C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 529–531

Systèmes dynamiques/*Dynamical Systems*

Exposants de Lyapounov pour opérateurs de Schrödinger discrètes quasi-périodiques

Jean Bourgain

School of Mathematics, Institute for Advanced Study, Einstein Drive, Princeton, NJ 08540, USA

Reçu le 1er juillet 2002 ; accepté le 25 juillet 2002

Note présentée par Jean Bourgain.

Résumé On considère des operateurs de Schrödinger H sur $\mathbb{Z}$ de la forme $H = H_{\lambda,x,\omega} = \lambda v(x + n\omega)\delta_{n,n'} + \Delta$ où v est une fonction réelle analytique non-constante sur le tore d-dimensionnel $\mathbb{T}^d$ $(d \geqslant 1)$ et Δ le Laplacien discret sur $\mathbb{Z}$. Denotons $L_\omega(E)$ l'exposant de Lyapounov, consideré comme fonction de l'énergie E et du vecteur de rotation $\omega \in \mathbb{T}^d$. Pour $|\lambda| > \lambda_0(v)$, on a la minoration $L_\omega(E) > \frac{1}{2}\log|\lambda|$ uniforme pour toute E et ω. Pour tout λ et ω, $L_\omega(E)$ est une fonction continu de E. En plus, $L_\omega(E)$ est continu comme fonction de (ω, E) en tout point $(\omega_0, E_0) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ tel que $k \cdot \omega_0 \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. ***Pour citer cet article : J. Bourgain, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 529–531.***

Lyapounov exponents for discrete, quasi-periodic Schrödinger operators

Abstract We consider quasi-periodic Schrödinger operators H on $\mathbb{Z}$ of the form $H = H_{\lambda,x,\omega} = \lambda v(x + n\omega)\delta_{n,n'} + \Delta$ where v is a non-constant real analytic function on the d-torus $\mathbb{T}^d$ $(d \geqslant 1)$ and Δ denotes the discrete lattice Laplacian on $\mathbb{Z}$. Denote by $L_\omega(E)$ the Lyapounov exponent, considered as function of the energy E and the rotation vector $\omega \in \mathbb{T}^d$. It is shown that for $|\lambda| > \lambda_0(v)$, there is the uniform minoration $L_\omega(E) > \frac{1}{2}\log|\lambda|$ for all E and ω. For all λ and ω, $L_\omega(E)$ is a continuous function of E. Moreover, $L_\omega(E)$ is jointly continuous in (ω, E), at any point $(\omega_0, E_0) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ such that $k \cdot \omega_0 \neq 0$ for all $k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. ***To cite this article: J. Bourgain, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 529–531.***

1. Introduction

Soit v une fonction réelle analytique sur le tore d-dimensional $\mathbb{T}^d$ $(d \geqslant 1)$, v non-constante et $\omega \in \mathbb{T}^d$. On y associe un opérateur de Schrödinger quasi-périodique sur $\mathbb{Z}$

$$H = H_{\lambda,x,\omega} = \lambda v(x + n\omega)\delta_{nn'} + \Delta, \tag{1}$$

Adresse e-mail : bourgain@math.ias.edu (J. Bourgain).

S1631-073X(02)02525-6/FLA

où Δ est le Laplacien discret sur $\mathbb{Z}$

$$\Delta(n,n') = \begin{cases} 1 & \text{si } |n-n'| = 1, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \tag{2}$$

Denotons les matrices de transfert

$$M_N(E;x) = \prod_{n=N-1}^{0} \begin{pmatrix} \lambda v(x+n\omega) - E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}) \tag{3}$$

et l'exposant de Lyapounov

$$L(E) = L_\omega(E) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int_{\mathbb{T}^d} \log\big\|M_N(E;x)\big\|\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

Rappelons les theorèmes de [7] et [3,1].

THÉORÈME 1 ([7]). – *Pour $d = 1$ et $|\lambda| > \lambda_0(v)$, $L(E) > \frac{1}{2}\log|\lambda|$ pour tout ω et E.*

THÉORÈME 2 ([3] pour $d = 1, 2$; [1] d arbitraire). – *Soit H donné par* (1) (λ *fixé*) *et supposons que $L_\omega(E) > 0$ pour tout ω et E. Alors pour toute $x \in \mathbb{T}^d$, il existe un ensemble $\Omega_x \subset \mathbb{T}^d$ de pleine mesure, tel que $H_{\lambda,x,\omega}$ a la propriété de localization d'Anderson pour tout $\omega \in \Omega_x$.*

Rappelons que la propriété de localization d'Anderson signifie que la spectre de l'opérateur est purement ponctuel et les fonctions propres correspondantes ont une décroissance exponentielle pour $n \in \mathbb{Z}$, $|n| \to \infty$.

Récemment, on a démontré dans [4] les propriétés suivantes de l'exposant de Lyapounov pour $d = 1$.

THÉORÈME 3 ([4]). – *Soit v réel analytique sur $\mathbb{T}$. Alors*

(1) *$L_\omega(E)$ est une fonction continue de l'énergie E, pour tout ω.*

(2) *Si $\omega_0 \in \mathbb{T}$ est irrationel* (*i.e.* $k\omega_0 \neq 0$ *pour tout* $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$), *$L_\omega(E)$ est continue au point* (ω_0, E_0) (*pour toute E_0*).

