Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 245–250
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Géométrie différentielle/Physique mathématique

Feuilletages des espaces temps globalement hyperboliques par des hypersurfaces à courbure moyenne constante

Foliations of globally hyperbolic spacetimes by CMC hypersurfaces

Thierry Barbot [a], François Béguin [b], Abdelghani Zeghib [a]

[a] *CNRS, UMR 5669, UMPA, ENS Lyon, 46, allée d'Italie, 69364 Lyon, France*
[b] *UMR 8628, Laboratoire de mathématiques, bâtiment 425, Université Paris Sud, 91405 Orsay, France*

Reçu le 7 décembre 2002 ; accepté le 18 décembre 2002

Présenté par Étienne Ghys

Résumé

Nous annonçons le résultat suivant : toute variété lorentzienne de dimension 3, globalement hyperbolique maximale, à courbure constante négative ou nulle, et à surface de Cauchy compacte, admet une fonction temps unique dont les fibres sont des surfaces de Cauchy à courbure moyenne constante. Nous discutons l'extension de ce résultat en dimension supérieure. ***Pour citer cet article : T. Barbot et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

We announce the following result: every maximal globally hyperbolic 3-dimensional spacetime with compact Cauchy surface, and with nonpositive constant curvature admits a unique time function whose fibers are constant mean curvature surfaces. We discuss the extension of this result in higher dimensions. ***To cite this article: T. Barbot et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abridged English version

The purpose of this Note is to announce the following result:

Theorem 0.1. *Let (M, g) be a 3-dimensional maximal globally hyperbolic spacetime, with nonpositive constant curvature, and with a compact Cauchy surface. Then, M is foliated by constant mean curvature spacelike hypersurfaces. The leaves of this foliation are the fibers of some function $\tau : M \to \mathbf{R}$ increasing with time, the*

Adresses e-mail : Thierry.Barbot@umpa.ens-lyon.fr (T. Barbot), Francois.Beguin@math.u-psud.fr (F. Béguin), Abdelghani.Zeghib@umpa.ens-lyon.fr (A. Zeghib).

1631-073X/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00019-0

value $\tau(x)$ for every x in M being the mean curvature of the leaf containing x. Moreover, any constant mean curvature surface in (M, g) is a fiber of τ.

The last part of Theorem 0.1 follows from the first part (particularly, the increasing character of τ along timelike curves) and from the following "Maximum Principle" valid in all chronologically oriented Lorentzian manifolds: if Σ, Σ' are two spacelike hypersurfaces admitting a common point of tangency x_0, and if the hypersurface Σ' lies in the future of Σ, then the mean curvatures H and H' of Σ and Σ' at x_0 satisfy $H' \leqslant H$. For these arguments, choice of sign is important: here, for the definition of mean curvature, we select the normal vector oriented in the future direction.

Theorem 0.1 has been shown by Andersson [1], in the case of null curvature, without any assumption on the dimension of M, but with some topological restriction on the Cauchy hypersurface for higher dimensions. Our proof and Andersson's proof have as common features the use of the classification of spacetimes with nonpositive constant curvature by Mess [7], and the exhibition of barriers to which Gerhardt's result [6] can be applied.

When M is flat, convex barriers are easily obtainable by the principle of geometric realizations of holonomy deformations. Gerhardt's theorem [6] then implies the existence of a constant mean curvature surface. The desired constant mean curvature foliation is obtained by pushing this surface by the so-called *Moncrief flow* (see [3]).

In the negative curvature case, we use as barriers some smooth approximations of convex-concave surfaces, canonically appearing in the geometric description of [7]. The theorem then follows from [6] and [3].

The main obstacle to the extension of Theorem 0.1 in higher dimension is the nonvalidity of [3] in dimension greater than 3. In the case where M is flat, Andersson solves this problem by using the Gauss flow [1]; we point out the existence of a more elementary geometrical argument, providing an alternative proof of Andersson's result (see [4]).

