C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 549–552

Statistique/*Statistics*
(Probabilités/*Probability Theory*)

P-convergence des TRA estimateurs : modèle $MA(q)$

Nawale Berrahou, Khalid El Himdi

Université Mohammed V, faculté des sciences, département de mathématiques et d'informatique, BP 1014 Rabat, Maroc

Reçu le 20 mars 2001 ; accepté le 31 mai 2002

Note présentée par Paul Deheuvels.

Résumé Dans le cadre de l'estimation robuste, les TRA estimateurs ont été introduits dans le cas d'un modèle moyenne mobile contaminé, par un processus de contamination additive. Nous établissons, sous certaines hypothèses, la convergence p.s de ces estimateurs. ***Pour citer cet article : N. Berrahou, K. El Himdi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 549–552.***
© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

P-convergence of the TRA estimates: the $MA(q)$ model

Abstract The TRA estimates are introduced in the case of a moving average model in the presence of additive outliers. We establish, under some hypothesis, the consistency of these estimates. ***To cite this article: N. Berrahou, K. El Himdi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 549–552.***
© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

La classe des TRA estimateurs ou estimateurs basés sur les autocovariances des résidus tronqués, des paramètres d'un modèle $MA(q)$, est introduite par Bustos et Yohai [4] pour un modèle de contamination additive $(Y_t^\gamma)_t$ défini par :

$$Y_t^\gamma = X_t + Z_t^\gamma V_t, \quad \forall t \in \mathbb{Z},$$

où $(X_t)_t$ est un processus $MA(q)$, de paramètre $\theta \in \mathbb{R}^q$, de bruit blanc $(U_t)_t$; $(Z_t^\gamma)_t$ est un processus i.i.d. de Bernoulli de paramètre γ ; et $(V_t)_t$ est un processus de contamination gaussien i.i.d. De plus les v.a $(U_t)_t$, $(Z_t^\gamma)_t$ et $(V_t)_t$ sont indépendants deux à deux.

Soit $Y_1^\gamma, \ldots, Y_n^\gamma$ une réalisation du processus $(Y_t^\gamma)_t$, on définit un TRA estimateur $\hat{\theta}$ du paramètre θ par l'équation vectorielle suivante :

$$\Psi_n(\theta) = \sum_{t=2}^{n} \sum_{l=1}^{t-1} \psi\left(r_t^{h(l)}(\theta)\right) \psi\left(r_{t-l}^{k}(\theta)\right) F_l(\theta) = 0,$$

où $r_t^k = \sum_{i=0}^{k} f_i(\theta) Y_{t-i}^\gamma$ définit le résidu tronqué ; k est le paramètre de troncature ; les f_i sont les coefficients du développement en série entière de l'inverse du polynôme moyenne mobile ; la fonction

Adresse e-mail : elhimdi@fsr.ac.ma (K. El Himdi).

S1631-073X(02)02461-5/FLA

h définie par :

$$h(l)=\begin{cases}k & \text{si } q\leqslant l\leqslant k \text{ ou } l\geqslant k+q+1,\\ l-q-1 & \text{si } k+1\leqslant l\leqslant k+q,\\ k-q+l & \text{si } l\leqslant q-1\end{cases}$$

est introduite pour satisfaire la consistance au sens de Fisher de l'estimateur TRA sous un modèle $MA(q)$ non contaminé i.e., si θ_0 est le vrai vecteur des paramètres θ, nous avons :

$$E\big(\eta\big(r_t^{h(l)}(\theta_0), r_{t-l}^k(\theta_0)\big)\big)=0;$$

et $F_l(\theta)=(f_{l-1}(\theta),\dots,f_{l-q}(\theta))'$.

2. P-convergence des TRA estimateurs

Soit $Y_1^\gamma,\dots,Y_n^\gamma$ une réalisation du processus contaminé $(Y_t^\gamma)_t$. Soit θ_0 le vrai vecteur des paramètres θ. La formule de Taylor–Lagrange appliquée à $\Psi_n(\theta_0)$ entraîne, puisque $\Psi_n(\hat\theta)=0$,

$$\hat\theta-\theta_0=-\left(\frac{D\Psi_n(\theta^*)}{n}\right)^{-1}\frac{\Psi_n(\theta_0)}{n},$$

où $\theta^*=\alpha\hat\theta+(1-\alpha)\theta_0$, avec $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, et $D\Psi_n$ est la matrice Jacobienne, supposée inversible, de Ψ_n.

Posons :

$$U_t=\sum_{i=0}^{\infty} f_i(\theta)X_{t-i},\quad \text{et}\quad S_{t,k}^\gamma=\sum_{i=k+1}^{\infty} f_i(\theta)X_{t-i}-\sum_{i=0}^{k} f_i(\theta)Z_{t-i}^\gamma V_{t-i}.$$

On peut écrire les résidus tronqués $r_t^k(\theta)$ comme suit : $r_t^k(\theta)=U_t-S_{t,k}^\gamma$, où $S_{t,k}^\gamma$ est une quantité bornée. Dans toute la suite, nous supposons vérifiées les hypothèses suivantes :

(H1) la fonction ψ est une fonction réelle de classe C^1, bornée, impaire et de dérivée bornée.

