C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 733–738

Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Classification et représentation probabiliste des solutions positives d'une équation elliptique semi-linéaire

Benoit Mselati

Département de mathématiques et applications, École normale supérieure, 45, rue d'Ulm, 75230 Paris cedex 05, France

Reçu le 11 septembre 2002 ; accepté le 13 septembre 2002

Note présentée par Haïm Brézis.

Résumé Nous montrons que les solutions positives de $\Delta u = u^2$ dans un domaine lisse et borné de $\mathbb{R}^d$ sont uniquement caractérisées par leur trace fine au bord définie dans [6], répondant ainsi à une question ouverte importante de [2]. Une formule probabiliste faisant intervenir le serpent brownien et reliant une solution à sa trace fine est également obtenue. Nous prouvons en outre que toute solution est limite croissante de solutions majorées par des fonctions harmoniques dans D. ***Pour citer cet article : B. Mselati, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 733–738.***

Classification and probabilistic representation for the positive solutions of a semilinear elliptic equation

Abstract We prove that a nonnegative solution of $\Delta u = u^2$ in a bounded and smooth domain in $\mathbb{R}^d$ is uniquely determined by its fine trace on the boundary as defined in [6], thus answering a major open question of [2]. A probabilistic formula for a solution in terms of its fine trace and of the Brownian snake is also provided. Moreover, we show that every solution is the increasing limit of solutions which are dominated by a harmonic function in D. ***To cite this article: B. Mselati, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 733–738.***

Abridged English version

1. Introduction

We are concerned with the classification of the nonnegative solutions of the semilinear elliptic partial differential equation $\Delta u = u^2$ in a bounded and smooth domain D in $\mathbb{R}^d$. A first definition of the trace on the boundary was introduced by Le Gall in dimension 2 in 1993 by probabilistic methods (cf. [7,9]). It was later extended independently by Dynkin and Kuznetsov [5] and by Marcus and Véron [12,13], to the equation $\Delta u = u^\alpha$, $\alpha > 1$, in the unit ball B of $\mathbb{R}^d$. To every solution, there corresponds a pair (K, ν) called

Adresse e-mail : Benoit.Mselati@ens.fr (B. Mselati).

S1631-073X(02)02557-8/FLA

the trace of u, where K is a compact subset of singularities of u on the boundary ∂B and ν is a Radon measure on the relatively open set $\partial B\backslash K$ (cf. [11]). However, in the supercritical case $d \geqslant \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$, a solution is not uniquely determined by its trace (cf. [10], p. 128). As far as the equation $\Delta u = u^2$ is concerned, the supercritical case corresponds to $d \geqslant 3$. In 1998, a definition of the fine trace was introduced by Dynkin and Kuznetsov for the nonnegative solutions of $Lu = \psi(u)$, L being a second order linear elliptic operator and ψ belonging to a large class of monotone, convex and increasing functions (cf. [6]). Following some of the ideas developed by Dynkin and Kuznetsov, we prove in [14] that a solution of $\Delta u = u^2$ is uniquely determined by its fine trace. In the special case of equation $\Delta u = u^2$, this solves the main open problem raised in the epilogue of [2].

