C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 463–468

Analyse harmonique/*Harmonic Analysis*

Familles de graphes expanseurs et paires de Hecke

M. Bachir Bekka [a], Robyn Curtis [b], Pierre de la Harpe [b]

[a] **Département de mathématiques, Université de Metz, Ile du Saulcy, 57045 Metz, France**

[b] **Section de mathématiques, Université de Genève, C.P. 240, CH-1211 Genève 24, Suisse**

Reçu le 28 juin 2002 ; accepté le 9 juillet 2002

Note présentée par Étienne Ghys.

Résumé Soient G un groupe et H un sous-groupe de G. Supposons que (G, H) est une paire de Hecke et que H est engendré par un ensemble fini symétrique à k générateurs. Alors G/H possède une structure naturelle de graphe (en général avec boucles et arêtes multiples) dont les composantes connexes constituent une famille $(X_i)_{i\in I}$ de graphes finis connexes k-réguliers. Nous indiquons des critères pour que la taille de ces graphes finis soit ou non bornée, ou tende vers l'infini. Lorsque la taille des X_i tend vers l'infini, nous énonçons des critères pour que $(X_i)_{i\in I}$ soit une famille de graphes expanseurs, ainsi que divers exemples. ***Pour citer cet article : M.B. Bekka et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 463–468.***

Families of expanding graphs and Hecke pairs

Abstract Let H be a subgroup of a group G. Suppose that (G, H) is a Hecke pair and that H is finitely generated by a finite symmetric set of size k. Then G/H can be seen as a graph (possibly with loops and multiple edges) whose connected components form a family $(X_i)_{i\in I}$ of finite k-regular graphs. In this Note, we analyse when the size of these graphs is bounded or tends to infinity and we present criteria for $(X_i)_{i\in I}$ to be a family of expanding graphs as well as some examples. ***To cite this article: M.B. Bekka et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 463–468.***

Abridged English version

Let G be a group and H a subgroup of G. Set $Y = G/H$ and $I = H\backslash G/H$. We assume that (G, H) is a *Hecke pair*, i.e., the orbits of H in Y are finite.

Assume moreover (as in Propositions 3 and 4 below) that H is finitely generated and that some finite symmetric generating subset S of size k has been chosen in H. The corresponding *Schreier graph* is the graph with vertex set Y and such that the set of edges connecting any two vertices y and y' is in bijection with $\{s \in S \mid sy = y'\}$. In general, this graph contains loops and multiple edges. The family $(X_i)_{i\in I}$ of connected components of this Schreier graph is a family of k-regular finite graphs. We denote by X_i^0 the vertex set of X_i and by $|X_i^0|$ its size. The question which motivates this Note is: when is $(X_i)_{i\in I}$ a *family of expanders*? (as defined, for example, in [10], here with the explicit requirement that $\lim_i |X_i^0| = \infty$).

Adresses e-mail : bekka@poncelet.sciences.univ-metz.fr (M.B. Bekka); Robyn.Curtis@math.unige.ch (R. Curtis); Pierre.delaHarpe@math.unige.ch (P. de la Harpe).

S1631-073X(02)02499-8/REV

We denote by C the core $\bigcap_{g\in G} gHg^{-1}$ of H in G and by $L : I \to \mathbb{N}$ the function $i \mapsto |X_i^0|$.

PROPOSITION 1. – *Let (G, H) be a Hecke pair. Let L and C be as defined above.*
(i) *The function L is bounded if and only if H is commensurable with a normal subgroup of G.*
(ii) *If H is finitely generated and if $[H : C] = \infty$, then the function L is not bounded.*
(iii) *There exist pairs (G, H) such that $[H : C] = \infty$ and such that the function L is bounded.*