1. Introduction

Soit (M, g) une variété lorentzienne (non compacte), satisfaisant l'équation d'Einstein dans le vide avec constante cosmologique Λ :

$$\mathrm{Ricci}(g) = \Lambda g.$$

Les métriques à courbure sectionnelle constante sont des exemples de telles variétés lorentziennes, dans ce cas, la courbure sectionnelle est $n\Lambda$, où n est la dimension de M. Nous ne considérons aussi que le cas où Λ est négative ou nulle.

Cette introduction a pour but de présenter des notions classiques, qui ont l'avantage de mettre en perspective les résultats annoncés ici à l'attention du lecteur non familier avec le sujet. Le lecteur averti est invité à passer à l'énoncé du Théorème 1.2.

Notre convention est celle en usage en relativité générale : la métrique lorentzienne g est de signature $(-, +, \ldots, +)$. Une courbe de classe C^1 dans (M, g) est de *type temps* ou *temporelle,* si ses vecteurs tangents sont de g-norme négative. Une hypersurface immergée est *spatiale* si g s'y restreint en une métrique riemannienne.

La méthode classique pour traiter la résolution de l'équation d'Einstein consiste à se placer dans un voisinage tubulaire d'une hypersurface spatiale plongée Σ, et de ne garder comme données que la métrique riemannienne $\bar{g}$ sur Σ obtenue par restriction de g, et la seconde forme fondamentale $\mathbb{III}$. La question devient alors : *à quelle condition une métrique riemannienne $(\Sigma, \bar{g})$ se réalise-t-elle par un plongement isométrique dans une variété lorentzienne d'Einstein, de seconde forme fondamentale $\mathbb{III}$?*

Nous ne cherchons pas à développer d'une manière complète cette question, renvoyant à l'excellent texte [2]. Indiquons quelques points :

– toute donnée $(\Sigma, \bar{g}, \mathbb{II})$ n'admet pas de solution ; pour ce faire, elle doit satisfaire une certaine équation, dite *équation des contraintes.*
– les solutions recherchées sont les espaces temps (M, g) pour lesquelles $(\Sigma, \bar{g})$ se réalise en tant qu'*hypersurface de Cauchy,* c'est-à-dire, d'hypersurface rencontrée par toute courbe de type temps inextensible. Ces espaces temps sont dits *développement de Cauchy de* $(\Sigma, \bar{g}, \mathbb{II})$. Un d'entre eux est dit *maximal* si tout plongement isométrique de (M, g) dans un développement de Cauchy de $(\Sigma, \bar{g}, \mathbb{II})$ est un difféomorphisme. Cette restriction aux développements de Cauchy ne fait perdre aucune généralité du point de vue local. Les espaces temps développements de Cauchy d'une hypersurface plongée sont dits *globalement hyperboliques,* en abrégé, espace temps GH. Ils sont tous difféomorphes à un produit $\Sigma \times \mathbf{R}$, où chaque tranche $\Sigma \times \{*\}$ est une hypersurface de Cauchy. De plus, ces espaces temps sont *chronologiquement orientés,* c'est-à-dire, il existe un champ de vecteurs de norme partout négative, ce qui assigne à chaque courbe temporelle une orientation future ou passée, et permet de définir le futur et le passé de toute partie de (M, g).
– le problème ainsi posé est encore mal adapté aux techniques classiques. Un obstacle majeur est la dimension infinie de l'espace des solutions, car l'équation d'Einstein est invariante par le groupe des difféomorphismes de la variété ambiente. Pour lever cet obstacle, on réduit l'espace des solutions en imposant des contraintes supplémentaires. Deux méthodes classiques réalisent ce programme. La première méthode consiste à fixer des coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$ (telles que la surface $\Sigma \times \{0\}$ correspond à $(x_n = 0)$), et d'imposer que ces coordonnées soient harmoniques pour la métrique solution recherchée (ce qui ne fait perdre aucune généralité au problème). L'équation d'Einstein devient alors une EDP hyperbolique quasi-linéaire que les techniques classiques permettent de résoudre. Cette idée est au fondement de la preuve du :

Théorème 1.1 (Choquet-Bruhat, Geroch [5]). *Toute donnée $(\Sigma, \bar{g}, \mathbb{II})$ satisfaisant l'équation des contraintes admet un développement de Cauchy maximal, unique à isométries près.*