(H2) Le processus moyenne mobile $(X_t)_t$ est inversible, et le bruit blanc $(U_t)_t$ est i.i.d. de loi $N(0,1)$.

Remarque 1. – Il résulte de (H1) qu'il existe deux constantes positives et finies M et M' telles que $\forall x$ $|\psi(x)|\leqslant M$ et $|\psi'(x)|\leqslant M'$.

Remarque 2. – Notons que d'après l'hypothèse (H2), il existe un réel positif $\rho<1$, un entier positif $r\leqslant q$, et deux réels positifs K_1 et K_2 tels que

$$\big|f_l(\theta)\big|\leqslant K_1 l^r\rho^l,\quad \text{et}\quad \left|\frac{\partial f_l}{\partial\theta_i}\right|\leqslant K_2 l^{2r+1}\rho^l.$$

Dans toute la suite, on notera $\psi(r_t)$, $\psi(r_{t-l})$ et F_l au lieu de $\psi(r_t(\theta))$, $\psi(r_{t-l}(\theta))$ et $F_l(\theta)$ respectivement. En appliquant un développement de Taylor à l'ordre 1 pour $\psi(r_t^{h(l)})$ et $\psi(r_{t-l}^k)$, l'expression de Ψ_n devient : $\Psi_n(\theta_0)=\widetilde\Psi_n(\theta_0)+R_n^{k\gamma}$, où

$$\widetilde\Psi_n(\theta_0)=\sum_{t=2}^{n}\sum_{l=1}^{t-1}\psi\big(A_t^\gamma\big)\psi\big(A_{t-l}^\gamma\big)F_l(\theta_0)\quad \text{et}\quad R_n^{k\gamma}=\sum_{t=2}^{n}\sum_{l=1}^{t-1} e_{t,h(l)}^{k\gamma}F_l(\theta_0),$$

où on a posé :

$$e_{t,h(l)}^{k\gamma}=-S_{t-l,k}^\gamma\psi\big(A_t^\gamma\big)\psi'\big(A_{t-l}^\gamma\big)-S_{t,h(l)}^\gamma\psi\big(A_{t-l}^\gamma\big)\psi'\big(A_t^\gamma\big)+S_{t,h(l)}^\gamma S_{t-l,k}^\gamma\psi'\big(A_t^\gamma\big)\psi'\big(A_{t-l}^\gamma\big).$$

Pour citer cet article : N. Berrahou, K. El Himdi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 549–552

Nous pouvons écrire l'estimateur $\hat{\theta}$ sous la forme vectorielle suivante :

$$\hat{\theta}-\theta_0=-\left(\frac{D\Psi_n(\theta^*)}{n}\right)^{-1}\frac{\widetilde{\Psi}_n(\theta_0)}{n}+A(n,k,\gamma) \tag{1}$$

avec

$$A(n,k,\gamma)=-\left(\frac{D\Psi_n(\theta^*)}{n}\right)^{-1}\frac{R_n^{k\gamma}}{n},$$

où $\theta^*=\alpha\hat{\theta}+(1-\alpha)\theta_0$, avec $0\leqslant\alpha\leqslant 1$.

Soit le lemme suivant :

LEMMA 1. – *Soit* $\forall\theta,\exists n_0,\forall n\geqslant n_0$, *la matrice* $((D\Psi_n(\theta))/n)^{-1}$, *lorsqu'elle existe, converge en probabilité.*

Démonstration. – Notons par A_{ij}^n le terme général de la matrice $(D\Psi_n(\theta))_n$, $\forall\theta$, $\forall i, j=1,\ldots,n$, nous avons :

$$A_{ij}^n=\sum_{t=2}^{n}\sum_{l=1}^{t-1}\psi'\big(r_t^{h(l)}\big)\frac{\partial r_t^{h(l)}}{\partial\theta_i}\psi\big(r_{t-l}^k\big)f_{l-j}+\sum_{t=2}^{n}\sum_{l=1}^{t-1}\psi'\big(r_{t-l}^k\big)\frac{\partial r_{t-l}^k}{\partial\theta_i}\psi\big(r_t^{h(l)}\big)f_{l-j}$$
$$+\sum_{t=2}^{n}\sum_{l=1}^{t-1}\psi\big(r_t^{h(l)}\big)\psi\big(r_{t-l}^k\big)\frac{\partial f_{l-j}}{\partial\theta_i}.$$

D'après la Remarques 1 et 2, nous pouvons majorer A_{ij}^n/n dans L^2 par la quantité suivante :

$$\left\|\frac{A_{ij}^n}{n}\right\|_2\leqslant K'\sum_{l=1}^{n-1}\left(1-\frac{l}{n}\right)l^r\rho^l+K''\sum_{l=1}^{n-1}\left(1-\frac{l}{n}\right)l^{2r+1}\rho^l.$$

K et K' sont deux constantes positives, bornées et indépendantes de n. Le terme de droite est une suite convergente, A_{ij}^n/n converge alors dans L^2, donc converge en probabilité, d'où la convergence en probabilité de la matrice $((D\Psi_n(\theta))/n)_n$, $\forall\theta$. Le lemme de Slutsky entraîne alors la convergence en probabilité (ou la p-convergence) de la matrice $((D\Psi_n(\theta))/n)^{-1}$.

