

Plans accélérés optimaux : estimation de la vie moyenne d'un système

Giorgio Celant

Dipartimento di Scienze Statistiche, Università di Padova, Via Cesare Battisti n. 241, 35121 Padova, Italy

Reçu le 15 mars 2002 ; accepté le 29 avril 2002

Note présentée par Paul Deheuvels.

Résumé

On établit un plan optimal selon une fonction du *MSE* pour l'estimation de l'extrapolée de la vie moyenne observée en situation de stress. *Pour citer cet article* : G. Celant, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 69–72. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Optimal designs for accelerated runs: estimation of life time

Abstract

An optimal design is presented for the estimation of the extrapolation of the mean lifetime of a system, observed under stressed conditions. Optimality is intended as a function of the *MSE*. *To cite this article* : G. Celant, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 69–72. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

On observe n systèmes indépendants identiques à un système S . On veut estimer la vie moyenne du système S dont la loi de survie dépend de k contraintes, $\underline{v} = (v_1, \dots, v_k) \in D = \times_{i=1}^k]c_i, d_i[$, $k \geq 1$. Pour avoir des observations en un temps raisonnable on fera des essais accélérés, en réalisant les expériences en soumettant les systèmes à tester à des niveaux de contrainte plus sévères que les niveaux nominaux. Les observations ainsi obtenues nous permettront de déterminer des estimateurs de la vie moyenne de S pour des valeurs stressées. On cherchera alors à en déduire par extrapolation des estimateurs de la vie moyenne de S pour des valeurs usuelles de fonctionnement et on en étudiera les propriétés. L'estimateur obtenu par extrapolation, et sa variance, dépendra des noeuds (points où on observe) et des fréquences d'observation associées aux noeuds. Les couples noeuds/fréquences d'observation définissent un plan factoriel complet. On établira alors le plan $\varphi(MSE)$ -optimal, où φ est une fonction qui dans certains cas sera l'identité, c'est à dire qui minimise une fonction du *MSE* de l'estimateur. Pour la définition de l'estimateur d'extrapolation on distinguera différents cas. Pour une bibliographie détaillée sur les plans accélérés jusqu'à 1990 on renvoie au livre de Nelson (Chapitre 6) [3]. Citons enfin Bagdonavičius, Nikulin [1] ont étudié différentes solutions de nature semiparamétrique et non paramétrique.

Dans cette Note on admet que le modèle est de localisation-échelle et que la variable aléatoire qui décrit l'erreur est de loi absolument continue (a.c.), quelconque, indépendante des contraintes, mais complètement précisée. Enfin le paramètre d'échelle est supposé inconnu et indépendant des contraintes.

Adresse e-mail : celant@stat.unipd.it (G. Celant).

2. Définition des valeurs de stress et de l'expérience

D'un point de vue formel si $\underline{s}_0 = (s_{01}, \dots, s_{0k}) \in D$ et $(u_1, \dots, u_k) \leq (v_1, \dots, v_k)$ (i.e. $u_i \leq v_i, \forall i$), on appelle valeur de stress un élément de l'ensemble $S_0 := \{\underline{v} \in D : \underline{v} \succeq \underline{s}_0\}$. Un élément de l'ensemble $U := \{\underline{v} \in D : \underline{v} \leq \underline{s}_0\}$ sera dit valeur usuelle. On indiquera par \underline{s} un élément de S_0 et par \underline{u} un élément de U . Dans le cas qu'on veuille parler en général des contraintes sans préciser si elle sont des valeurs de stress ou non on écrira \underline{v} . Il est évident que S_0 correspond à stresser toutes les variables v_1, \dots, v_k en augmentant leurs valeurs. La définition de \underline{s}_0 dépend du problème spécifique. L'expérience consiste à déterminer un sous ensemble : $\tilde{S} := \{\underline{s} \in S_0 : \tilde{s}_i \leq s_i \leq \tilde{s}_i, \forall i = 1, \dots, k, ((\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_k), (\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_k)) \in S_0^2\}$ de S_0 , dans lequel on choisira $\prod_{j=1}^k (l_j + 1)$ niveaux de contrainte \underline{s} auxquels on soumettra le système à tester. Ces contraintes $\underline{s}(\underline{i})$, $\underline{i} \in \times_{j=1}^k \{0, \dots, l_j\}$, seront plus hautes que la contrainte usuelle \underline{u} . Enfin à chaque niveau de contrainte \underline{i} on soumet $n(\underline{i})$ systèmes à l'application constante de la contrainte $\underline{s}(\underline{i}) \in \tilde{S}$.

