C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 533–536

Systèmes dynamiques/*Dynamical Systems*

Un lemme de Mañé bilatéral

Thierry Bousch

Laboratoire de mathématique (UMR 8628 du CNRS), bât. 425/430, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay cedex, France

Reçu le 15 juillet 2002 ; accepté le 25 juillet 2002

Note présentée par Jean-Christophe Yoccoz.

Résumé On démontre que, moyennant des hypothèses d'hyperbolicité sur le système dynamique $T : X \to X$ et de régularité sur la fonction $f : X \to \mathbb{R}$, il existe une fonction $\theta : X \to \mathbb{R}$ aussi régulière que f et telle que $\alpha(f) \leqslant f - \theta + \theta \circ T \leqslant \beta(f)$, où $\alpha(f)$, $\beta(f)$ sont les bornes inférieure et supérieure des moyennes de f le long des orbites périodiques. ***Pour citer cet article : T. Bousch, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 533–536.***

A bilateral version of Mañé's lemma

Abstract We prove that, assuming some hyperbolicity on the dynamical system $T : X \to X$ and some regularity on $f : X \to \mathbb{R}$, there exists $\theta : X \to \mathbb{R}$ in the same regularity class and such that $\alpha(f) \leqslant f - \theta + \theta \circ T \leqslant \beta(f)$, where $\alpha(f)$, $\beta(f)$ are the infimum and the supremum of the averages of f along periodic orbits. ***To cite this article: T. Bousch, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 533–536.***

1. Résultats

THÉORÈME 1. – *Soit $T : X \to X$ une application continue d'un espace métrique compact X dans lui-même, dont la dynamique est transitive. Soient $f, \theta \in \mathrm{C}(X)$ deux fonctions et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ des constantes telles que $\alpha \leqslant f$ et $f - \theta + \theta \circ T \leqslant \beta$. Alors il existe une fonction $\psi \in \mathrm{C}(X)$ telle que $\alpha \leqslant f - \psi + \psi \circ T \leqslant \beta$; de plus, ψ peut être prise lipschitzienne si T, f, θ sont lipschitziennes.*

Démonstration. – Comme la fonction θ n'intervient dans le problème que par l'expression $\theta - \theta \circ T$, on peut lui ajouter une constante arbitraire, et donc la supposer positive sans perte de généralité. Posons alors $C = \sup \theta$, si bien que $0 \leqslant \theta \leqslant C$, et définissons $g = f - \theta + \theta \circ T$. On va distinguer deux cas.

Premier cas : $\alpha \geqslant \beta$. On a alors $\alpha \geqslant \beta \geqslant g = f - \theta + \theta \circ T \geqslant \alpha - \theta + \theta \circ T$, soit $\theta \geqslant \theta \circ T$. Autrement dit, θ décroît le long des orbites. Mais T est transitive, c'est-à-dire qu'elle admet une orbite dense, si bien que θ doit être constante, d'où $f = g = \alpha = \beta$.

Second cas : $\alpha < \beta$. Sans perte de généralité, on peut supposer $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, afin de simplifier les calculs. Soit $v : X \to [0, 1]$ une fonction continue (on verra plus loin comment la choisir), à partir de laquelle on définit

Adresse e-mail : Thierry.Bousch@math.u-psud.fr (T. Bousch).

S1631-073X(02)02527-X/FLA

$$\begin{aligned}h &= f - v\theta + v\theta \circ T\\ &= g + (1-v)\theta - (1-v)\theta \circ T\end{aligned}$$

ce qui donne, pour tout $n > 0$,

$$\begin{aligned}S_n h &= S_n f - v\theta + v\theta \circ T^n \geqslant S_n f - v\theta,\\ S_n h &= S_n g + (1-v)\theta - (1-v)\theta \circ T^n \leqslant S_n g + (1-v)\theta,\end{aligned}$$

où les $S_n h = h + h \circ T + \cdots + h \circ T^{n-1}$ désignent les sommes de Birkhoff. Ces formules montrent en particulier que $v(x) = 0$ implique $S_n h(x) \geqslant 0$, et que $v(x) = 1$ implique $S_n h(x) \leqslant n$.

Pour tout $n > 0$, définissons les ensembles fermés

$$\begin{aligned}K_n &= \{x \in X : S_n f(x) \leqslant C\},\\ L_n &= \{x \in X : S_n g(x) \geqslant n - C\}.\end{aligned}$$

Comme $|S_n f - S_n g| \leqslant C$, les ensembles K_n et L_n sont disjoints dès que $n > 3C$. Prenons par exemple $n = \lfloor 3C + 1 \rfloor$. Alors on peut choisir $v : X \to [0,1]$ lipschitzienne et telle que $v_{|K_n} = 0$ et $v_{|L_n} = 1$. J'affirme qu'on a alors $0 \leqslant S_n h(x) \leqslant n$ pour tout $x \in X$.