LEMMA 2. – *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2), *il existe une suite* k_n *telle que* $k_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$, *et*

$$R_n^{k_n\gamma}\xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s}}0\quad\textit{dans }\mathbb{R}^q.$$

Démonstration. – Nous avons :

$$\big\|R_n^{k_n\gamma}\big\|_{\mathbb{R}^q}\leqslant K_3\sum_{t=2}^{n}\sum_{l=1}^{t-1}\big|e_{t,h(l)}^{k_n\gamma}\big|l^r\rho^l=L_n^{k_n\gamma},$$

K_3 est une constante indépendante de n, et d'après la Remarque 2, nous avons : $\|L_n^{k_n\gamma}\|_2\leqslant Cnk_n^{2r}\rho^{k_n}$. C est une constante indépendante de n. Il en résulte que :

$$\sum_{n=1}^{\infty}E\big(\big(L_n^{k_n\gamma}\big)^2\big)\leqslant C^2\sum_{n=1}^{\infty}n^2k_n^{4r}\rho^{2k_n}.$$

Une suite k_n qui assure la convergence de la série de terme général $n^2 k_n^{4r} \rho^{2k_n}$ est par exemple donnée par : $k_n = \frac{(1+\varepsilon)\ln(\frac{n^8+1}{n})}{2|\ln\rho|}$, $\varepsilon > 0$, arbitraire. D'après l'inégalité de Chebyshev, nous avons :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|L_n^{k_n\gamma}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\left|L_n^{k_n\gamma}\right|^2\right).$$

Un résultat de Stout [10] (Théorème 2.1.1) permet de déduire :

$$L_n^{k_n\gamma} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s}} 0 \quad \text{dans } \mathbb{R} \qquad \text{d'où } A(n, k_n, \gamma) \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0 \text{ dans } \mathbb{R}^q,$$

où P désigne la convergence en probabilité.

D'autre part, soit le lemme suivant :

LEMMA 3. – *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2)*, nous avons*

$$\frac{\widetilde{\Psi}_n(\theta_0)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s}} 0 \quad \textit{dans } \mathbb{R}^q.$$

Démonstration. – Posons :

$$\Psi_n^\alpha = \alpha^t \widetilde{\Psi}_n(\theta_0) = \sum_{t=2}^{n} \sum_{l=1}^{t-1} \psi\left(\theta_t^\gamma\right) \psi\left(\theta_{t-l}^\gamma\right) C_l, \quad \text{avec } C_l = \alpha^t F_l,\ \alpha \in \mathbb{R}^q \text{ arbitraire.}$$

Soit $G_t = \sigma(U_s, W_s, s \leqslant t)$ une σ-algèbre, et $B_n = \Psi_n^\alpha - \Psi_{n-1}^\alpha$. Nous pouvons montrer que Ψ_n^α est une martingale réelle, et alors en utilisant la Remarque 3, nous avons :

$$E(B_n/_{G_{n-1}}) = 0 \quad \forall n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} E\left(B_n^2\right) < \infty.$$

Nous en déduisons d'après Neveu [9] (Proposition IV-6-1) que : $(\widetilde{\Psi}_n(\theta_0))/n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s}} 0$ dans $\mathbb{R}^q$, ce qui achève la preuve. D'où le théorème suivant :

THEOREM 1. – *Le TRA-estimateur $\hat{\theta}$ est p-convergent.*

Références bibliographiques

[1] S. Benhmida, Robustesse et comportement asymptotique d'un TRA-estimateur des coefficients d'un processus ARMA(p,q), Thèse de doctorat, Université de Nancy I, 1995.
[2] G.E.P. Box, G.M. Jenkins, Time Series Analysis: Forcasting and Control, Holden-Day, Oakland, CA, 1970.
[3] P.J. Brockwell, R.A. Davis, Time Series: Theory and Methods, Springer-Verlag, New York, 1991.
[4] C.H. Bustos, V.J. Yohai, Robust estimates for ARMA models, J. Amer. Statist. Assoc. 81 (1986) 155–168.
[5] L. Denby, R.D. Martin, Robust estimation of the first-order autoregressive parameter, J. Amer. Statist. Assoc. 74 (1979) 140–146.
[6] P. Hall, C.C. Heyde, Martingale Limit Theory and its Application, Academic Press, 1980.
[7] R.D. Martin, V.J. Yohai, Influence function for time series, in: Ann. Statist., Vol. 14, Office of Naval Research, 1986, pp. 718–818.
[8] A. Monfort, C. Gourieroux, Cours de séries temporelles, Economica, Paris, 1983.
[9] J. Neveu, Bases mathématiques du calcul des probabilités, Masson, Paris, 1964.
[10] W.F. Stout, Almost Sure Convergence, Academic Press, New York, 1974.