2. Main results

Let $d \geqslant 3$ be an integer and let D be a smooth and bounded domain in $\mathbb{R}^d$. For every finite measure ν on ∂D, we define the energy of ν by $\mathcal{E}(\nu) = \int \nu(\mathrm{d}y) \int \nu(\mathrm{d}y')\Phi_d(|y-y'|) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, where $\Phi_3(u) = 1 + \log_+(1/|u|)$ and $\Phi_d(u) = |u|^{3-d}$ if $d \geqslant 4$. If Γ is a Borel subset of ∂D, the boundary capacity of Γ is defined by $\mathrm{cap}_\partial(\Gamma) = (\inf_{\nu\in\mathcal{P}(\Gamma)}(\mathcal{E}(\nu)))^{-1}$, where $\mathcal{P}(\Gamma)$ stands for the set of all probability measures on Γ. A nonnegative solution of $\Delta u = 4u^2$ is said to be moderate if it is dominated by a harmonic funtion in D. Every moderate solution has a minimal harmonic majorant which is itself associated with a measure on the boundary via the Poisson integral representation $h_\nu(x) = \int_{\partial D} k_D(x,y)\nu(\mathrm{d}y)$, where k_D stands for the Poisson kernel in D. This construction establishes a one-to-one correspondence between the set of moderate solutions of $\Delta u = 4u^2$ and the finite measures on ∂D which do not charge sets of zero boundary capacity (cf. [8] and [4]). We put $\nu \in \mathcal{N}_1$ if ν does not charge sets of zero boundary capacity and we denote by u_ν the moderate solution associated with $\nu \in \mathcal{N}_1$. We also put $\nu \in \mathcal{N}_0$ if ν is the increasing limit of measures belonging to $\mathcal{N}_1$. If $\nu \in \mathcal{N}_0$, there exists a sequence $\nu_n \in \mathcal{N}_1$ such that $\nu_n \uparrow \nu$. Besides, one can define a solution u_ν such that $u_{\nu_n} \uparrow u_\nu$ (cf. [1]). The elements of $\{u_\nu;\ \nu \in \mathcal{N}_0\}$ are the increasing limits of moderate solutions. In Dynkin's terminology, these solutions are called σ-moderate.

In [14], we adapt the notion of stochastic boundary value of a solution introduced by Dynkin in the superprocess setting (cf. [1] and [2]) to the Brownian snake framework. Let $\mathbb{N}_x$ be the excursion measure from $x \in D$ of the Brownian snake (cf. [10]). If E is a bounded domain in $\mathbb{R}^d$, we denote by Z^E the exit measure from E of the Brownian snake. Let also D_n be an increasing sequence of smooth subdomains of D such that $\overline{D_n} \subset D_{n+1}$ and $\bigcup_{n\geqslant 0} D_n = D$. If $u \geqslant 0$ and $\Delta u = 4u^2$ in D, there exists a nonnegative random variable Z_u called the stochastic boundary value of u such that $\langle Z^{D_n}, u\rangle \to_{n\to\infty} Z_u$, $\mathbb{N}_x$-a.s, for every $x \in D$. Let $\mathcal{U}$ stand for the set of nonnegative solutions of $\Delta u = 4u^2$ in D. There is a one-to-one correspondence between $\mathcal{U}$ and the set $\mathcal{Z}$ of all stochastic boundary values of solutions. If $u \in \mathcal{U}$, u is connected to its stochastic boundary value by the representation formula $u(x) = \mathbb{N}_x(1 - \exp(-Z_u))$, for every $x \in D$ (cf. [1] and [14]). The set $\mathcal{Z}$ is a convex cone closed under almost sure convergence. For instance if $u, v \in \mathcal{U}$, $Z_u + Z_v = Z_{u\oplus v}$, a.s., where $u \oplus v = \max\{w \in \mathcal{U};\ w \leqslant u + v\}$. Let $\mathcal{E}^D$ stand for the set of exit points from D of the Brownian snake and define $u_\Gamma(x) = \mathbb{N}_x(\mathcal{E}^D \cap \Gamma \neq \varnothing)$ for every $x \in D$ and for every Borel subset Γ of ∂D. Then $Z_{u_\Gamma} = \infty 1_{\{\mathcal{E}^D\cap\Gamma\neq\varnothing\}}$, a.s. (cf. [1] and [14]). For every Borel set $\Gamma \subset \partial D$, u_Γ belongs to $\mathcal{U}$. If $K \subset D$ is compact, u_K is the maximal nonnegative solution of $\Delta u = 4u^2$ such that $u_{\partial D\backslash K} = 0$ and if Γ is a Borel set, $u_\Gamma = \sup\{u_K;\ K \subset \Gamma,\ K \text{ compact}\}$ (cf. [2] and [14]). By means of purely analytic methods we prove that, for every $x \in D$,

$$u_\Gamma(x) \leqslant \begin{cases} C(D)\,\mathrm{dist}(x,\partial D)\,\mathrm{dist}(x,\Gamma)^{-3}\mathrm{cap}_\partial\left(\dfrac{\Gamma}{\mathrm{dist}(x,\Gamma)}\right), & \text{if } d = 3,\\ C(D)\,\mathrm{dist}(x,\partial D)\,\mathrm{dist}(x,\Gamma)^{-d}\mathrm{cap}_\partial(\Gamma), & \text{if } d \geqslant 4. \end{cases}$$

