C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 263–266

Probabilités/*Probability Theory*

Isovecteurs pour l'équation de Hamilton–Jacobi–Bellman, différentielles stochastiques formelles et intégrales premières en mécanique quantique euclidienne

Paul Lescot [a,b], **Jean-Claude Zambrini** [c]

[a] LAMFA, CNRS UMR 6140, Sous-équipe « Probabilités et Théorie Ergodique », Université de Picardie Jules Verne, 33, rue Saint-Leu, 80039 Amiens cedex, France

[b] INSSET, Université de Picardie, 48, rue Raspail, 02100 Saint-Quentin, France

[c] Grupo de Física Matemática, Av. Prof. Gama Pinto, 2, 1649-003 Lisboa, Portugal

Reçu le 11 décembre 2001 ; accepté le 31 mai 2002

Note présentée par Paul Malliavin.

Résumé Nous donnons une interprétation stochastique de la représentation géométrique, due à E. Cartan, de l'équation de la chaleur en termes d'un idéal de formes différentielles extérieures et d'isovecteurs engendrant les symétries de cette équation. Cette méthode peut également s'interpréter comme une déformation stochastique de la géométrie de contact d'équations différentielles ordinaires du premier ordre et de la recherche des symétries infinitésimales de leur équation associée d'Hamilton–Jacobi. On généralise ainsi de façon élégante et géométrique des résultats provenant initialement de longs calculs d'analyse stochastique. ***Pour citer cet article : P. Lescot, J.-C. Zambrini, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 263–266.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Isovectors for the Hamilton–Jacobi–Bellman equation, formal stochastic differentials and constants of motion in Euclidean Quantum Mechanics

Abstract We give a stochastic interpretation of the geometrical representation, from E. Cartan, of the heat equation, in terms of ideal exterior differential forms and isovectors generating the symmetries of this equation. The method can also be used to interpret as a stochastic deformation the contact geometry of first order ordinary differential equations and the search for infinitesimal symmetries of the associated Hamilton–Jacobi equation. We thus generalise, in an elegant and geometrical way, the results coming originally from long calculations of stochastic analysis. ***To cite this article: P. Lescot, J.-C. Zambrini, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 263–266.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Adresses e-mail : paul.lescot@insset.u-picardie.fr (P. Lescot); zambrini@cii.fc.ul.pt (J.-C. Zambrini).

S1631-073X(02)02459-7/FLA

L'équation de Schrödinger pour une particule de masse m

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+V\psi$$

s'écrit, dans $\mathrm{L}^2(\mathbf{R},dq)$, pour le potentiel $V=0$ (le « cas libre ») et quand $m=1$:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2},$$

où $\hbar$ dénote la constante (positive) de Planck. Dans tous les cas, $\int_A|\psi(q,t)|^2\,\mathrm{d}q$ est interprétée comme une probabilité de présence de la particule dans le borélien A. En Mécanique Quantique Euclidienne [10–14], cette équation se ramifie en la paire d'équations adjointes par rapport au paramètre t :

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2},\quad \text{et} \tag{$\mathcal{C}_1$}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\hbar}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}, \tag{$\mathcal{C}_2$}$$

la densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue étant donnée, non par $\psi\bar{\psi}$ comme ci-dessus, mais par $\eta\eta_*$, η et η_* désignant respectivement une solution partout strictement positive de $(\mathcal{C}_1)$ et une solution partout strictement positive de $(\mathcal{C}_2)$, dont le produit est intégrable. Est alors associé à cette situation un processus de diffusion à valeurs réelles (dit « de Bernstein » ou « réciproque ») z, satisfaisant l'équation différentielle stochastique :

$$\mathrm{d}z(t)=\sqrt{\hbar}\,\mathrm{d}w(t)+\widetilde{B}\big(t,z(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

relativement à la filtration croissante canonique pour le Brownien w, et l'équation différentielle stochastique

$$\mathrm{d}_*z(t)=\sqrt{\hbar}\,\mathrm{d}_*w_*(t)+\widetilde{B}_*\big(t,z(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

relativement à la filtration canonique décroissante pour le Brownien associé w_*, où $\widetilde{B}\equiv_{\mathrm{def}}\frac{\partial}{\partial q}(\hbar\ln(\eta))$ et $\widetilde{B}_*\equiv_{\mathrm{def}}-\frac{\partial}{\partial q}(\hbar\ln(\eta_*))$.

