalaire :

$$(U, V)_\Omega = \int_\Omega (u_1 \bar{v}_1 + u_2 \bar{v}_2)\,\mathrm{d}\mu, \quad \text{avec } \mathrm{d}\mu = \rho(z) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z \ (\rho(z) \text{ est la densité}).$$

La formule de Green permet d'avoir la *Formule de Betti* :

$$\forall U, V \in \left[C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)\right]^2, \quad (AU, V)_\Omega - (U, AV)_\Omega = \int_\Gamma \left(t(n, U) \cdot \overline{V} - t\left(n, \overline{V}\right) \cdot U\right) \mathrm{d}\gamma, \tag{3}$$

avec $\mathrm{d}\gamma = r\,\mathrm{d}s$ ($\mathrm{d}s$ la longueur d'arc).

Proposition 2.1. *Soit U une solution de* ($\mathrm{P_h}$), *alors* :

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^h \left|U_1(R, z)\right|^2 R\,\mathrm{d}z = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma^R} |U_2|^2\,\mathrm{d}\gamma = 0,$$

avec $\Gamma^R = \{(r, z) \in \Omega_2 \mid r^2 + z^2 = R^2 + h^2\}$.

Démonstration. La démonstration est classique (voir [4]), on obtient le résultat en appliquant la formule de Betti (3) à U_1 et $V_1 = \overline{U}_1$ dans un domaine Ω_1^R adéquat (resp. à U_2 et $V_2 = \overline{U}_2$ dans Ω_2^R) et en tenant compte des conditions de radiation. □

Proposition 2.2. *Soit $U_1 \in [C^2(\Omega_1) \cap C^1(\overline{\Omega}_1)]^2$ une solution de l'équation*

$$AU + \omega^2 U = 0 \quad \textit{dans } \Omega_1$$

qui satisfait la condition de radiation (CR1). *Alors U_1 possède la décomposition* :

$$U_1 = U_p + U_s \tag{4}$$

avec

$$U_p(r, z) = \sum_{|\omega_n| > k_p} U_{pn} \begin{bmatrix} \mathrm{i}\beta_n K_1(\beta_n r) \\ \omega_n K_0(\beta_n r) \end{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n z} + \sum_{|\omega_n| < k_p} \widetilde{U}_{pn} \begin{bmatrix} \mathrm{i}\tilde{\beta}_n H_1^{(1)}(\tilde{\beta}_n r) \\ \omega_n H_0^{(1)}(\tilde{\beta}_n r) \end{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n z},$$

$$U_s(r, z) = \sum_{|\omega_n| > k_s} U_{sn} \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\omega_n K_1(\delta_n r) \\ \delta_n K_0(\delta_n r) \end{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n z} + \sum_{|\omega_n| < k_s} \widetilde{U}_{sn} \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\omega_n H_1^{(1)}(\tilde{\delta}_n r) \\ \tilde{\delta}_n H_0^{(1)}(\tilde{\delta}_n r) \end{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n z},$$

où

$$\beta_n^2 = \omega_n^2 - k_p^2, \quad \delta_n^2 = \omega_n^2 - k_s^2, \quad \tilde{\beta}_n^2 = k_p^2 - \omega_n^2 \quad \textit{et } \tilde{\delta}_n^2 = k_s^2 - \omega_n^2$$

avec $\omega_n = n\pi/h$, $n \in Z$, $k_s = \omega/c_s^{(1)}$ et $k_p = \omega/c_p^{(1)}$.

Démonstration. Le champ U_1 possède la décomposition de Helmholtz en trois dimensions [4] :

$$U_1 = U_p + U_s$$

avec

$$\begin{cases} \Delta U_p + k_p^2 U_p = 0 & \text{et} \quad \operatorname{rot} U_p = 0, \\ \Delta U_s + k_s^2 U_s = 0 & \text{et} \quad \operatorname{div} U_s = 0. \end{cases}$$