It is well known (cf. [14,16]) that there exist a totally disconnected locally compact group $\overline{G}$, a compact open subgroup $\overline{H}$ of $\overline{G}$ and a homomorphism $\varphi : G \to \overline{G}$ with dense image, such that $\varphi^{-1}(\overline{H}) = H$ (thus $G/H = \overline{G}/\overline{H}$ and $H\backslash G/H = \overline{H}\backslash\overline{G}/\overline{H}$). In the particular case where $(G, H) = (\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}[1/p]), \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}))$ for some integer $n \geqslant 2$ and prime p, the pair $(\overline{G}, \overline{H}) = (\mathrm{SL}(n, \mathbb{Q}_p), \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}_p))$ is an example of such a totally disconnected Hecke pair associated to (G, H). We say that a locally compact group $\overline{G}$ is a *Howe–Moore group* if, for any unitary representation π of $\overline{G}$ which does not have non-zero vectors invariant by a non-compact closed normal subgroup of $\overline{G}$, all coefficients of π are zero at infinity.

PROPOSITION 2. – *Let (G, H) be a Hecke pair and let $(\overline{G}, \overline{H})$ be as above. Assume that the group $\overline{G}$ is unimodular, residually linear, and Howe–Moore, and that for any noncompact closed normal subgroup N of $\overline{G}$, the index of $\bigcap_{x\in N} x\overline{H}x^{-1}$ in $\overline{H}$ is infinite. Then the function $L : H\backslash G/H \to \mathbb{N}$ is proper.*

Assume that H is generated by a symmetric set of size k, let $\ell^2(Y)$ be the space of square-summable complex-valued functions on $Y = G/H$, let $\ell^2_0(Y)$ denote the closed subspace of functions orthogonal to the locally constant functions, and let ρ_H^0 be the natural unitary representation of H on $\ell^2_0(Y)$. For each $i \in I$, the largest eigenvalue of the finite graph X_i is k and is simple, since this graph is k-regular and connected; let $\mu_1(X_i)$ denote its second largest eigenvalue.

PROPOSITION 3. – *Let (G, H) be a Hecke pair. Using the notation defined above,*
(i) $\inf_{i\in I}(k - \mu_1(X_i)) > 0$ *if and only if the representation ρ_H^0 does not weakly contain the unit representation 1_H;*
(ii) *if H is amenable and* $\overline{\lim}_{i\in I}|X_i^0| = \infty$, *then* $\inf_{i\in I}(k - \mu_1(X_i)) = 0$;
(iii) *if H has Property (τ), then* $\inf_{i\in I}(k - \mu_1(X_i)) > 0$.

Recall that a group H has Property (τ) (a weakening of Kazhdan's Property (T)) if 1_H is isolated from the set of representations of finite quotient groups of H which have no non-zero fixed vectors (cf. [10]). It follows from Proposition 3(i) that, under the additional hypothesis that the function L is proper, *the family $(X_i)_{i\in I}$ is a family of expanders if and only if the representation ρ_H^0 has no non-zero fixed vectors.*

Though $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ does not have Property (τ), it has an analogous property involving representations which are defined on quotients by congruence subgroups (a theorem of Selberg).

PROPOSITION 4. – *For any prime p, consider the Hecke pair* $(\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}[1/p]), \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}))$ *and a finite symmetric generating set S of* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ *of size k. Then the corresponding family $(X_i)_{i\in I}$ of connected k-regular finite graphs is a family of expanders.*

1. Introduction

Les constructions explicites de familles de *graphes expanseurs* exploitent souvent les propriétés des quotients finis de certains groupes infinis de type fini ; voir par exemple [4,6,10,12,13]. L'objet de cette note est de mettre en évidence le rôle des *paires de Hecke* dans ce contexte.

Soit X un graphe fini connexe à n sommets ; il se peut que plusieurs arêtes lient une même paire de sommets, ou qu'une arête ait ses extrémités confondues (ces arêtes sont les *boucles*). Le *spectre* de X est la suite $\mu_0(X) > \mu_1(X) \geqslant \cdots \geqslant \mu_{n-1}(X)$ des valeurs propres de la matrice d'adjacence A de X, à lignes et colonnes indexées par l'ensemble X^0 des sommets de X, dont le coefficient $A_{x,y}$ est par définition le nombre d'arêtes liant les sommets x et y (chaque boucle en x fournit une contribution de 1 à $A_{x,x}$). Par souci de simplicité, nous restreignons ici la discussion au cas où il existe un entier k tel que le graphe X soit *k-régulier*, c'est-à-dire où $\sum_{y\in X^0} A_{x,y} = k$ pour tout $x \in X^0$. C'est alors une conséquence du théorème de Perron–Frobenius que $k = \mu_0(X) > \mu_1(X)$ et que $|\mu_{n-1}(X)| \leqslant k$.