Ces processus possèdent par construction, une propriété de réversibilité sur un intervalle de temps $[t_0,t_1]$ (correspondant au caractère « mal posé » de $(\mathcal{C}_1)$), fondée sur la forme particulière de leur densité de probabilité (*cf.* [3]).

En posant $S=-\hbar\ln(\psi)$, $(\mathcal{C}_1)$ devient l'équation d'Hamilton–Jacobi–Bellman :

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-\frac{\hbar}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial q^2}+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial S}{\partial q}\Big)^2. \tag{$\mathcal{C}_1'$}$$

Elie Cartan [1] et ses continuateurs [6] ont cherché à munir chacun des systèmes d'équations aux dérivées partielles de la physique mathématique d'une structure symplectique canonique. De ce point de vue, lié aussi à celui de la géométrie de contact [5], l'équation $(\mathcal{C}_1')$ équivaut, en posant $E=-\frac{\partial S}{\partial t}$ (*énergie formelle*) et $B=-\frac{\partial S}{\partial q}$ (*impulsion formelle*), à l'annulation des formes différentielles : $\omega=\mathrm{d}S+E\,\mathrm{d}t+B\,\mathrm{d}q$, $\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}E\,\mathrm{d}t+\mathrm{d}B\,\mathrm{d}q$, et $\beta=(E+\frac{1}{2}B^2)\,\mathrm{d}q\,\mathrm{d}t+\frac{\hbar}{2}\,\mathrm{d}B\,\mathrm{d}t$ sur une sous-variété de dimension 2 de $\mathbf{M}=\mathbf{R}^5$ ((t,q,S,E,B) étant dorénavant considérées comme variables *indépendantes*). Plus précisément, (t,q,S,E,B) est un 1-jet et, du point de vue de la géométrie de contact, $(\mathcal{C}_1')$ définit une hypersurface dans l'espace $\mathcal{J}^1\simeq\mathbf{R}^5$ de tous les 1-jets. Une solution de $(\mathcal{C}_1')$ est alors une courbe de la forme $B=-\frac{\partial S}{\partial q}$, $E=-\frac{\partial S}{\partial t}$ demeurant entièrement dans cette hypersurface (*cf.* [5, Chapter 5]). Soient alors $L=\frac{1}{2}B^2$ le *Lagrangien* (*libre*) *formel* du système classique associé à $(\mathcal{C}_1)$, $\omega_{PC}=E\,\mathrm{d}t+B\,\mathrm{d}q=\omega-\mathrm{d}s$ sa *forme de Poincaré–Cartan*, et I l'idéal de $\mathcal{A}=\wedge T^*(\mathbf{M})$ engendré par ω, $\mathrm{d}\omega$ et β. On entend par *isovecteur* un champ de vecteurs N sur $\mathbf{M}$ tel que la dérivée de Lie $\mathcal{L}_N$ préserve l'idéal $\mathcal{I}$: $\mathcal{L}_N(\mathcal{I})\subseteq\mathcal{I}$; l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de ces isovecteurs contient un idéal abélien de dimension infinie $\mathcal{J}$, provenant de la linéarité de l'équation $(\mathcal{C}_1)$; l'algèbre de Lie $\mathcal{H}$ canoniquement supplémentaire à $\mathcal{J}$ dans $\mathcal{G}$ est de dimension 6 et elle possède une base naturelle dont chacun des générateurs correspond à une symétrie du système physique sous-jacent. $\mathcal{J}$ lui-même correspond à la propriété la plus inhabituelle des processus de Bernstein : le fait qu'on puisse les superposer (sur un intervalle de temps d'existence approprié), le potentiel V (ici 0) étant fixé.