Utilisant la transformation $\{v_1 = v_r \cos\phi,\ v_2 = v_r \sin\phi,\ v_3 = v_z\}$, qui associe à un champ $V = (v_r, 0, v_z)$ en « coordonnées cylindriques » le champ $V = (v_1, v_2, v_3)$ en coordonnées cartésiennes, on obtient les équivalences :

$$\Delta V + k^2 V = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial r} - \dfrac{v_r}{r^2} + \dfrac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + k^2 v_r = 0, \\ \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_z}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + k^2 v_z = 0 \end{cases}$$

et

$$\operatorname{rot} V = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{\partial v_r}{\partial z} \text{ et } \operatorname{div} V = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \tag{5}$$

En décomposant V suivant le système $\{e^{i\omega_n z}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (qui est complet dans $L^2(0,h)$) :

$$V(r,z) = \sum_{n\in Z} \begin{pmatrix} \varphi_n(r) \\ \psi_n(r) \end{pmatrix} e^{i\omega_n z}, \quad z \in]0,h[,\ r > a,$$

on obtient les équations différentielles :

$$\begin{cases} r^2\varphi_n'' + r\varphi_n' - \left[r^2\left(\omega_n^2 - k^2\right) + 1\right]\varphi_n = 0, \\ r^2\psi_n'' + r\psi_n' - r^2\left(\omega_n^2 - k^2\right)\psi_n = 0 \end{cases}$$

avec les solutions correspondantes :

$$\varphi_n(r) = \begin{cases} a_n H_1^{(1)}\left(\sqrt{k^2 - \omega_n^2}\, r\right) & \text{si } |\omega_n| < k, \\ b_n K_1\left(\sqrt{\omega_n^2 - k^2}\, r\right) & \text{si } |\omega_n| > k, \end{cases} \qquad \psi_n(r) = \begin{cases} c_n H_0^{(1)}\left(\sqrt{k^2 - \omega_n^2}\, r\right) & \text{si } |\omega_n| < k, \\ d_n K_0\left(\sqrt{\omega_n^2 - k^2}\, r\right) & \text{si } |\omega_n| > k. \end{cases}$$

On a exclu les solutions $H_\nu^{(2)}$ et I_ν, $\nu = 0, 1$, car la première ne satisfait pas les conditions de radiation et la deuxième est non bornée. En tenant compte de (5) on obtient les relations :

$$\left\{ \frac{a_n}{c_n} = i\frac{\tilde{\beta}_n}{\omega_n},\ \frac{b_n}{d_n} = i\frac{\beta_n}{\omega_n} \text{ si } k = k_p \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \frac{a_n}{c_n} = -i\frac{\omega_n}{\tilde{\delta}_n},\ \frac{b_n}{d_n} = -i\frac{\omega_n}{\delta_n} \text{ si } k = k_s \right\}$$

d'où la décomposition (4). □

Proposition 2.3. *Supposons que U est une solution de* $(\mathrm{P_h})$*, alors U_1 s'écrit dans Ω_1 sous la forme* :

$$U(r,z) = \sum_{|\omega_n| > k_p} U_{pn} \begin{bmatrix} i\beta_n K_1(\beta_n r) \\ \omega_n K_0(\beta_n r) \end{bmatrix} e^{i\omega_n z} + \sum_{|\omega_n| > k_s} U_{sn} \begin{bmatrix} -i\omega_n K_1(\delta_n r) \\ \delta_n K_0(\delta_n r) \end{bmatrix} e^{i\omega_n z}.$$

Démonstration. D'après la Proposition 2.1, on a $\lim_{R\to\infty} \int_0^h (|U_{sr}(R,z)|^2 + |U_{pr}(R,z)|^2) R\, dz = 0$, ce qui entraîne avec la Proposition 2.2 :

$$\lim_{R\to\infty} R\Bigg(\sum_{|\omega_n| > k_p} |U_{pn}|^2 \beta_n^2 K_1^2(\beta_n R) + \sum_{|\omega_n| < k_p} \left|\widetilde{U}_{pn}\right|^2 \tilde{\beta}_n^2 \left|H_1^{(1)}\left(\tilde{\beta}_n R\right)\right|^2 + \sum_{|\omega_n| > k_s} |U_{sn}|^2 \omega_n^2 K_1^2(\delta_n R) + \sum_{|\omega_n| < k_s} \left|\widetilde{U}_{sn}\right|^2 \omega_n^2 \left|H_1^{(1)}\left(\tilde{\delta}_n R\right)\right|^2 \Bigg) = 0.$$

En tenant compte du comportement asymptotique des fonctions de Bessel on déduit : $\forall n$, $\widetilde{U}_{pn} = \widetilde{U}_{sn} = 0$. □

Proposition 2.4. *Supposons que* U_1 *est une solution de* $(\mathrm{P_h})$. *Alors* $U_1 = 0$ *dans* Ω_1.