Ce théorème focalise l'intérêt sur les espaces temps globalement hyperboliques. Signalons la fameuse Conjecture de Censure Cosmique (version forte), stipulant que les développements de Cauchy maximaux sont aussi maximaux en tant qu'espaces temps d'Einstein pour une famille générique de données de Cauchy $(\Sigma, \bar{g}, \mathbb{II})$. Nous utilisons la notation abrégée GHM pour les espaces temps GH maximaux (au sens où ils sont développements de Cauchy maximaux de leurs hypersurfaces de Cauchy). L'autre méthode de résolution de l'équation d'Einstein consiste à se restreindre aux solutions sur $\Sigma \times \mathbf{R}$ pour lesquelles chaque « tranche » spatiale $\Sigma \times \{*\}$ est à courbure moyenne constante (CMC en abréviation). L'équation se simplifie là aussi de manière remarquable. L'aspect désagréable de cette approche est de supposer l'existence d'une hypersurface CMC.

Nous nous intéressons ici aux espaces temps à courbure constante (qui satisfont en particulier l'équation d'Einstein). Rappelons que les espace temps de dimension $2 + 1$ qui satisfont l'équation d'Einstein sont tous à courbure constante (ces espaces temps bénéficient d'un intérêt particulier, offrant un cadre simplifié pour l'étude des problèmes de gravité quantique). Les espaces lorentziens modèles de courbure constante nulle, positive et négative sont respectivement l'espace de Minkowski (noté $\mathbf{M}^n$), l'espace de Sitter (noté dS_n), l'espace anti-de Sitter (noté AdS_n).

Mess a classifié les espaces GHM spatialement compacts (i.e., admettant une hypersurface de Cauchy compacte ; abréviation GHMC) de dimension $2 + 1$ en courbures constantes nulle et négative, chacun de ces espaces correspondant à la donnée de deux points dans l'espace de Teichmüller de la surface de Cauchy ([7], les espaces GHM y sont appelés domaines de dépendance). La surface de Cauchy ne peut jamais être de genre 0 (i.e., une sphère), et elle ne peut être un genre 1 que lorsque la courbure ambiante est nulle. Les questions abordées dans cette note se traitent aisément dans ce cas particulier grâce aux Propositions 7 et 8 de [7] ; nous supposons donc dorénavant que le genre de la surface de Cauchy est plus grand que 2.

Dans [7], Mess évoque la question, déjà d'actualité dans la communauté physique, de l'existence de feuilletages CMC dans les espaces temps GHM de courbure constante. C'est précisément l'objet de cette Note :

Théorème 1.2. *Toute variété lorentzienne GHMC de dimension* $2+1$ *à courbure constante négative ou nulle admet une unique fonction* τ *à valeurs réelles dont chaque fibre* $\tau^{-1}(k)$ *est une surface de Cauchy à courbure moyenne constante* k*. De plus,* τ *est strictement croissante le long des courbes temporelles orientées vers le futur.*

Nous traitons à la Section 2 le cas le plus délicat ; celui de la courbure négative. Nous discutons celui de la courbure nulle, ainsi que le cas de la dimension supérieure, à la Section 3. Signalons ici que Andersson a montré le Théorème 1.2 dans le cas où la variété considérée est de courbure nulle, de dimension quelconque, sous l'hypothèse que les hypersurfaces de Cauchy admettent une métrique hyperbolique [1]. La preuve d'Andersson est analogue à la notre en son esprit ; nous proposons cependant une simplification significative de cette preuve.