Pour $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie, convenons de noter $Z(\mathcal{G})$ le *centre* de $\mathcal{G}$, c'est-à-dire : $Z(\mathcal{G}) \equiv_{\text{déf}} \{x \in \mathcal{G} \mid (\forall y \in \mathcal{G})[x, y] = 0\}$.

La structure algébrique de $\mathcal{H}$ est intéressante : $\mathcal{H}$ contient un idéal $\mathcal{H}_0$ de dimension 3, isomorphe à l'algèbre de Heisenberg (i.e. la **R**-algèbre de Lie de dimension 3, définie par les générateurs x, y, z et les relations $[x, y] = z$, $[x, z] = [y, z] = 0$), avec $Z(\mathcal{H}) = Z(\mathcal{H}_0)$ de dimension 1, et $\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}_0} \simeq sl_2(\mathbf{R})$ (plus précisément, le quotient $\frac{\mathcal{H}}{Z(\mathcal{H})}$ est isomorphe au produit semi-direct canonique de $sl_2(\mathbf{R})$ par $\mathbf{R}^2$).

Considérant toujours les variables (t, q, S, E, B) comme indépendantes, soit Ω la 2-*forme stochastique formelle* sur $\mathcal{H}$ donnée par :

$$\forall (N, N') \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}, \quad \Omega(N, N') = \big(N(B)N'(q) - N(q)N'(B)\big) + \big(N(E)N'(t) - N(t)N'(E)\big).$$

Il est clair que Ω est une application bilinéaire et antisymétrique de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{M})$; pour $\eta > 0$ une solution fixée de $(\mathcal{C}_1)$, nous définissons la *section* selon η comme l'unique morphisme d'algèbres différentielles $\theta_\eta : \mathcal{A} \to \mathcal{B} = \bigwedge T^*(\mathbf{R}^2)$ tel que $\theta_\eta(t) = t$, $\theta_\eta(q) = q$, $\theta_\eta(S) = -\hbar \ln(\eta)$, $\theta_\eta(E) = \frac{\hbar}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} \equiv \widetilde{E}$ et $\theta_\eta(B) = \frac{\hbar}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial q} = \widetilde{B}$ (on note (t, q) l'élément générique de $\mathbf{R}^2$). Il est clair que $I \subseteq \ker(\theta_\eta)$, donc θ_η définit un morphisme de $\frac{\mathcal{A}}{I}$ dans $\mathcal{B}$.

THÉORÈME 1. – *$\theta_\eta(\omega)$ coïncide avec la forme ω_δ définie dans* [14], *formule* (15), *p.* 390, *et $\Omega_\eta = \mathbb{E}(\theta_\eta \circ \Omega)$ coïncide avec la* 2-*forme stochastique construite dans* [14], *formule* (63), *p.* 402, *lorsque cette dernière est définie. En outre Ω_η est fermée* : $\mathrm{d}\Omega_\eta = 0$.

Rappelons que la forme Ω_η de [14] était définie par : $\Omega_\eta(\delta_1, \delta_2) = \mathbb{E}[(\delta_1 \widetilde{B} \delta_2 q - \delta_1 q \delta_2 \widetilde{B}) - (\delta_1 t \delta_2 \widetilde{E} - \delta_1 \widetilde{E} \delta_2 t)]$, où $\mathbb{E}$ désigne l'espérance par rapport à z et δ_1, δ_2 désignent des *variations* (*cf.* [14]) des différentes variables aléatoires.