From these upper bounds, we deduce the following result which provides a positive answer to a question raised by Dynkin in [2].

Pour citer cet article : B. Mselati, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 733–738

THEOREM 2.1 (cf. [14]). – *Let $d \geqslant 3$ and let D be a bounded domain of $\mathbb{R}^d$ of class* C^4. *For every Borel subset Γ of ∂D, u_Γ is σ-moderate.*

If $x \in D$ and $y \in \partial D$, we denote by $\mathbb{P}^D_{x \to y}$ the law of Brownian motion started at x and conditioned to exit D at y. Let also ζ be the lifetime of this process.

DEFINITION 2.2 (cf. [6]). – Let u be a nonnegative solution of $\Delta u = 4u^2$. The fine trace of u is the pair (Γ, ν) where

- $\Gamma = \mathrm{SG}(u) = \{y \in \partial D;\ \int_0^\zeta u(B_t)\,\mathrm{d}t = +\infty\}$, $\mathbb{P}^D_{x \to y}$-a.s. for every $x \in D$.
- $\nu = \sup\{\mu \in \mathcal{N}_1;\ u_\mu \leqslant u,\ \mu(\Gamma) = 0\}$.

The set $\mathrm{SG}(u)$ is a (Borel) set of singularities of u on the boundary and ν is a σ-finite measure on $\partial D \backslash \Gamma$ of class $\mathcal{N}_0$ (cf. [6]). Let $\widetilde{u}_\Gamma = \sup\{u_\nu;\ \nu \in \mathcal{N}_1,\ \nu(\partial D \backslash \Gamma) = 0\} \in \mathcal{U}_0$ (see [6] and [14]). Dynkin and Kuznetsov proved in [6] that $\widetilde{u}_\Gamma \oplus u_\nu \leqslant u$ if $\mathrm{tr}(u) = (\Gamma, \nu)$. It follows from Theorem 2.1 that $\widetilde{u}_\Gamma = u_\Gamma$. As a result $u \geqslant u_\Gamma \oplus u_\nu$ if $\mathrm{tr}(u) = (\Gamma, \nu)$. In [14], we prove the reverse inequality, which leads to the following classification theorem.

THEOREM 2.3 (cf. [14]). – *Let $d \geqslant 3$ and let D be a bounded domain of class* C^4 *in $\mathbb{R}^d$. If u is a nonnegative solution of $\Delta u = 4u^2$, with fine trace (Γ, ν), then*

- $u = u_\Gamma \oplus u_\nu = \max\{w \in \mathcal{U};\ w \leqslant u_\Gamma + u_\nu\}$.
- *u is σ-moderate.*
- *For every $x \in D$, $u(x) = \mathbb{N}_x(\mathcal{E}^D \cap \Gamma \neq \varnothing) + \mathbb{N}_x(1_{\{\mathcal{E}^D \cap \Gamma = \varnothing\}}(1 - \exp(-Z_{u_\nu})))$.*