Dans ce contexte, une *famille d'expanseurs* est une famille $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de graphes finis connexes k-réguliers telle que $\lim_{n\to\infty} |X_n^0| = \infty$ et $\inf_{n\geqslant 1}(k - \mu_1(X_n)) > 0$.

Soit H un groupe de type fini opérant à gauche sur un ensemble Y, et soit $S \subset H$ un système fini de générateurs tels que $S^{-1} = S$. Le *graphe de Schreier* correspondant est le graphe $|S|$-régulier $\mathrm{Sc}(H, S; Y)$ d'ensemble de sommets Y pour lequel l'ensemble d'arêtes liant deux sommets y, y' est en bijection avec $\{s \in S \mid s(y) = y'\}$. Les composantes connexes d'un tel graphe sont en bijection naturelle avec les orbites de H dans Y. Un théorème de Gross précise quand un graphe fini connexe k-régulier est un graphe de Schreier ; c'est par exemple toujours le cas si k est pair (voir [11]).

Soit H un sous-groupe d'un groupe G. Nous désignons par $Y = G/H$ l'espace homogène correspondant, vu comme H-espace à gauche. La paire (G, H) est dite *de Hecke* si les orbites de H dans Y sont toutes finies. Parmi les exemples classiques de paires de Hecke, citons

(i) $(\mathrm{SL}(n,\mathbb{Q}), \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}))$ et $(\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Q}), \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}))$ pour tout $n \geqslant 2$, voir par exemple [1] ;
(ii) $(\mathbb{Q}^* \ltimes \mathbb{Q}, \mathbb{Z})$, voir [3] ;
(iii) $(\mathbb{Z} \ltimes \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} F_i, \bigoplus_{i\geqslant 0} F_i)$, où les F_i sont des copies d'un groupe fini F et où le produit semi-direct se réfère à l'action de $\mathbb{Z}$ par décalages, comme dans [5] ;
(iv) diverses paires (G, B) où B est un sous-groupe de Tits de G, voir dans [2] les exercices du § IV.2, notamment les numéros 22 et 24.

L'objet de cette note est de considérer les familles de graphes finis associés aux paires de Hecke et définies comme suit. Etant donné une paire de Hecke (G, H) telle que H soit de type fini, engendré par un sous-ensemble fini $S = S^{-1}$ de cardinal k, les composantes connexes du graphe de Schreier $\mathrm{Sc}(H, S; Y)$ constituent une famille $(X_i)_{i\in I}$ de graphes finis connexes k-réguliers.

Ci-dessous, nous commençons par examiner sous quelles conditions $\overline{\lim}_{i\in I} |X_i^0| = \infty$ et $\lim_{i\in I} |X_i^0| = \infty$. Nous indiquons ensuite des paires de Hecke dont les graphes associés contiennent, ou constituent, des familles d'expanseurs. Nous remercions K. Tzanev et J. Wilson pour d'utiles suggestions.

2. Taille des orbites

Soit (G, H) une paire de Hecke. Notons $I = H\backslash G/H$ l'ensemble des doubles classes, et $L : I \to \mathbb{N}$ la fonction associant à $i \in I$ le cardinal de la H-orbite correspondante dans $Y = G/H$. Rappelons que, si $i = HgH$, alors $L(i)$ est l'indice $[H : H \cap gHg^{-1}]$ de $H \cap gHg^{-1}$ dans H. Nous désignons par C le coeur $\bigcap_{g\in G} gHg^{-1}$ de H dans G. Rappelons que deux sous-groupes H_1, H_2 de G sont *commensurables* si $H_1 \cap H_2$ est d'indice fini à la fois dans H_1 et dans H_2. La condition $[H : C] = \infty$ est bien sûr nécessaire pour que la fonction L soit non bornée. (Remarque : si $[H : C] = \infty$, alors $[G : H] = \infty$.)