Démonstration. Le champ U_1, représenté dans la Proposition 2.3, doit satisfaire la condition de surface libre :

$$t_{rr}(U_1)|_{r=a} = t_{rz}(U_1)|_{r=a} = 0.$$

Cette condition est réalisée si, pour tout n, le couple (U_{pn}, U_{sn}) est solution d'un système algébrique homogène de déterminant :

$$\Delta_n(\omega) = 4\mu_1\omega_n^2\delta_n\beta_n K_1(\beta_n a)K_0(\delta_n a) + \left(\omega_n^2 - \delta_n^2\right)\left[\lambda_1\omega_n^2 - (\lambda_1 + 2\mu_1)\beta_n^2\right]K_0(\beta_n a)K_1(\delta_n a) + \frac{2\mu_1}{a}\beta_n\left(\omega_n^2 + \delta_n^2\right)K_1(\delta_n a)K_1(\beta_n a).$$

Sachant que la fonction $S(z) = K_0(z)/K_1(z)$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$, on peut montrer que, pour tout $\omega > 0$ et tout n, $\Delta_n(\omega) \neq 0$. Ce qui prouve que $\forall n$, $U_{pn} = U_{sn} = 0$ et par suite $U_1 = 0$ dans Ω_1. □

Théorème 2.1 (d'unicité). *Le problème* (P) *admet au plus une solution.*

Démonstration. Montrons que $(\mathrm{P_h})$ n'admet que la solution triviale. Alors, d'après la Proposition 2.4, $U_1 = 0$ dans Ω_1 et les conditions de transmission entraînent :

$$U_2(r,h) = \frac{\partial U_2}{\partial z}(r,h) = 0.$$

D'autre part l'équation $AU_2 + \omega^2 U_2 = 0$ dans Ω_2 s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} = A_1\frac{\partial^2 U_2}{\partial r^2} + A_2\frac{\partial^2 U_2}{\partial r\partial z} + A_3\frac{\partial U_2}{\partial r} + A_4\frac{\partial U_2}{\partial z} + A_5 U_2$$

avec $A_i = A_i(r)$, $i = 1, 5$, des matrices 2×2 analytiques en r. Ainsi U_2 satisfait dans Ω_2 un problème de Cauchy à coefficients analytiques et le théorème d'unicité de Holmgren implique alors que $U_2 = 0$ dans Ω_2. Ce qui prouve que $U = 0$ dans Ω. □

Remarque. Le Théorème 2.1 est vrai si le demi-espace est homogène (i.e., cas $h = 0$), ceci peut être justifié en remarquant que, dans la Proposition 2.1, la première limite découle de la seconde dans le cas particulier du contour $\Gamma^R = \{r > a,\ z > 0,\ r^2 + z^2 = R^2\}$.

Références

[1] A. Baroni, Modélisation du couplage sol-fluide pour la sismique entre puits. Thèse de l'École Centrale de Paris, 1996.
[2] M. Bouchon, D.P. Schmitt, Full-wave acoustic logging in an irregular borehole, Geophysics 54 (6) (1989) 758–765.
[3] D. Colton, R. Kress, Integral Equation Methods in Scattering Theory, Springer-Verlag, 1983.
[4] V.D. Kupradze, Three-Dimentional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity, North-Holland, 1979.
[5] G.F. Roach, B. Zhang, The limitting-amplitude principle for the wave propagation problem with two unbounded media, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 112 (1992) 207–223.
[6] C.H. Wilcox, Scattering Theory for d'Alembert Equation in Exterior Domains, in: Lecture Notes in Math., Vol. 442, Springer, 1975.
[7] G.A. Winbow, Seismic sources in open cased borehole, Geophysics 56 (7) (1991) 1040–1050.