---

1. Les résultats

Nous étudions le problème de la classification des solutions positives de l'équation aux dérivées partielles semi-linéaire $\Delta u = u^2$ dans un domaine lisse et borné de $\mathbb{R}^d$ par leur trace sur la frontière. Une première notion de trace au bord pour les solutions de cette équation a été introduite par Le Gall en dimension 2 en 1993 (cf. [7,9]) en utilisant des outils probabilistes comme le serpent brownien. Elle a ensuite été étendue indépendamment par Dynkin et Kuznetsov [5] et par Marcus et Véron [12,13], à l'équation $\Delta u = u^\alpha$, $\alpha > 1$, dans la boule unité B de $\mathbb{R}^d$. Si $d < \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$ (cas sous-critique), toute solution positive u de $\Delta u = u^\alpha$ dans B est associée de façon bi-univoque à un couple (K, ν) appelée trace de u, K étant un ensemble compact de singularités de u sur ∂B et ν une mesure de Radon sur l'ensemble relativement ouvert $\partial B \backslash K$ (cf. [11]). Dans le cas sur-critique $d \geqslant \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$ (pour l'équation $\Delta u = u^2$, cela correspond à $d \geqslant 3$), il n'y a plus correspondance entre les solutions positives et leur trace au bord (cf. [10], p. 128). En 1998, une nouvelle définition de la trace faisant intervenir le mouvement brownien conditionné a été introduite par Dynkin et Kuznetsov pour l'équation $Lu = \psi(u)$, L étant un opérateur différentiel linéaire elliptique du second ordre et ψ appartenant à une classe importante de fonctions convexes et croissantes (cf. [6]). Dans [14], nous montrons en combinant méthodes analytiques et probabilistes que, dans le cas particulier de l'équation $\Delta u = u^2$, cette trace fine caractérise les solutions de $\Delta u = u^2$, ce qui permet d'obtenir une classification complète des solutions positives de cette équation.

Plus précisément, nous considérons un domaine lisse et borné D de $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 3$. Nous disons qu'une solution positive de $\Delta u = u^2$ dans D est modérée si elle est majorée par une fonction harmonique dans D. Nous disons qu'une solution est σ-modérée si et seulement si elle est limite croissante de solutions modérées (cf. [6]). Soit K un sous-ensemble compact de ∂D nous appelons u_K la solution positive maximale de $\Delta u = u^2$ vérifiant $u_{|\partial D \backslash K} = 0$. Si Γ est un sous ensemble borélien de ∂D, il existe une solution notée u_Γ telle que $u_\Gamma = \sup\{u_K;\ K \text{ compact},\ K \subset \partial D\}$ (cf. [1]). Le théorème suivant répond à une question posée dans [2].

THÉORÈME 1.1 (cf. [14]). – *Soit $d \geqslant 3$ et D un domaine borné de $\mathbb{R}^d$ de classe* C^4. *Pour tout sous-ensemble borélien Γ de ∂D, u_Γ est σ-modérée.*

Dans [6], Dynkin et Kuznetsov définissent la trace fine d'une solution positive de $Lu = \psi(u)$ comme un couple (Γ, ν) où Γ est un ensemble de singularités de u sur la frontière de D et ν une mesure σ-finie sur $\partial D \backslash \Gamma$. Le résultat qui suit résoud le problème de la classification des solutions de $\Delta u = u^2$ par leur trace fine.

THÉORÈME 1.2 (cf. [14]). – *Soit D un domaine borné de $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 3$, de classe* C^4. *Les solutions positives de $\Delta u = u^2$ dans D sont uniquement caractérisées par leur trace fine. Toute solution de $\Delta u = u^2$ dans D est σ-modérée.*

2. Démarche utilisée

Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des solutions positives de $\Delta u = 4u^2$ dans un domaine D de $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 3$, de classe C^4 (le facteur 4 permet simplement une représentation probabiliste plus agréable des solutions). Nous notons $\mathcal{U}_1$ l'ensemble des solutions modérées de $\Delta u = 4u^2$, qui sont les solutions majorées par des fonctions harmoniques dans D. Une solution modérée u admet un majorant harmonique minimal h lui-même associé à une mesure finie ν sur ∂D via la représentation intégrale de Poisson $h(x) = \int_{\partial D} k_D(x, y)\nu(\mathrm{d}y)$, k_D désignant le noyau de Poisson de D. Cette construction établit une correspondance bijective entre $\mathcal{U}_1$ et un certain ensemble de mesures finies sur ∂D noté $\mathcal{N}_1$ (cf. [8] et [4]) qu'on peut décrire précisément : si ν est une mesure finie sur ∂D nous définissons l'énergie de ν par