En effet, $x \in K_n$ entraîne $v(x) = 0$ et par conséquent $S_n h(x) \geqslant 0$; si au contraire $x \notin K_n$, alors $S_n h(x) \geqslant S_n f(x) - C > 0$. De même, $x \in L_n$ entraîne $v(x) = 1$ et par conséquent $S_n h(x) \leqslant n$, alors que $x \notin L_n$ donne $S_n h(x) \leqslant S_n g(x) + C < n$.

Enfin, posons $H = (S_n h)/n$. De la formule $S_n f = nf - R_n f + R_n f \circ T$, où $R_n f = (n-1) f + (n-2) f \circ T + \cdots + f \circ T^{n-2}$, on déduit

$$\begin{aligned}H &= \tfrac{1}{n} S_n(f - v\theta + v\theta \circ T)\\ &= \tfrac{1}{n} S_n f - \tfrac{1}{n} S_n(v\theta) + \tfrac{1}{n} S_n(v\theta) \circ T\\ &= f - \tfrac{1}{n} R_n f + \tfrac{1}{n} R_n f \circ T - \tfrac{1}{n} S_n(v\theta) + \tfrac{1}{n} S_n(v\theta) \circ T\\ &= f - \psi + \psi \circ T,\end{aligned}$$

où $\psi = [S_n(v\theta) + R_n f]/n$. Notons que ψ est lipschitzienne si T, f, θ le sont (car v a été choisie lipschitzienne aussi). On a bien $0 \leqslant H \leqslant 1$, ce qui conclut l'étude du cas $\alpha < \beta$, et la démonstration du Théorème 1. $\square$

Voici un énoncé analogue pour les flots ; la démonstration est très similaire, et nous l'esquisserons seulement.

THÉORÈME 2. – *Soit X métrique compact, et $\phi : \mathbb{R}^+ \times X \to X$ un flot continu, i.e. $\phi_0(x) = x$ et $\phi_{t+t'}(x) = \phi_t(\phi_{t'} x)$ pour tous $t, t' \in \mathbb{R}^+$ et $x \in X$, dont la dynamique est transitive. Soit $f : \mathbb{R}^+ \times X \to \mathbb{R}$ un cocycle continu, i.e. $f_{t+t'}(x) = f_t(x) + f_{t'}(\phi_t x)$ pour tous $t, t' \in \mathbb{R}^+$ et $x \in X$. Soient $\theta \in \mathrm{C}(X)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vérifiant $\alpha t \leqslant f_t(x)$ et $f_t(x) - \theta(x) + \theta(\phi_t x) \leqslant \beta t$ pour tous $t \in \mathbb{R}^+$ et $x \in X$. Alors il existe $\psi \in \mathrm{C}(X)$, qui peut être prise lipschitzienne si ϕ, f, θ sont lipschitziennes, telle que $\alpha t \leqslant f_t(x) - \psi(x) + \psi(\phi_t x) \leqslant \beta t$ pour tous $t \in \mathbb{R}^+$ et $x \in X$.*

Démonstration. – Le cas $\alpha \geqslant \beta$ se traite comme précédemment. On suppose donc $\alpha < \beta$, disons $\alpha = 0$ et $\beta = 1$. Ici encore on peut supposer $0 \leqslant \theta \leqslant C$ pour une certaine constante C. On introduit alors les cocycles $g, h : \mathbb{R}^+ \times X \to \mathbb{R}$ définis par $g_t(x) = f_t(x) - \theta(x) + \theta(\phi_t x)$ et $h_t(x) = f_t(x) - (v\theta)(x) + (v\theta)(\phi_t x)$. Comme précédemment, on montre l'existence d'une fonction lipschitzienne $v : X \to [0,1]$ et d'un réel $T > 0$ tels que $0 \leqslant h_T(\cdot) \leqslant T$. On définit maintenant H par

$$T H_s(x) = \int_0^T h_s(\phi_t x)\,\mathrm{d}t = \int_0^T (h_{s+t} - h_t)(x)\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}&= -\int_0^T h_t(x)\,\mathrm{d}t + \int_s^{s+T} h_t(x)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^s (h_{t+T} - h_t)(x)\,\mathrm{d}t = \int_0^s h_T(\phi_t x)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Cette dernière égalité montre que $0 \leqslant H_s(\cdot) \leqslant s$ pour tout $s \in \mathbb{R}^+$. Il reste à exprimer H en fonction de f. On a

$$\begin{aligned}T H_s(x) &= \int_0^T (f_s - v\theta + v\theta \circ \phi_s)(\phi_t x)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^T f_s(\phi_t x)\,\mathrm{d}t - \sigma(x) + \sigma(\phi_s x)\end{aligned}$$

où $\sigma(x) = \int_0^T (v\theta)(\phi_t x)\,\mathrm{d}t$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\int_0^T f_s(\phi_t x)\,\mathrm{d}t - T f_s(x) &= \int_0^T (f_{s+t} - f_s - f_t)(x)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^T (f_t \circ \phi_s - f_t)(x)\,\mathrm{d}t = -\rho(x) + \rho(\phi_s x),\end{aligned}$$

où $\rho(x) = \int_0^T f_t(x)\,\mathrm{d}t$. On a donc finalement $H_s(x) = f_s(x) - \psi(x) + \psi(\phi_s x)$, où $\psi = (\sigma + \rho)/T$. La fonction ψ est manifestement lipschitzienne si ϕ, f, θ sont lipschitziennes. Le Théorème 2 est démontré. $\square$

2. Applications

Soit (X, T) un système dynamique à temps discret, comme dans l'énoncé du Théorème 1. Notons $\mathcal{M}$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes T-invariantes sur X et, pour toute fonction $f \in \mathrm{C}(X)$, notons $\alpha(f)$ et $\beta(f)$ le minimum et le maximum, respectivement, de $\int f\mu$ quand μ décrit $\mathcal{M}$. Il est évident que $\min f \leqslant \alpha(f) \leqslant \beta(f) \leqslant \max f$.