Le Théorème 1.2 nous semble intéressant à plusieurs titres :

– il est toujours intéressant d'exhiber un objet géométrique (ici un feuilletage CMC) caractéristique puisque unique. Le théorème implique en fait l'unicité des surfaces spatiales compactes de courbure moyenne constante donnée k. En effet, les hypersurfaces CMC dans les variétés lorentziennes vérifient un « Principe du Maximum ». Dans notre cas, si Σ est une telle surface dans (M,g), ce « Principe du maximum » assure les inégalités $k \geqslant \mathrm{Max}\{\tau(x) \mid x \in \Sigma\}$ et $k \leqslant \mathrm{Min}\{\tau(x) \mid x \in \Sigma\}$,
– la notion d'hypersurface CMC est naturellement liée à l'équation d'Einstein, comme en témoigne son intervention dans la résolution de l'équation d'Einstein,
– il est remarquable que ces feuilletages CMC, considérés comme famille de surfaces riemanniennes paramétrées par leur courbure moyenne, induisent, lorsqu'on ne retient des métriques que leurs classes conformes, des chemins paramétrés dans l'espace de Teichmüller qui sont les projections des orbites d'un flot Hamiltonien non-autonome sur le cotangent de l'espace de Teichmüller, dit flot de Moncrief (voir [8,3]). Le Théorème 1.2 permet de compléter ces travaux, qui supposaient l'existence d'une hypersurface CMC, permettant d'identifier dorénavant de manière complète la classe des espaces GHMC de topologie $\Sigma \times \mathbf{R}$ de courbure constante négative ou nulle avec l'espace des orbites des flots de Moncrief (un flot pour chaque signe de la courbure).

2. Présentation de la preuve du théorème en courbure négative

Soit M une variété GHMC localement anti de Sitter de dimension $2+1$.

Première étape : passage d'une surface CMC à un feuilletage CMC. D'après [3, Corollary 7], l'existence d'un feuilletage CMC dont les feuilles sont les fibres d'une fonction temps $t : M \to \mathbf{R}$ se réduit à l'existence d'une seule surface de type espace qui soit CMC. Signalons ici que la preuve dans [3] utilise la réduction de Moncrief à un flot hamiltonien sur le cotangent de Teichmüller évoquée ci-dessus ; elle est basée sur une majoration de l'énergie de Dirichlet des tranches spatiales CMC. Signalons aussi à l'occasion que ce théorème est valable pour les espaces temps de dimension $2+1$ à courbure constante de tout signe, et non pas uniquement en courbure négative.

Deuxième étape : Existence d'une surface CMC par la méthode des barrières. Une méthode générale et classique pour trouver des hypersurfaces CMC est d'exhiber des « barrières » infranchissables par le flot de la courbure moyenne, et contraignant ses orbites à converger vers une solution CMC. Une référence adéquate pour notre cadre est [6], dont nous présentons ici une version partielle et simplifiée du théorème principal (Théorème 6.1) :

Théorème 2.1. *Soit* (M,g) *une variété lorentzienne globalement hyperbolique spatialement compacte. Soient* Σ_-*,* Σ_+ *deux hypersurfaces plongées spatiales disjointes,* Σ_- *étant dans le passé de* Σ_+*. Soit* k_- *(resp.* k_+*) la borne* *supérieure (resp. inférieure) de la fonction courbure moyenne sur Σ_- (resp. Σ_+). Alors, pour toute valeur réelle k vérifiant $k_- < k < k_+$, il existe une hypersurface spatiale plongée de courbure moyenne constante k, contenue dans le futur de Σ_- et le passé de Σ_+.*

Ce théorème mérite des commentaires additionnels. Il est bien connu que les hypersurfaces spatiales plongées et compactes dans un espace temps GH sont des hypersurfaces de Cauchy, isotopes les unes aux autres Ainsi, sous les hypothèse du théorème, l'intersection entre le futur de Σ_- et le passé de Σ_+ est difféomorphe à $\Sigma_- \times [0,1]$, chaque $\{*\} \times [0,1]$ étant une courbe temporelle. Toute hypersurface spatiale plongée dans ce domaine est alors le graphe d'une application de Σ_- dans $[0,1]$. Le signe de la courbure moyenne (trace de la seconde forme fondamentale) utilise le choix d'une orientation transverse, i.e., chronologique.

C. Gerhardt montre aussi [6, Théorème 7.5] un théorème d'existence de feuilletage CMC sous l'hypothèse de la condition d'énergie forte (satisfaite dans notre cadre) qui suggère une idée de preuve alternative pour la première étape, valable en toute dimension, évitant le recours au flot de Moncrief sur le cotangent de Teichmüller.