$$\mathcal{E}(\nu) = \int \nu(\mathrm{d}y) \int \nu(\mathrm{d}y')\Phi_d\big(|y - y'|\big) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\},$$

où $\Phi_3(|u|) = 1 + \log_+(1/|u|)$ si $d = 3$ et $\Phi_d(|u|) = |u|^{3-d}$ si $d \geqslant 4$. Si Γ est un sous-ensemble borélien de ∂D, nous appelons capacité frontière de Γ la quantité

$$\mathrm{cap}_\partial(\Gamma) = \Big(\inf_{\nu \in \mathcal{P}(\Gamma)} \big(\mathcal{E}(\nu)\big)\Big)^{-1},$$

où $\mathcal{P}(\Gamma)$ est l'ensemble des mesures de probabilité sur Γ. Une mesure finie ν est dans $\mathcal{N}_1$ si et seulement si elle ne charge pas les ensembles de capacité frontière nulle (cf. [8] et [4]). Nous notons u_ν la solution modérée de $\Delta u = 4u^2$ associée à $\nu \in \mathcal{N}_1$.

Soit $\mathcal{N}_0$ l'ensemble des mesures Σ-finies sur ∂D qui ne chargent pas les ensembles de capacité frontière nulle. Si $\nu \in \mathcal{N}_0$, il existe une suite $\nu_n \in \mathcal{N}_1$ telle que $\nu_n \uparrow \nu$. On peut alors définir sans ambiguïté une solution u_ν par $u_\nu = \lim_{n\to\infty} \uparrow u_{\nu_n}$ (cf. [6]). L'ensemble $\mathcal{U}_0 = \{u_\nu;\ \nu \in \mathcal{N}_0\}$ est l'ensemble des limites croissante de solutions modérées. Dans la terminologie de Dynkin et Kuznetsov, ces solutions sont appelées σ-modérées (cf. [6]).

Pour tout sous-ensemble compact K de ∂D nous appelons u_K la solution positive maximale de $\Delta u = 4u^2$ vérifiant $u_{|\partial D\backslash K} = 0$. Si Γ est un sous ensemble borélien de ∂D, il existe une solution de $\Delta u = 4u^2$ notée u_Γ telle que $u_\Gamma = \sup\{u_K;\ K \text{ compact},\ K \subset \partial D\}$ (cf. [1]).

PROPOSITION 2.1 (cf. [14]). – *Il existe une constante $C(D)$ ne dépendant que de D telle que,*

$$u_\Gamma(x) \leqslant \begin{cases} C(D)\,\mathrm{dist}(x, \partial D)\,\mathrm{dist}(x, \Gamma)^{-3}\mathrm{cap}_\partial\left(\dfrac{\Gamma}{\mathrm{dist}(x, \Gamma)}\right), & si\ d = 3, \\ C(D)\,\mathrm{dist}(x, \partial D)\,\mathrm{dist}(x, \Gamma)^{-d}\mathrm{cap}_\partial(\Gamma), & si\ d \geqslant 4, \end{cases}$$

pour tout ensemble borélien Γ de ∂D et tout $x \in D$.

La preuve de cette proposition est purement analytique et fait intervenir principalement des méthodes de théorie du potentiel.