Remarques. – (1) Le Théorème 1 se démontre par complexification. Donc v admet une extension analytique bornée $\tilde{v}$ sur une bande $\{z = x + \mathrm{i}y \mid z \in \mathbb{R},\ |y| < \rho\}$ pour $\rho = \rho(v) > 0$. On utilise alors le fait qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour toute $E_1 \in \mathbb{R}$

$$\max_{0<y_0<\rho/10}\ \min_{x\in\mathbb{R}} \big|\tilde{v}(x+\mathrm{i}y_0) - E_1\big| > \delta \tag{5}$$

et des considérations simples de mesure harmonique.

Une approche de ce genre ne semble pas s'appliquer au cas de potentiels réel analytiques sur $\mathbb{T}^2$, sauf pour des classes particulières (par example, si v est un polynome trigonometrique). De tels résultats furent obtenus par M. Herman.

(2) Concernant le Théorème 3(1), $L_\omega(\cdot)$ a un module de continuité si on suppose ω vérifyant une condition diophantienne

$$\|k\cdot\omega\| > C^{-1}|k|^{-C} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \tag{6}$$

(où C est une constante). Voir [5] et [1].

Si on particulier ω vérifie

$$\inf_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |k|\big[\log\big(1+|k|\big)\big]^C \|k\omega\| > 0 \tag{7}$$

(pour une constante C) et

$$L_\omega(E) > \delta > 0 \quad \text{pour tout } E \in [E_1, E_2] \tag{8}$$

Pour citer cet article : J. Bourgain, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 529–531

alors $L_\omega(\cdot)$ satisfait une estimé Hölderienne.

Mais on ne peut espérer dans le Théorème 3(1) un module de continuité en E uniforme en ω.

(3) l'Enoncé dans le Théorème 3(2) est faux si $\omega_0 \in \mathbb{Q}$. Considérons par example l'opérateur Prèsque–Mathieu, qu'on obtient pour $d = 1$, $v(x) = \cos x$. Alors $L_\omega(E) = \max(0, \log(|\lambda|/2))$ pour tout λ, $E \in \sigma(H)$ et $\omega \notin \mathbb{Q}$ tandis que pour $\omega = p/q$, $L_{p/q}(E)$ dépend de q (voir [4,6]).

2. Resultats dans le cas multi-frequences

Considérons maintenant le modèle (1) où v est non-constant réel analytique sur $\mathbb{T}^d$, $d \geqslant 2$. Dans [2], nos avons établi les analogues des Théorèmes 1 et 3 pour $d = 2$. Les arguments se généralisent au cas $d \geqslant 2$. Donc

THÉORÈME 4 ([2]). – $L_\omega(E) > \frac{1}{2}\log\lambda$, *pour tout* ω, E *et* $|\lambda| > \lambda_0(v)$.

THÉORÈME 5 ([2]). –

(1) $L_\omega(E)$ *est une fonction continu de l'énergy* E, *pour tout* ω.

(2) $L_\omega(E)$ *est continue en* (ω_0, E_0) *comme fonction de* (ω, E), *si* $k \cdot \omega \neq 0 (\mathrm{mod}\ 1)$ *tout* $k \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$.

On obtient comme corollaire du Théorèmes 2 et 4.

THÉORÈME 6. – *Soit* v *réel analytique non-constant sur* $\mathbb{T}^d$ *et* $|\lambda| > \lambda_0(v)$. *Alors pour presque tout* $\omega \in \mathbb{T}^d$, *l'opérateur de Schrödinger* $H_{\lambda,\omega} = \lambda v(n\omega)\delta_{n,n'} + \Delta$ *satisfait la propriété de localization d'Anderson.*

Remarques. – (1) Le Théorème 4 fût établi dans [3] et [5] pour $|\lambda| > \lambda_0(v, \omega)$, en supposant ω vérifiant une condition diophantienne. Cela ne nous permettait que d'enoncer le Théorème 6 que comme résultat perturbatif (si $d > 1$ et v arbitraire, réel analytique).

(2) Il est également démontré dans [5] que $L_\omega(E)$ satifait un module de continuité en E si ω vérifie une condition diophantienne. Si on suppose $L_\omega(E) > \delta > 0$ en plus, le module de continuité est de la forme

$$\exp\left[-\left(\log\frac{1}{|t|}\right)^\beta\right] \tag{9}$$

pour une valeur de $\beta > 0$ (le problème de continuité Hölderienne est non-résolu).

Références bibliographiques

[1] J. Bourgain, Green's function estimates for lattice Schrödinger operators and applications, Ann. of Math. Stud., à paraître.

[2] J. Bourgain, Positivity and continuity of the Lyapounov exponent for shifts on $\mathbb{T}^d$ with arbitrary frequency vector and real analytic potential, Preprint, 2002.

[3] J. Bourgain, M. Goldstein, On nonperturbative localization with quasi-periodic potential, Ann. of Math. 152 (2000) 835–879.

[4] J. Bourgain, S. Jitomirskaya, Continuity of the Lyapounov exponent for quasi-periodic operators with analytic potential, à paraître.

[5] M. Goldstein, W. Schlag, Hölder continuity of the integrated density of states for quasi-periodic Schrödinger operators and averages of shifts of subharmonic function, Ann. of Math. 154 (2001) 155–203.

[6] I.V. Krasovsky, Bloch electrons in a magnetic field and the Ising model, Phys. Rev. Lett. 85 (2000) 4920–4923.

[7] E. Soretz, T. Spencer, Positive Lyapounov exponents for Schrödinger operators with quasi-periodic potentials, CMP 142 (3) (1991) 543–566.