PROPOSITION 1. – *Soit (G, H) une paire de Hecke. On conserve les notations ci-dessus.*

(i) *La fonction L est bornée si et seulement si H est commensurable à un sous-groupe distingué de G.*
(ii) *Si H est de type fini et si $[H : C] = \infty$, alors la fonction L n'est pas bornée.*
(iii) *Il existe des paires de Hecke (G, H) telles que $[H : C] = \infty$ et telles que la fonction L est bornée.*

Démonstration. – Le résultat principal de [14] montre que L est bornée si et seulement s'il existe un sous groupe M de G contenant H comme sous-groupe d'indice fini et tel que H agit sur G/M comme un groupe fini. Il est facile de voir que ceci est équivalent à l'assertion (i). L'assertion (ii) résulte de ce que le nombre de sous-groupes d'indice n dans un groupe H de type fini est fini pour tout $n \geqslant 1$, de sorte que l'hypothèse $[H : C] = \infty$ implique que la fonction L n'est pas bornée.

Pour montrer l'assertion (iii), on peut invoquer l'exemple suivant. Soit S_∞ le groupe des permutations à supports finis de $\mathbb{N}$, soit F un groupe fini non réduit à un élément et soit $G = S_\infty \ltimes \bigoplus_{i=0}^{\infty} F_i$ le produit semi-direct défini par l'action naturelle de S_∞ sur une somme directe infinie de copies de F. Si $H = \bigoplus_{i=1}^{\infty} F_i$, alors la paire (G, H) est de Hecke, $C = \{1\}$ et a fortiori $[H : C] = \infty$, et $[H : H \cap gHg^{-1}] \leqslant |F|$ pour tout $g \in G$. $\square$

Notre prochain objectif est de dégager des critères suffisants pour que la fonction L soit propre, c'est-à-dire pour que l'ensemble $\{i \in I \mid L(i) \leqslant k\}$ soit fini pour tout $k \geqslant 0$.

Soit (G, H) une paire de Hecke. Il existe une *paire de Hecke totalement discontinue* $(\overline{G}, \overline{H})$ associée à (G, H), formée d'un groupe localement compact totalement discontinu $\overline{G}$ et d'un sous-groupe compact ouvert $\overline{H}$, et un homorphisme $\varphi : G \to \overline{G}$ d'image dense tel que $\varphi^{-1}(\overline{H}) = H$; ainsi φ induit une bijection de G/H sur $\overline{G}/\overline{H}$ et de $H\backslash G/H$ sur $\overline{H}\backslash\overline{G}/\overline{H}$. Voir [14] et [16] ; le triplet $(\overline{G}, \overline{H}, \varphi)$ est unique en un sens précisé à la Proposition 1.16 de [16].

Pour tout premier p, la paire $(\mathrm{SL}(n, \mathbb{Q}_p), \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}_p))$ est une paire de Hecke totalement discontinue associée à $(\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}[1/p]), \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}))$, où $\mathbb{Q}_p$ est le corps des nombres p-adiques et $\mathbb{Z}_p$ l'anneau des entiers p-adiques. Soit $\mathbb{A}_f = \prod'_p \mathbb{Q}_p$ l'anneau des adèles finis de $\mathbb{Q}$ (le prime de $\prod'$ indique un *produit restreint* : une suite $(x_p)_p \in \prod_p \mathbb{Q}_p$ est dans $\mathbb{A}_f$ si $x_p \in \mathbb{Z}_p$ pour presque tout p) et soit $\mathbb{O} = \prod_p \mathbb{Z}_p$. La paire $(\mathrm{SL}(n, \mathbb{A}_f), \mathrm{SL}(n, \mathbb{O}))$ est une paire de Hecke totalement discontinue associée à $(\mathrm{SL}(n, \mathbb{Q}), \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}))$. On obtient d'autres exemples en remplaçant $\mathbb{Q}$ par d'autres corps de nombres.