Considérons maintenant

$$N = N^t \frac{\partial}{\partial t} + N^q \frac{\partial}{\partial q} + N^S \frac{\partial}{\partial S} + N^E \frac{\partial}{\partial E} + N^B \frac{\partial}{\partial B} \in \mathcal{H},$$

définissons $\Phi_N = -N^S$; alors

$$\Phi_N = -N(S) = -N(-\hbar \ln(\psi)) = \hbar \frac{N(\psi)}{\psi} \equiv \hbar \frac{N^\psi}{\psi}.$$

Le troisième terme de l'expression de N s'écrit donc $\frac{1}{\hbar} \Phi_N \psi \frac{\partial}{\partial \psi}$, et Φ_N coïncide avec la *phase* associée au générateur utilisé en [10] et [11]. La transformation de la forme de Poincaré–Cartan ω_{PC} s'exprime par le

THÉORÈME 2. – *Pour chaque $N \in \mathcal{H}$, on a* : $\mathcal{L}_N(\omega_{PC}) = \mathrm{d}\Phi_N$.

Et celle du lagrangien par le :

THÉORÈME 3. – *Dans les notations du Théorème* 2, *on a* :

$$\mathcal{L}_N(L) + L \frac{\mathrm{d}N^t}{\mathrm{d}t} = D\Phi_N, \tag{$*$}$$

où D désigne le générateur infinitésimal du processus de Bernstein z : $D = \frac{\partial}{\partial t} + \widetilde{B} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\hbar}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2}$.

La relation $(*)$ est l'analogue d'une condition classique en Mécanique Analytique exprimant la variation du Lagrangien sous la transformation engendrée par N ; nous avons ainsi totalement géométrisé le calcul stochastique le long des processus de Bernstein.

Les isovecteurs N du Théorème 2 coïncident avec les premières extensions (ou « prolongations » [9]) des générateurs $\widehat{N}$ de l'algèbre de Lie du groupe de symétrie de l'équation $(\mathcal{C}_1)$ considérés en [10,11] et contiennent donc de nouvelles informations sur les symétries du système. Du point de vue probabiliste, l'analyse précédente correspond à l'étude de certaines h-transformations de Doob des diffusions de Bernstein, que nous formulons ici globalement (par opposition à l'étude locale de [10,11]) dans le cas le plus simple :

THÉORÈME 4. – *Soit $\widehat{N}$ l'un des générateurs ci-dessus, tel que $U_\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \widehat{N}}$ préserve la positivité, et η la solution positive particulière de $(\mathcal{C}_1)$ définissant le processus $z(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, de loi P. Par définition du groupe de symétrie de $(\mathcal{C}_1)$, $\eta_\alpha(q,t) = (U_\alpha \eta)(q,t)$ résout la même équation, et $h_\alpha = \frac{\eta_\alpha}{\eta}$ est une martingale strictement positive de $z(t)$. Si $z^\alpha(t)$ désigne le processus associé à η_α, sa loi P_α est absolument continue par rapport à P et $\frac{\mathrm{d}P^\alpha}{\mathrm{d}P} = h_\alpha$. Si $\mathbb{E}(\exp(\frac{1}{2}\int_t^T |\widetilde{B}^\alpha - \widetilde{B}|^2 \,\mathrm{d}\tau)) < +\infty$, alors $z^\alpha(t)$ est une h-transformation de $z(t)$, de drifts $\widetilde{B}^\alpha(q,t) = \widetilde{B}(q,t) + \hbar \nabla \log h_\alpha(q,t)$ et $\widetilde{E}^\alpha(q,t) = \widetilde{E}(q,t) + \hbar \frac{\partial}{\partial t} \ln h_\alpha(q,t)$.*

Par exemple, le générateur $\widehat{N} = 2t\frac{\partial}{\partial t} + q\frac{\partial}{\partial q}$ correspond à l'invariance d'échelle : $z^\alpha(t) = \mathrm{e}^\alpha z(\mathrm{e}^{-2\alpha} t)$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, de toutes les diffusions z associées à $(\mathcal{C}_1)$ dans le sens précédent. La plus simple d'entre elles est le Brownien $z(t) = \sqrt{\hbar}\, w(t)$ lui-même, associé à la solution triviale de $(\mathcal{C}_1)$ $\eta = 1$. En rebaptisant $\mathrm{e}^{-2\alpha} = \varepsilon$, nous obtenons sa propriété d'invariance bien connue : $w^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1/2} w(\varepsilon t)$, $\forall \varepsilon > 0$.

