C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 271–274

Statistique/*Statistics*
(Probabilités/*Probability Theory*)

Influence de la longue mémoire sur le comportement asymptotique d'estimateurs fonctionnels

Graciela Estevez-Perez [a], Philippe Vieu [b]

[a] Departamento de Matématicas, Université de La Corogne, Espagne

[b] Laboratoire de statistique et probabilités, Université Paul Sabatier, UMR CNRS 5583, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex, France

Reçu le 28 février 2002 ; accepté le 31 mai 2002

Note présentée par Paul Deheuvels.

Résumé Les travaux existant en matière d'estimation fonctionnelle de processus se font en général sous une hypothèse de courte dépendance (de type mélange par exemple) qui permet d'obtenir des vitesses de convergence analogues à celles obtenues pour des échantillons indépendants. Cette Note se propose de présenter des résultats asymptotiques pour plusieurs estimateurs fonctionnels (estimateurs de densité, de fonction de répartition et de fonction de hasard) dans le cadre d'un processus à longue mémoire. Nos résultats sont présentés en mettant en évidence comment une telle hypothèse de longue dépendance agit (en les détériorant) sur les vitesses de convergence. ***Pour citer cet article : G. Estevez-Perez, P. Vieu, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 271–274.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Influence of long memory on the asymptotic behaviour of functional estimators

Abstract This Note gives asymptotic results for kernel estimators of several functionals (density, failure rate and distribution functions) of a long-memory process. The results are presented in such a way as to highlight the influence of the long dependence on the rates of convergence. ***To cite this article: G. Estevez-Perez, P. Vieu, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 271–274.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

Les processus à longue mémoire, dont l'étude statistique remonte à divers travaux de Mandelbrot (*cf.* e.g. Mandelbrot et Van Ness [6]), suscitent un intérêt grandissant depuis quelques années dans la modélisation de phénomènes réels pour lesquels des hypothèses classiques (mélange par exemple) s'avèrent trop restrictives (*cf.* e.g. Beran [1]). Alors que la littérature en estimation non-paramétrique de processus faiblement dépendants est trés abondante (*cf.* e.g. Bosq [2]), la plupart des travaux d'inférence statistique pour des processus à longue mémoire nécessitent des hypothèses paramétriques sur la distribution du processus et/ou sur la forme de la décroissance de sa fonction d'autocovariance. Cette Note aborde

Adresse e-mail : vieu@cict.fr (P. Vieu).

S1631-073X(02)02458-5/FLA

l'estimation de certaines fonctions d'intérêt d'un processus à longue mémoire (densité, distribution, taux de hasard), en ne faisant que des hypothèses de type non-paramétrique.

2. Notations et hypothèses

Pour un processus stationnaire $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, la notion de longue dépendance est définie à partir de sa fonction d'auto-covariance, $r(i) = \mathrm{cov}(X_0, X_i)$, par l'hypothèse :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \bigl|r(i)\bigr| = \infty. \tag{1}$$

Afin de clarifier la présentation de nos résultats, nous introduirons le paramètre

$$R_n = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)r(i).$$

Pour ce qui concerne cette étude, nous supposerons que chaque variable X_i admet une densité commune par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Nous nous intéresserons à trois problèmes classiques d'estimation fonctionnelle : l'estimation de la densité f de X_1, de sa fonction de répartition F et de sa fonction de hasard $g = f/(1-F)$. Nous aborderons ces questions au moyen des estimateurs à noyau définis par :

$$f_h(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-X_i}{h}\right), \quad F_h(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H\left(\frac{x-X_i}{h}\right) \quad \text{et} \quad g_h(x) = \frac{f_h(x)}{1-F_h(x)}.$$

Les conditions concernant les paramètres de notre estimateur sont les suivantes :
(H.1) La largeur de fenêtre $h = h(n) \in \mathbb{R}^+$ vérifie $h \to 0$ et $nh \to \infty$ quand $n \to \infty$.
(H.2) K est une fonction de densité symétrique, bornée, à support compact et $H(x) = \int_{-\infty}^{x} K(t)\,\mathrm{d}t$.
Concernant la distribution de notre processus, nous supposerons tout d'abord que :
(H.3) f est deux fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f' \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ et $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.
Quant à la dépendance (*voir* discussion au paragraphe 4), elle est modélisée en supposant que la densité jointe de (X_i, X_{i+j}) par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ existe pour tout couple (i, j) et qu'elle est indépendante de i. En la notant f_j, on suppose qu'elle s'écrit sous la forme :