Troisième étape : Existence de barrières. C'est dans cette étape que se situe notre contribution essentielle, et où intervient la description géométrique apportée par G. Mess. L'espace anti-de Sitter AdS_n se définit comme suit : si Q désigne la forme quadratique $-x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ sur $\mathbf{R}^{n+1}$, alors AdS_n est la nappe $(Q = -1)$ munie de la métrique lorentzienne induite par Q. Le modèle de Klein $\mathbf{K}_n$ de anti-de Sitter est la projection de AdS_n dans $\mathbf{RP}^n$. Dans ce modèle, les géodésiques de la métrique sont les intersections avec les droites projectives. Le bord de $\mathbf{K}_n$ dans $\mathbf{RP}^n$ est une quadrique. En dimension $n = 3$, cette quadrique est un hyperboloïde à une nappe. Il découle de la classification de G. Mess que tout espace temps GHMC à courbure constante -1 est isométrique au quotient d'un ouvert *convexe* Ω de $\mathbf{K}_3$ par un sous-groupe discret Γ de $SO_0(2,2)$. De plus, l'adhérence de Γ rencontre l'hyperboloïde $\partial\mathbf{K}_3$ en une courbe de Jordan Λ, topologiquement transverse aux deux réglages de l'hyperboloïde. De plus, l'enveloppe convexe $\mathrm{Conv}(\Lambda)$ de Λ dans $\mathbf{RP}^3$ est d'intérieur contenu dans $\mathbf{K}_3$, et l'adhérence de $\mathrm{Conv}(\Lambda)$ dans $\mathbf{K}_3$ est entièrement contenue dans Ω ; sa frontière dans Ω est l'union de deux disques topologiques Γ-invariants $\widetilde{\Sigma}_-$, $\widetilde{\Sigma}_+$ (en convenant que $\widetilde{\Sigma}_+$ est dans le futur de $\widetilde{\Sigma}_-$, une orientation chronologique de Ω ayant été préalablement fixée). Les disques « plissés » $\widetilde{\Sigma}_-$, $\widetilde{\Sigma}_+$ sont respectivement convexe et concave (la nuance entre convexe et concave n'ayant de sens qu'après sélection d'une orientation chronologique) de type espace (au sens où les hyperplans d'appui à $\mathrm{Conv}(\Lambda)$ en des points de $\widetilde{\Sigma}_\pm$ ont pour intersection avec $\mathbf{K}_3$ des hyperplans totalement géodésiques de type espace). En particulier, les disques plissés $\widetilde{\Sigma}_-$, $\widetilde{\Sigma}_+$ sont des surfaces spatiales à courbure moyenne (définie au sens des distributions) respectivement négative et positive.

Le quotient de $\mathrm{Conv}(\Lambda)$ par Γ se plonge isométriquement dans la variété globalement hyperbolique $\Gamma \setminus \Omega$ en un domaine U bordé par les hypersurfaces topologiques Σ_-, Σ_+ quotients des disques plissés $\widetilde{\Sigma}_-$, $\widetilde{\Sigma}_+$. Ces hypersurfaces sont les pré-candidats naturels pour le rôle de barrières nécessaire pour l'utilisation du Théorème 2.1 ; il y a cependant deux obstacles :

- en général, ces hypersurfaces topologiques ne sont pas lisses,
- ces hypersurfaces sont respectivement convexe et concave, mais ne sont jamais *strictement* convexe et concave (elles ont systématiquement des zones totalement géodésiques).

Nous levons le premier obstacle en montrant que les hypersurfaces $\Sigma_\pm$ sont C^0-approximables par des hypersurfaces lisses spatiales $\Sigma_\pm^\infty$ respectivement convexe et concave. Le deuxième est levé par le fait que pour les $\epsilon > 0$ suffisamment petits, les points à distance chronologique ϵ dans le futur (resp. le passé) de Σ_+^∞ (resp. Σ_-^∞) forment une hypersurface de seconde forme fondamentale définie positive (resp. définie négative). Ce sont les barrières permettant l'application du Théorème 2.1.