Convenons qu'un groupe localement compact G est *de Howe–Moore* si, pour toute représentation unitaire continue π de G qui ne possède pas de vecteur non nul invariant par un sous-groupe distingué fermé non compact de G, les coefficients de π tendent vers 0 à l'infini. Par exemple, les groupes de Lie semisimples réels de centre fini sont des groupes de Howe–Moore. Plus généralement, le groupe des points **k**-rationnels d'un groupe algébrique semisimple connexe défini sur un corps local **k** est un groupe de Howe–Moore (voir [7], Theorem 5.1). On peut déduire de ceci que, si $\mathbb{G}$ est un groupe algébrique simple connexe défini sur $\mathbb{Q}$, alors le groupe $\mathbb{G}(\mathbb{A}_f)$ des points $\mathbb{A}_f$-rationnels de $\mathbb{G}$ est un groupe de Howe–Moore.

Un groupe est dit *résiduellement linéaire* si ses représentations linéaires complexes continues de dimension finie en séparent les points.

PROPOSITION 2. – *Soit (G, H) une paire de Hecke, et soit $(\overline{G}, \overline{H})$ une paire de Hecke totalement discontinue associée à (G, H) telle que $\overline{G}$ soit un groupe unimodulaire, résiduellement linéaire, et de Howe–Moore. On suppose que, pour tout sous-groupe distingué N fermé et non compact de $\overline{G}$, l'indice de $\bigcap_{x \in N} x\overline{H}x^{-1}$ dans $\overline{H}$ est infini. Alors la fonction $L : H\backslash G/H \to \mathbb{N}$ est propre.*

Démonstration. – Comme il suffit de montrer l'assertion pour la fonction associée à la paire $(\overline{G}, \overline{H})$, nous pouvons supposer que $(G, H) = (\overline{G}, \overline{H})$. Suivant une idée de [14], nous remarquons que $1/L$ coïncide avec un coefficient d'une représentation unitaire de G. Plus précisément, fixons une mesure de Haar à gauche (et à droite) μ sur G normalisée par la condition $\mu(H) = 1$. Soit π la représentation unitaire de G sur $L^2(G)$ définie par

$$\pi(x) f(y) = f(xyx^{-1}), \quad f \in L^2(G),\ x, y \in G.$$

Si $\chi_H \in L^2(G)$ désigne la fonction caractéristique de H, alors

$$\langle \pi(x)\chi_H, \chi_H \rangle = \mu(H \cap xHx^{-1}).$$

D'autre part,

$$L(x) = [H : H \cap xHx^{-1}] = 1/\mu(H \cap xHx^{-1}),$$

et donc $1/L(x) = \langle \pi(x)\chi_H, \chi_H \rangle$ pour tout $x \in G$.

Ainsi, il suffit de montrer que le coefficient matriciel $\langle \pi(\cdot)\chi_H, \chi_H \rangle$ de π tend vers 0 à l'infini. Supposons, par l'absurde, que cela n'est pas le cas. Comme G est de Howe–Moore, il existe une fonction $f \in L^2(G)$ de norme 1 qui est invariante par conjugaison par tous les éléments d'un sous groupe distingué N fermé et non compact de G. Considérons le coefficient matriciel de la représentation régulière gauche λ de G défini par

$$\varphi(x) = \langle \lambda(x) f, f \rangle = \int_G f(x^{-1}y)\overline{f(y)}\,\mathrm{d}\mu(y), \quad x \in G.$$

Alors φ tend vers 0 à l'infini et est invariant par conjugaison par les éléments de N. Le sous ensemble $\{x \in G\colon \varphi(x) \geqslant 1/2\}$ est donc un voisinage compact de e dans G, invariant par conjugaison par les éléments de N. Comme G est résiduellement linéaire, une adaptation d'un argument dû à Iwasawa (voir [8], Theorem 4) montre que G possède un système fondamental de tels voisinages de e. Le sous-groupe H étant ouvert, il contient donc un tel voisinage U de e, et $U \subset \bigcap_{x \in N} xHx^{-1}$ par invariance de U. Ceci montre que $\bigcap_{x\in N} xHx^{-1}$ est un sous-groupe ouvert de H. Comme H est compact, il s'en suit que $[H : \bigcap_{x \in N} xHx^{-1}] < \infty$, en contradiction avec la dernière hypothèse de l'énoncé. □

Les hypothèses de la Proposition 2 sont satisfaites, par exemple, si $\overline{G}$ est l'ensemble des points **k**-rationnels d'un groupe algébrique semi-simple connexe défini sur un corps local non archimédien **k** et si $\overline{H}$ est un sous-groupe compact ouvert de $\overline{G}$.