$$f_j(u,v) = f(u)f(v) + r(j)f'(u)f'(v) + h_j(u,v),$$

où h_j est une fonction vérifiant, pour un $\varepsilon > 0$, l'une ou l'autre des deux conditions suivantes :
(H.4.1) $\int_{\mathbb{R}^2} |k_j(t_1,t_2)|\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2 = \mathrm{O}(|r(j)|^{\varepsilon})$, k_j étant la transformée de Fourier de h_j ;
(H.4.2) $\exists \widetilde{g} \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, $|h_j(u,v)| \leqslant |r(j)|^{\varepsilon}\widetilde{g}(u)\widetilde{g}(v)$.
Nous supposerons en outre que la condition ci-dessous est réalisée :
(H.5) $\exists \alpha > 1$, $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}(1-\frac{j}{n})|r(j)|^{\alpha} = \mathrm{o}(R_n)$, quand $n \to \infty$.

3. Résultats asymptotiques

Nous nous limiterons ici à des résultats de convergence en moyenne quadratique intégrée. Il est clair que des résultats en moyenne quadratique ponctuelle pourraient être énoncés et prouvés sans difficultés de manière similaire. Nous noterons W une fonction de poids telle que :
(H.6) $W(\cdot)$ est positive, bornée, intégrable et de support S_W,

(H.7) $\exists \gamma > 0,\ \forall x \in S_W,\ 1 - F(x) > \gamma.$

THÉORÈME 1. – *Sous les conditions* (H.1)–(H.6) *nous avons* :

$$E \int \big(F_h(x) - F(x)\big)^2 W(x)\,\mathrm{d}x = C_1 R_n + C_2 h^4 - C_3 \frac{h}{n} + C_4 \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(R_n + h^4 + \frac{h}{n}\right). \tag{2}$$

THÉORÈME 2. – *Sous les conditions* (H.1)–(H.6) *nous avons* :

$$E \int \big(f_h(x) - f(x)\big)^2 W(x)\,\mathrm{d}x = C_5 R_n + C_6 h^4 + C_7 \frac{1}{nh} + \mathrm{o}\left(R_n + h^4 + \frac{1}{nh}\right). \tag{3}$$

THÉORÈME 3. – *Si les conditions* (H.1)–(H.7) *sont vérifiées, alors nous avons* :

$$E \int \left(\big(g_h(x) - g(x)\big) \frac{1 - F_h(x)}{1 - F(x)}\right)^2 W(x)\,\mathrm{d}x = C_8 R_n + C_9 h^4 + C_{10} \frac{1}{nh} + \mathrm{o}\left(R_n + h^4 + \frac{1}{nh}\right). \tag{4}$$

Les constantes intervenant dans ces divers théorèmes sont données par :

$$C_1 = \int F'(x)^2 W(x)\,\mathrm{d}x, \qquad C_2 = \left(\frac{1}{2}\int t^2 K(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \int \big(F''(x)\big)^2 W(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$C_3 = \left(\int 2t K(t) H(t)\,\mathrm{d}t\right) \int f(x) W(x)\,\mathrm{d}x, \qquad C_4 = \int F(x)\big(1 - F(x)\big) W(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$C_5 = \int \big(f'(x)\big)^2 W(x)\,\mathrm{d}x, \qquad C_6 = \left(\frac{1}{2}\int t^2 K(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \int \big(f''(x)\big)^2 W(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$C_7 = \left(\int K^2(t)\,\mathrm{d}t\right) \int f(x) W(x)\,\mathrm{d}x, \qquad C_8 = \int \left(\frac{f'(x) + F'(x) g(x)}{1 - F(x)}\right)^2 W(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$C_9 = \left(\frac{1}{2}\int t^2 K(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \int \big(f''(x) + F''(x) g(x)\big)^2 \frac{W(x)}{(1 - F(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

et

$$C_{10} = \left(\int K^2(t)\,\mathrm{d}t\right) \int f(x) W(x)\,\mathrm{d}x.$$

4. Commentaires des résultats et des hypothèses

(i) Concernant nos hypothèses de dépendance, il faut souligner que l'hypothèse centrale (H.4) est une restriction habituelle dans ce type de problème. Plusieurs auteurs se sont efforcés de vérifier (H.4) pour des processus à longue mémoire connus (*cf.* Hall et Hart [5], Giraitis et al. [4] ou Mielniczuk [8]). La seule hypothèse propre à notre approche purement non-paramétrique est la condition (H.5). Estévez et Vieu [3] montrent comment (H.5) est vérifiée par une large classe de processus à longue mémoire (*voir* aussi le paragraphe 5). Notons finalement que cette condition (H.5) est moins restrictive que la condition habituelle $\lim_{n\to\infty} r(i) = 0$.