3. Courbure constante nulle, dimensions supérieures

La preuve du Théorème 1.2 lorsque l'espace temps est de courbure nulle, suit dans ses grandes lignes la preuve présentée ci-dessus, mais utilise de manière cruciale le fait que, pour tout espace temps GHMC plat (M, g), il existe une famille à un paramètre (U_t, g_t) d'espaces temps plats GH compacts à bord, continue pour la topologie C^∞, telle que :

– chaque (U_t, g_t) $(t \neq 0)$ se plonge isométriquement en une sous-variété de (M, g) bordé par des hypersurfaces de Cauchy,
– (U_0, g_0) se plonge isométriquement dans un espace temps GHMC qui est quotient du cône futur de l'origine dans Minkowski par un sous-groupe de $\mathrm{SO}(1, 2)$.

Le cône futur admet une fonction temps CMC évidente : la forme quadratique lorentzienne elle-même. Les fibres de cette fonction temps dans U_0 induisent par proximité des surfaces spatiales dans M_t de courbure moyenne controlable, fournissant des barrières vérifiant les hypothèses de 2.1. Cet argument est inopérant dans le cas des espaces temps de courbure non nulle. Cependant, il assure que la propriété d'admettre une hypersurface CMC est ouverte parmi les espaces temps considérés ici.

Pour passer à la dimension supérieure, deux difficultés techniques sont à relever :

(1) L'existence d'une hypersurface CMC en dimension supérieure n'assure plus *a priori* l'existence d'un feuilletage CMC, l'article [3] n'étant appliquable qu'en dimension $2 + 1$.
(2) On doit montrer formellement que toute hypersurface spatiale concave ou convexe est C^0 approximable par une hypersurface spatiale lisse concave ou convexe.

Lorsque la courbure est nulle, la classification de [7] des GHMC s'étend lorsque les hypersurfaces de Cauchy sont homéomorphes à des variétés hyperboliques (voir [1]). Le point 2 peut alors être contourné exactement comme en dimension $2 + 1$, et le point 1 est pallié par des arguments alternatifs. Un argument possible est celui utilisé dans [1] en recourant au flot de Gauss. Il existe aussi un autre argument, de nature plus géométrique et plus élémentaire, que nous détaillons dans [4]. Ces arguments aboutissent à l'analogue du Théorème 1.2 en courbure nulle et dimension quelconque.

En courbure négative, la classification de [7] s'étend aux dimensions supérieures (voir [4]), et la résolution du point 2 assurerait l'existence de barrières auxquelles appliquer le Théorème 2.1, menant à l'existence d'hypersurfaces CMC de courbure moyenne proche de 0. Nous n'avons aucune idée pour résoudre le point 1 dans ce contexte.

Références

[1] L. Andersson, Constant mean curvature foliations of flat space-times, Preprint, math.DG/0110245.
[2] L. Andersson, The global existence problem in general relativity, Institut des Hautes Études Scientifiques, Preprint IHES/M/00/18, 2000.
[3] L. Andersson, V. Moncrief, A. Tromba, On the global evolution problem in $2 + 1$ gravity, J. Geom. Phys. 23 (3–4) (1997) 191–205.
[4] T. Barbot, F. Béguin, A. Zeghib, Constant mean curvature foliations of globally hyperbolic space-times with constant curvature, en préparation.
[5] Y. Choquet-Bruhat, R. Geroch, Global aspects of the Cauchy problem in general relativity, Comm. Math. Phys. 14 (1969) 329–335.
[6] C. Gerhardt, H-surfaces in Lorentzian manifolds, Comm. Math. Phys. 89 (4) (1983) 523–553.
[7] G. Mess, Lorentz spacetimes of constant curvature, Institut des Hautes Études Scientifiques, Preprint IHES/M/90/28, 1990.
[8] V. Moncrief, Reduction of the Einstein equation in $2 + 1$ dimensions to a Hamiltonian system over Teichmüller space, J. Math. Phys. 30 (1989) 2907–2914.