3. Paires de Hecke et familles de graphes expanseurs

Soit (G, H) une paire de Hecke telle que H est engendré par un ensemble à k éléments. Soient $I = H\backslash G/H$ et $(X_i)_{i\in I}$ la famille de graphes finis connexes k-réguliers correspondant aux données. Soit $\ell^2(Y)$ l'espace de Hilbert des fonctions $\xi : Y \to \mathbb{C}$ telles que $\sum_{y\in Y} |\xi(x)|^2 < \infty$, où $Y = G/H$. Notons $\ell_0^2(Y)$ l'orthogonal des fonctions localement constantes, c'est-à-dire l'espace des fonctions ξ telles que $\sum_{x\in X_i^0} \xi(x) = 0$ pour tout $i \in I$. L'action naturelle de H sur Y fournit une représentation unitaire ρ_H^0 de H dans $\ell_0^2(Y)$.

Nous écrivons $\pi \prec \sigma$ pour indiquer la contenance faible d'une représentation π d'un groupe dans une représentation σ du même groupe, et nous notons 1_H la représentation unité d'un groupe H. Pour la définition de la propriété (τ), voir le chapitre 4 de [10].

PROPOSITION 3. – *Soit (G, H) une paire de Hecke. On conserve les hypothèses et notations ci-dessus.*
(i) $\inf_{i\in I}(k - \mu_1(X_i)) > 0$ *si et seulement si* $1_H \not\prec \rho_H^0$.
(ii) *Si H est moyennable et si* $\overline{\lim}_{i\in I}|X_i^0| = \infty$, *alors* $\inf_{i\in I}(k - \mu_1(X_i)) = 0$.
(iii) *Si H a la propriété (τ), alors* $\inf_{i\in I}(k - \mu_1(X_i)) > 0$.

L'assertion (i) est bien connue : voir la Proposition 3.3.1 et la Remarque 3.3.4 dans [10]. La caractérisation de Kesten des groupes moyennables implique qu'une famille de graphes de Schreier connexes d'un même groupe moyennable de type fini n'est jamais une famille de graphes expanseurs (c'est le Théorème 3.1 de [12]). L'assertion (iii) confirme une fois de plus que les groupes de Kazhdan sont essentiellement des groupes « antimoyennables ».

Lorsque la fonction L est propre, c'est un corollaire immédiat de la Proposition 3 que *la famille $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'expanseurs si et seulement si $1_H \not\prec \rho_H^0$.*

Dans la proposition suivante, nous présentons une famille où le sous-groupe H n'a ni la propriété d'être moyennable, ni la propriété (τ).

PROPOSITION 4. – *On considère un nombre premier p, la paire de Hecke* $(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}[1/p]), \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$, *et un système fini symétrique de générateurs de* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. *Alors la famille correspondante $(X_i)_{i\in I}$ de graphes finis connexes réguliers est une famille d'expanseurs.*

Démonstration. – Bien que le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ ne possède pas la propriété (τ) au sens général, c'est-à-dire relativement à la famille de *tous* ses sous-groupes d'indices finis, il la possède relativement à la famille des *sous-groupes de congruence*, en vertu d'un célèbre résultat de Selberg. Voir les pages 13 et 14 de [15] et le Théorème 4.3.2 de [10].