Considérons à présent le processus de Markov appelé serpent brownien à valeurs dans l'espace des chemins finis sur $\mathbb{R}^d$ et utilisons la terminologie de [10]. Dans [14], nous adaptons le concept de valeur stochastique frontière d'une solution introduit par Dynkin dans le cadre des super-processus (cf. [1] et [2]) au serpent brownien. Pour tout $x \in D$, nous désignons par $\mathbb{N}_x$ la mesure d'excursion du serpent brownien hors de x. Si D' est un domaine borné de $\mathbb{R}^d$, nous notons $Z^{D'}$ la mesure de sortie du serpent brownien hors de D'. Soit D_n une suite croissante de domaines lisses de $\mathbb{R}^d$ tels que $\overline{D_n} \subset D_{n+1}$ et $\bigcup_{n \geqslant 0} D_n = D$. Pour toute solution $u \geqslant 0$ de $\Delta u = 4u^2$, il existe une variable aléatoire positive Z_u éventuellement infinie définie $\mathbb{N}_x$-p.s. pour tout $x \in D$ par $Z_u = \lim_{n\to\infty} \langle Z^{D_n}, u\rangle$ (cf. [1] et [14]). Nous appelons Z_u la valeur stochastique frontière de u et notons $\mathcal{Z}$ l'ensemble des valeurs stochastiques frontières obtenues quand u décrit $\mathcal{U}$. Pour tout $x \in D$ et tout $u \in \mathcal{U}$,

$$u(x) = \mathbb{N}_x\bigl(1 - \exp(-Z_u)\bigr).$$

Il y a correspondance bijective entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{Z}$. En particulier, $u \leqslant v$ si et seulement si $Z_u \leqslant Z_v$ presque sûrement. L'ensemble $\mathcal{Z}$ est en outre un cône convexe fermé pour la convergence presque sûre (cf. [1] et [14]). En particulier, si $u, v \in \mathcal{U}$, $Z_u + Z_v = Z_{u\oplus v}$, p.s. où

$$u \oplus v = \max\{w \in \mathcal{U};\ w \leqslant u + v\}.$$

Par exemple, si $\mathcal{E}^D$ désigne l'ensemble des points de sortie de D du serpent brownien et si Γ est un sous-ensemble borélien de ∂D, la solution u_Γ définie plus haut vérifie

$$u_\Gamma(x) = \mathbb{N}_x\bigl(\mathcal{E}^D \cap \Gamma \neq \varnothing\bigr), \quad \text{pour tout } x \in D \text{ et } Z_{u_\Gamma} = \infty 1_{\{\mathcal{E}^D \cap \Gamma \neq \varnothing\}} \text{ p.s. (cf. [14]).} \tag{1}$$

THÉORÈME 2.2 (cf. [14]). – *Soit Γ un sous-ensemble borélien de ∂D. La solution u_Γ est σ-modérée.*

Principe de la démonstration. – Posons $\widetilde{u}_\Gamma = \sup\{u_\nu;\ \nu \in \mathcal{N}_1,\ \nu(\partial D\backslash\Gamma) = 0\}$. La solution $\widetilde{u}_\Gamma$ est σ-modérée. Si $\nu \in \mathcal{N}_1$ est portée par Γ, $u_\nu \leqslant u_\Gamma$ et donc $\widetilde{u}_\Gamma \leqslant u_\Gamma$ (cf. [6]). Grâce à la Proposition 2.1, nous montrons qu'existe une constante $C(D)$ telle que $u_\Gamma \leqslant C(D)\widetilde{u}_\Gamma$. Il en découle alors que

$$Z_{u_\Gamma} = \lim_{n\to\infty} \bigl\langle Z^{D_n}, u_\Gamma\bigr\rangle \leqslant C(D) \lim_{n\to\infty} \bigl\langle Z^{D_n}, \widetilde{u}_\Gamma\bigr\rangle = C(D) Z_{\widetilde{u}_\Gamma}.$$

Or $Z_{u_\Gamma} = \infty$ ou 0 d'après (1). Par conséquent, $Z_{u_\Gamma} \leqslant Z_{\widetilde{u}_\Gamma}$ et donc $u_\Gamma \leqslant \widetilde{u}_\Gamma$. Comme $\widetilde{u}_\Gamma \leqslant u_\Gamma$ par construction, $u_\Gamma = \widetilde{u}_\Gamma \in \mathcal{U}_0$. □