(ii) Il faut aussi souligner que l'hypothèse (1) n'est pas nécessaire à l'obtention de nos résultats. Ceux-ci sont à la fois valables dans le cadre de la longue mémoire (c'est-à-dire sous (1)), et dans le cadre de processus faiblement dépendants (rejoignant dans ce contexte particulier des résultats classiques). L'écriture de nos résultats à partir du paramètre R_n permet de voir à partir de quel niveau de dépendance les vitesses de convergence se détériorent.

(iii) Afin de centrer notre propos sur l'influence de la longue dépendance, nous nous en sommes tenus à des hypothèses de régularité trés simples (*voir* (H.1)–(H.3)). Des hypothèses plus élaborées n'auraient des conséquences (intéressantes mais hors de propos ici) que sur le biais des estimateurs.

(iv) En estimation de fonction de hasard une version inhabituelle de l'erreur quadratique moyenne intégrée est utilisée à cause du dénominateur aléatoire de l'estimateur g_h (Marron et Härdle [7]).

(v) Enfin, notons que des résultats analogues sont obtenus en termes de convergence en probabilité (Estevez et Vieu [3]). Le cas de la convergence presque sûre est encore à l'ordre du jour.

5. Un exemple : le cas de processus gausiens fractionnaires

Les Processus gaussiens fractionnaires sont un champ d'application privilégié des résultats énoncés ci-dessus. On sait (*cf.* e.g. Beran [1]) qu'il sont de type longue mémoire dés que leur indice d'autosimilarité ξ est tel que $1/2 < \xi < 1$. Dans ce cas il est facile de vérifier (Estevez et Vieu [3]) que l'on a $R_n = \mathrm{O}(n^{2\xi-2})$, et qu'ainsi la condition (H.5) est clairement satisfaite (on peut bien sûr arriver à la lême conclusion lorsque le processus est à courte mémoire, c'est à dire quand $\xi \leqslant 1/2$). La condition (H.3) est de son côté immédiate à vérifier, tandis que la condition (H.4) est habituelle dans ce domaine et a été vérifiée par plusieurs auteurs (*cf.* Hall et Hart [5], Giraitis et al. [4], ou Mielniczuk [8]).

6. Descriptif des preuves

Les preuves intégrales de ces trois résultats sont données dans Estévez et Vieu [3]. Il faut remarquer que pour chacun de ces trois résultats, le comportement asymptotique est déterminé par plusieurs termes. Le premier d'entre eux, qui est celui qui nous intéresse le plus dans ce travail, est un terme qui est fonction de R_n et qui est issu de la covariance des estimateurs concernés. Lors de nos preuves, ce terme est celui qui pose le plus de difficultés techniques nouvelles et il est traité en utilisant les conditions de dépendance (H.4), (H.5) et (H.6). Les autres termes correspondent aux développements classiques obtenus pour le biais et la variance de ces mêmes estimateurs sous condition d'indépendance entre les variables, et ils seront traités sans difficultés en utilisant les hypothèses usuelles en matière d'estimation par noyau (H.1)–(H.3) et (H.7), (H.8).

Remerciements. Les participants au groupe de travail « STAPH » (Statistique Fonctionnelle) du LSP de Toulouse sont vivement remerciés pour leurs commentaires précieux et permanents. Les deux rapporteurs de cette Note sont aussi chaleureusement remerciés pour leurs conseils pertinents.

Références bibliographiques

[1] J. Beran, Statistics for Long-Memory Processes, Chapman and Hall, 1994.
[2] D. Bosq, Nonparametric Statistics for Stochastic Processes. Estimation and Prediction, Springer-Verlag, New York, 1998.
[3] G. Estévez, P. Vieu, Nonparametric estimation under long-memory dependence, Preprint, 2002.
[4] L. Giraitis, H.L. Koul, D. Surgailis, Asymptotic normality of regression estimators with long memory errors, Statist. Probab. Lett. 29 (1996) 317–335.
[5] P. Hall, J.D. Hart, Convergence rates in density estimation for data from infinite-order moving averages process, Probab. Theory Related Fields 87 (1990) 253–274.
[6] B.B. Mandelbrot, J.W. van Ness, Fractional Brownian motions, fractional noises and applications, SIAM Rev. 10 (1968) 422–437.
[7] J.S. Marron, W. Hardle, Random approximations to some measure of accuracy in nonparametric curve estimation, J. Multivariate Anal. 20 (1986) 91–113.
[8] J. Mielniczuk, On the asymptotic mean integrated squared error of a kernel density estimator for dependent data, Statist. Probab. Lett. 34 (1997) 53–58.