L'approche ci-dessus est étendue au cas de tout potentiel V quadratique en les variables d'espace (avec des coefficients dépendant éventuellement du temps) et à l'espace d'états $\mathbf{R}^3$, par addition des générateurs de l'algèbre de Lie ci-dessus selon la méthode indiquée au §5 de [13].

La méthode des isovecteurs de Cartan est évidemment indépendante des coordonnées choisies. Quand l'espace d'état devient une variété Riemannienne et le membre de droite de $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ fait intervenir l'opérateur de Laplace–Beltrami, la seule difficulté nouvelle est la définition du transport parallèle stochastique sous-jacent. Les raisons pour lesquelles celui introduit par Dohrn–Guerra (*cf.* [4]) est naturel, et conduit à un générateur infinitésimal D du processus agissant sur un champ de vecteurs Y par $DY^j = (\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{A})Y^j$, où : $\mathcal{A} = \widetilde{B}^j \nabla_j + \frac{\hbar}{2}(\nabla^k \nabla_k + R_k^j)$, ∇_k est la dérivée covariante par rapport à la métrique Riemannienne et R_k^j est le tenseur de Ricci, ont été exposées en [12]. Ce transport s'est, en outre, révélé naturel dans différentes questions récentes de géométrie diffférentielle stochastique sur l'espace des chemins (*cf.* le « damped parallel transport » [8]).

Références bibliographiques

[1] E. Cartan, Leçons sur les invariants intégraux, Hermann, Paris, 1958.

[2] E. Cartan, Les systèmes différentiels extérieurs, Hermann, Paris, 1971.

[3] K.L. Chung, J.C. Zambrini, Introduction to Random Time and Quantum Randomness, Monographs of the Portuguese Mathematical Society, McGraw-Hill, Portugal, 2001.

[4] D. Dohrn, F. Guerra, Geodesic correction to stochastic parallel displacement of tensors, in : Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems, Volta Mem. Conf. Como, 1977, Lecture Notes in Phys., Vol. 93, 1979, pp. 241–249.

[5] R.V. Gamkrelidze (Ed.), Geometry I, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer-Verlag.

[6] B.K. Harrison, F.B. Estabrook, Geometric approach to invariance groups and solution of partial differential systems, J. Math. Phys. 12 (4) (1971) 653–666.

[7] P. Lescot, J.C. Zambrini, Isovectors for the Hamilton–Jacobi–Bellman equation, formal stochastic differentials and constants of motion in Euclidean quantum mechanics, en préparation.

[8] P. Malliavin, Stochastic Analysis, Grundlehren Math. Wiss., Vol. 313, Springer-Verlag, 1997.

[9] P.J. Olver, Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer-Verlag, 1986.

[10] M. Thieullen, J.C. Zambrini, Probability and quantum symmetries – I. The theorem of Noether in Schrödinger's Euclidean quantum mechanics, Ann. Inst. H. Poincaré 67 (3) (1997) 297–338.

[11] M. Thieullen, J.C. Zambrini, Symmetries in the stochastic calculus of variations, Probab. Theory Related Fields 107 (3) (1997) 401–427.

[12] J.C. Zambrini, Probability and quantum symmetries in a Riemannian manifold, in : Progr. Probab., Vol. 45, Birkhaüser, Basel, 1999, pp. 283–300.

[13] J.C. Zambrini, Probabilistic interpretation of the symmetry group of heat equations, in : L. Decreusefond et al. (Eds.), Stochastic Analysis and Related Topics VI (Guilo Workshop), Progr. Probab., Vol. 42, Birkhaüser, Basel, 1998.

[14] J.C. Zambrini, Feynman integrals, diffusion processes and quantum symplectic two-forms, J. Korean Math. Soc. 38 (2) (2001) 385–408.