Si $\nu \in \mathcal{N}_1$, $u \in \mathcal{U}$, et $x \in D$,

$$\mathbb{N}_x\bigl(Z_{u_\nu} \exp(-Z_u)\bigr) = \int_{\partial D} \nu(\mathrm{d}y) k_D(x, y) \mathbb{E}^D_{x\to y}\left(\exp\left(-4\int_0^\zeta u(B_t)\,\mathrm{d}t\right)\right),$$

où $\mathbb{P}^D_{x\to y}$ désigne la loi d'un mouvement brownien issu de x, conditionné à sortir de D en y et de temps de vie ζ (cf. [1] et [14]). Cette formule relie valeurs stochastiques frontières et mouvement brownien conditionné. Elle justifie la définition suivante due à Dynkin et Kuznetsov.

DÉFINITION 2.3 (cf. [6]). – Soit u une solution positive de $\Delta u = 4u^2$. Sa trace fine est le couple $\mathrm{tr}(u) = (\Gamma, \nu)$ où

– $\Gamma = \mathrm{SG}(u) = \{y \in \partial D;\ \int_0^\zeta u(B_t)\,\mathrm{d}t = +\infty, \mathbb{P}^D_{x\to y}\text{-p.s., pour tout } x \in D\}$.
– $\nu = \sup\{\mu \in \mathcal{N}_1;\ \mu(\Gamma) = 0, u_\mu \leqslant u\}$.

L'ensemble borélien $\mathrm{SG}(u)$ est l'ensemble des singularités de u sur la frontière. La mesure ν est une mesure σ-finie sur $\partial D\backslash\Gamma$ ne chargeant pas les ensembles de capacité 0 (cf. [6]).

PROPOSITION 2.4 (cf. [14]). – *Soit u une solution positive de $\Delta u = 4u^2$ de trace fine (Γ, ν). On a l'inégalité*

$$u \geqslant u_\Gamma \oplus u_\nu.$$

Démonstration. – Nous disons que (Γ, ν) et (Γ', ν') sont équivalents si et seulement si $\mathrm{cap}_\partial(\Gamma \Delta \Gamma') = 0$ et si $\nu = \nu'$. Dans [6], Dynkin et Kuznetsov ont montré que $\widetilde{u}_\Gamma \oplus u_\nu$ était la solution minimale de trace équivalente à (Γ, ν). En particulier, $u \geqslant \widetilde{u}_\Gamma \oplus u_\nu$. D'après le Théorème 2.2, $u_\Gamma = \widetilde{u}_\Gamma$ et par conséquent $u \geqslant u_\Gamma \oplus u_\nu$. □

Nous aboutissons dans [14] au résultat suivant qui précise le Théorème 1.2 et fournit une classification et une représentation probabiliste des solutions positives de $\Delta u = 4u^2$ dans D.

THÉORÈME 2.5 (cf. [14]). – *Soit $d \geqslant 3$ et D un domaine borné de $\mathbb{R}^d$ de classe* C^4. *Si u une solution positive de $\Delta u = 4u^2$ de trace fine* (Γ, ν), *alors*

- $u = u_\Gamma \oplus u_\nu = \max\{w \in \mathcal{U};\ w \leqslant u_\Gamma + u_\nu\}$.
- *u est σ-modérée.*
- *Pour tout $x \in D$,* $u(x) = \mathbb{N}_x(\mathcal{E}^D \cap \Gamma \neq \varnothing) + \mathbb{N}_x(1_{\{\mathcal{E}^D \cap \Gamma = \varnothing\}}(1 - \exp(-Z_{u_\nu})))$.

Principe de la démonstration. – Pour la première partie on prouve qu'une solution de trace (Γ, ν) vérifie $u \leqslant C(D)u_\Gamma + u_\nu$. Il en découle que $Z_u \leqslant C(D)Z_{u_\Gamma} + Z_{u_\nu} = Z_{u_\Gamma} + Z_{u_\nu} = Z_{u_\Gamma \oplus u_\nu}$, p.s. et par conséquent, $u \leqslant u_\Gamma \oplus u_\nu$. En utilisant la Proposition 2.4, on obtient donc l'identité $u = u_\Gamma \oplus u_\nu$.