Plus précisément, posons $H = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ et $Y = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}[1/p])/H$, choisissons $y \in Y$, posons $H_y = \{h \in H \mid hy = y\}$, et notons $X_i^0 = H/H_y$ la H-orbite de y dans Y. Il est facile de vérifier qu'il existe un entier N tel que H_y contienne le sous-groupe

$$H(p^N) = \ker\big(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}\big(2,\mathbb{Z}/(p^N\mathbb{Z})\big)\big).$$

Avec les notations de la proposition 1, il en résulte que les composantes de la représentation ρ_H^0 sont contenues dans la représentation quasi-régulière de H dans $\bigoplus_{N\geqslant 1} \ell_0^2(H/H(p^N))$. Comme cette dernière représentation ne contient pas faiblement 1_H (Selberg), il en résulte que $1_H \not\prec \rho_H^0$. $\square$

Il est facile de calculer la fonction L pour la paire de Hecke $(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}[1/p]), \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$. En effet, considérons, plus généralement, la paire $(G,H) = (\mathrm{SL}(2,\mathbb{Q}), \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$. Par le théorème des facteurs invariants, toute classe double dans $H\backslash G/H$ possède un représentant canonique de la forme

$$y_a = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

pour un entier positif a. Un calcul direct montre que le stabilisateur de y_a dans H coïncide avec le sous-groupe de congruence

$$\Gamma_0(a^2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in H\colon \gamma \equiv 0 \bmod a^2 \right\}$$

qui est d'indice $[H:\Gamma_0(a^2)] = a^2 \prod_{p|a}(1+1/p)$ dans H (voir [9], p. 366). En particulier, chaque classe double dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}[1/p])$ est representée par y_{p^i} pour un entier positif i et l'indice du stabilisateur de y_{p^i} dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ est égal à $p^{2i-1}(p+1)$ pour $i \neq 0$.

Le résultat de Selberg s'applique à d'autres cas, par exemple celui de la paire (G,H) pour laquelle H est $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, et G le produit semi-direct naturel $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \ltimes (\mathbb{Q}^2/\mathbb{Z}^2)$.

Remerciements. Les auteurs ont bénéficié d'un soutien du « Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique ».

Références bibliographiques

[1] A. Andrianov, Quadratic Forms and Hecke Operators, in: Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 286, Springer, 1987.
[2] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4, 5 et 6, Hermann, 1968.
[3] J.-B. Bost, A. Connes, Hecke algebras, type III factors and phase transitions with spontaneous symmetry breaking in number theory, Selecta Math. (N.S.) 1 (1995) 411–457.
[4] Y.C. de Verdière, Spectres de graphes, Cours spécialisés 4, Soc. Math. France, 1998.
[5] R. Curtis, Hecke algebras associated with induced representations, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 334 (2002) 31–35.
[6] G. Davidoff, P. Sarnak, A. Valette, An Elementary Construction of Ramanujan Graphs, livre à paraître.
[7] R. Howe, C. Moore, Asymptotic properties of unitary representations, J. Funct. Anal. 32 (1979) 72–96.
[8] K. Iwasawa, Topological groups with invariant compact neighbourhoods of the identity, Ann. Math. 53 (1951) 345–348.
[9] J. Lehner, Discontinuous Groups and Automorphic Functions, in: Math. Surveys, Vol. 8, Amer. Math. Society, 1964.
[10] A. Lubotzky, Discrete Groups, Expanding Graphs and Invariant Measures, Birkhäuser, 1994.
[11] A. Lubotzky, Cayley graphs: eigenvalues, expanders and random walks, in: P. Rowlinson (Ed.), Surveys in Combinatorics, in: London Math. Soc. Lecture Note Ser., Vol. 218, 1995, pp. 155–189.
[12] A. Lubotzky, B. Weiss, Groups and expanders, DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci. 10 (1993) 95–109.
[13] G. Margulis, Explicit construction of concentrators, Problems Inform. Transmission 9 (1973) 325–332.
[14] G. Schlichting, Operationen mit periodischen Stabilisatoren, Arch. Math. 34 (1980) 97–99.
[15] A. Selberg, On the estimation of Fourier coefficients of modular forms, Proc. Symp. Pure Math. VIII (1965) 1–15.
[16] K. Tzanev, C^*-algèbres de Hecke et K-théorie, Mémoire de thèse, Université Paris-7, 2000.