D'autre part on a $\alpha(f - \theta + \theta \circ T) = \alpha(f)$ et $\beta(f - \theta + \theta \circ T) = \beta(f)$ pour toute fonction $\theta \in \mathrm{C}(X)$. Il est donc naturel de se demander si on peut choisir θ afin que $\alpha(f) = \min(f - \theta + \theta \circ T)$, autrement dit, $f - \theta + \theta \circ T \geqslant \alpha(f)$; et on a une question analogue pour $\beta(f)$. Ce « problème inverse » est l'objet du « lemme de Mañé », un terme générique pour désigner un certain nombre de théorèmes voisins (dont l'un est dû à Mañé). On consultera [2] pour les énoncés précis, et [3] pour une discussion des hypothèses de validité ; en gros, il faut supposer T hyperbolique et f hölderienne.

Il semble que Conze et Guivarc'h ont été les premiers à énoncer et démontrer un théorème de ce type, dans un préprint non publié [5]. Ce théorème a ensuite été redécouvert indépendamment par plusieurs auteurs [1,4,6]. En voici une formulation, dans le cas particulier de l'application de doublement de l'angle :

THÉORÈME. – *Soit $T : x \mapsto 2x$ l'application de doublement sur le cercle $X = \mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Si $u \in \mathrm{C}(X)$ est hölderienne d'exposant γ, alors il existe $\omega \in \mathrm{C}(X)$ hölderienne d'exposant γ et telle que $\alpha(u) \leqslant u - \omega + \omega \circ T$.*

Cet énoncé, comme tous les autres « lemmes de Mañé », est « unilatéral » en ce qu'il donne seulement un contrôle par en-dessous (ou bien au dessus) de $u - \omega + \omega \circ T$. Bien sûr, on peut appliquer le même théorème à la fonction $-u$, et on obtiendra alors une fonction $\omega' \in \mathrm{C}(X)$ telle que $u - \omega' + \omega' \circ T \leqslant \beta(u)$, mais ω' sera en général différente de ω.

Le Théorème 1 permet de « recoller » ces deux solutions. Remarquons qu'une fonction γ-hölderienne $X \to \mathbb{R}$ pour la distance ordinaire sur $\mathbb{T}^1$ est la même chose qu'une fonction lipschitzienne pour la distance $|y - x|^\gamma$. Appliquant le Théorème 1 avec les fonctions $f = u - \omega + \omega \circ T$ et $g = u - \omega' + \omega' \circ T$

(i.e. $\theta = \omega' - \omega$), on voit qu'il existe $\theta' \in \mathrm{C}(X)$ lipschitzienne pour la distance $|y - x|^\gamma$ et telle que $\alpha(f) \leqslant f - \theta' + \theta' \circ T \leqslant \beta(f)$, autrement dit, $\alpha(u) \leqslant u - \omega'' + \omega'' \circ T \leqslant \beta(u)$, avec $\omega'' = \theta' + \omega$. Nous avons ainsi démontré le « lemme de Mañé bilatéral » suivant :

THÉORÈME. – *Soit $T : x \mapsto 2x$ l'application de doublement sur le cercle $X = \mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Si $u \in \mathrm{C}(X)$ est hölderienne d'exposant γ, alors il existe $\omega \in \mathrm{C}(X)$ hölderienne d'exposant γ et telle que $\alpha(u) \leqslant u - \omega + \omega \circ T \leqslant \beta(u)$.*

De façon générale, les Théorèmes 1 et 2 permettent de « bilatéraliser » tous les lemmes de Mañé existants et à venir.

Références bibliographiques

[1] T. Bousch, Le poisson n'a pas d'arêtes, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 36 (2000) 489–508.
[2] T. Bousch, La condition de Walters, Ann. Sci. École Norm. Sup. 34 (2001) 287–311.
[3] T. Bousch, O. Jenkinson, Cohomology classes of dynamically non-negative C^k functions, Invent. Math. 148 (2002) 207–217.
[4] G. Contreras, A. Lopes, P. Thieullen, Lyapunov minimizing measures for expanding maps of the circle, Ergodic Theory Dynamical Systems 21 (2001) 1379–1409.
[5] J.-P. Conze, Y. Guivarc'h, Croissance des sommes ergodiques et principe variationnel, Manuscrit, 1993.
[6] S.V. Savchenko, Cohomological inequalities for topological Markov chains, Funktsional Anal. i Prilozhen. 33 (1999) 91–93.