Dans [6], Dynkin et Kuznetsov ont montré que $u_\mu \oplus u_{\mu'} = u_{\mu+\mu'}$, pour tous $\mu, \mu' \in \mathcal{N}_0$. L'ensemble des solutions σ-modérées est donc stable par $\oplus$ et en particulier, puisque $u_\Gamma \in \mathcal{U}_0$ d'après le Théorème 2.2, $u = u_\Gamma \oplus u_\nu$ est σ-modérée.

Puisque $u = u_\Gamma \oplus u_\nu$, on a $u(x) = \mathbb{N}_x(1 - \exp(-Z_{u_\Gamma \oplus u_\nu}))$. Or, $Z_{u_\Gamma \oplus u_\nu} = Z_{u_\Gamma} + Z_{u_\nu} = \infty 1_{\{\mathcal{E}^D \cap \Gamma \neq \varnothing\}} + Z_{u_\nu}$, p.s. Il s'ensuit que $u(x) = \mathbb{N}_x(\mathcal{E}^D \cap \Gamma \neq \varnothing) + \mathbb{N}_x(1_{\{\mathcal{E}^D \cap \Gamma = \varnothing\}}(1 - \exp(-Z_{u_\nu})))$. □

Remerciements. Je tiens à remercier très chaleureusement Jean-François Le Gall pour son aide constante ainsi que Laurent Véron pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail.

Références bibliographiques

[1] E.B. Dynkin, Stochastic boundary values and boundary singularities for solutions of the equation $Lu = u^\alpha$, J. Funct. Anal. 153 (1998) 147–186.
[2] E.B. Dynkin, Diffusions, Superdiffusions and Partial Differential Equations, in: Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 50, 2002.
[3] E.B. Dynkin, S.E. Kuznetsov, Superdiffusions and removable singularities for quasilinear partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math. 49 (1996) 125–176.
[4] E.B. Dynkin, S.E. Kuznetsov, Solutions of $Lu = u^\alpha$ dominated by L-harmonic functions, J. Anal. Math. 68 (1996) 15–37.
[5] E.B. Dynkin, S.E. Kuznetsov, Trace on the boundary for solutions of nonlinear differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1998) 4499–4519.
[6] E.B. Dynkin, S.E. Kuznetsov, Fine topology and fine trace on the boundary associated with a class of quasilinear differential equations, Comm. Pure Appl. Math. 51 (1998) 897–936.
[7] J.F. Le Gall, Les solutions positives de $\Delta u = u^2$ dans le disque unité, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 317 (1993) 873–878.
[8] J.F. Le Gall, The Brownian snake and solutions of $\Delta u = u^2$ in a domain, Probab. Theory Related Fields 102 (1995) 393–432.
[9] J.F. Le Gall, A probabilistic Poisson representation for positive solutions of $\Delta u = u^2$ in a planar domain, Comm. Pure Appl. Math. 50 (1997) 69–103.
[10] J.F. Le Gall, Spatial Branching Processes, Random Snakes and Partial Differential Equations, in: Lectures in Math. ETH Zürich, Birkhäuser, 1999.
[11] M. Marcus, L. Véron, Trace au bord des solutions positives d'équations elliptiques et paraboliques non linéaires. Résultats déxistence et d'unicité, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 323 (1996) 603–608.
[12] M. Marcus, L. Véron, The boundary trace of positive solutions of semilinear elliptic equations, I: the subcritical case, Arch. Rational Mech. Anal. 144 (1998) 201–231.
[13] M. Marcus, L. Véron, The boundary trace of positive solutions of semilinear elliptic equations, II: the supercritical case, J. Math. Pures Appl. (9) 77 (5) (1998) 481–524.
[14] B. Mselati, Classification et représentation probabiliste des solutions positives de $\Delta u = u^2$ dans un domaine, Thèse de doctorat de l'Université Paris VI, 2002.