Donc au niveau \underline{i} on aura observé un échantillon $\underline{Y}(\underline{i}) := (Y_{(1)}(\underline{i}), \dots, Y_{(n(\underline{i}))}(\underline{i}))'$ de $n(\underline{i})$ éléments, où $Y = \ln T$, $T > 0$, temps de survie du système. L'échantillon $\underline{Y}(\underline{i})$ est ordonné parce que T est une variable temporelle. Le fait que les $n = \sum_{\underline{i}} n(\underline{i})$ systèmes sont indépendants nous permet d'affirmer que l'échantillon $\underline{Y}(\underline{i})$ est indépendant de l'échantillon $\underline{Y}(\underline{j})$ pour chaque $\underline{i} \neq \underline{j}$.

3. Définition du modèle

Dans la suite on admettra avoir le modèle suivant :

$$Z = \frac{Y - f(\underline{s})}{\sigma}, \tag{1}$$

où $\sigma \in \mathbb{R}^+$ et $f : S_0 \rightarrow \mathbb{R}$ sont supposés inconnus. La variable aléatoire Z est par hypothèse de loi a.c. et complètement précisée. Si on pose : $\varepsilon := \sigma Z - \sigma E(Z)$ on peut réécrire le modèle (1) comme suit :

$$Y = f(\underline{s}) + \sigma E(Z) + \varepsilon. \tag{2}$$

Notons que la fonction f n'est pas définie sur U . C'est une conséquence du fait que f n'est ni connue ni observable sur U . En d'autres termes, f n'est pas identifiable en U parce qu'il existe une infinité de prolongements possibles de f sur U . Il nous faut donc préciser ce qu'on veut estimer c'est à dire $f(\underline{u})$, $\underline{u} \in U$. Il y a pour cela plusieurs façons de faire et dans ce qui suit on en indiquera trois.

Pour fixer un prolongement de f en U on admettra que ce prolongement soit le plus régulier possible.

1 cas. $f(\underline{s})$ est un polynome de multidegré \underline{h} connu en \underline{s} .

DÉFINITION 3.1. – On appelle prolongement de f en U , on écrira f_U , le polynome $f(\underline{u})$.

La définition donnée se justifie d'une façon évidente vu qu'il existe un seul polynome de multidegré \underline{h} défini sur tout D qui coïncide avec un polynome de multidegré $\underline{h} := (h_1, \dots, h_k)$ donné sur un quelconque sous ensemble S de D de cardinalité $\prod_{i=1}^k (h_i + 1)$.

2 cas. $f(\underline{s})$ est une fonction non polynomiale.

DÉFINITION 3.2. – On appelle prolongement de f en U , a multidegré \underline{h} fixé, et on écrira \tilde{f}_U , la fonction suivante : $\tilde{f}_U(\underline{u}) := \sum_{\underline{i}} f(\underline{s}(\underline{i})) L_{\underline{u}}(\underline{s}(\underline{i}))$, où : $L_{\underline{u}}(\underline{s}) := \prod_{j=1}^k \prod_{\substack{i'_j=0 \\ i'_j \neq i_j}}^{h_j} \frac{v_j - s_j(i'_j)}{s_j(i_j) - s_j(i'_j)}$ est le polynome de Lagrange en k variables.

3 cas. $f(\underline{s})$ est quasi analytique sur S_0 . On sait que si une fonction f donnée expérimentalement peut être représentée avec une erreur rapidement décroissante au moyen de polynomes de multidegré \underline{h} peu élevés dans un ensemble donné, on peut définir au moyen de ces polynomes un prolongement approximatif déterminé de la fonction à l'extérieur de l'ensemble avec la certitude que toute autre suite de polynomes représentant la fonction f avec une approximation du même ordre dans

l'ensemble donné fournira, à l'extérieur, à peu près le même prolongement approximatif. Toutefois, on ne pourra rigoureusement affirmer que le prolongement de f se trouve effectivement dans une certaine bande étroite renfermant le polynôme, $P_{\underline{h}}$, que lorsqu'on sait que f est une fonction analytique (c'est à dire que la meilleure approximation f_a de f par des polynômes de multidegré \underline{h} sur S_0 satisfait pour toute valeur de \underline{h} à la relation : $e = \sup_{\underline{s}} |f(\underline{s}) - f_a(\underline{s})| < M \prod_{i=1}^k \rho_i^{h_i}$ où M et $\rho_i < 1$ sont indépendants de h_i) ou quasi analytique (c'est à dire que $e < M \prod_{i=1}^k \rho_i^{h_i}$ est vrai pour une infinité de valeurs h_i et non nécessairement pour tout h_i). Dans la suite on supposera que la fonction quasi analytique $f(\underline{s})$ soit prolongeable. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit prolongeable d'une façon univoque en U est que tous les polynômes $P_{\underline{h}}(\underline{v})$ (où $P_{\underline{h}}$ sont des polynômes quelconques qui donnent sur S_0 une approximation de f de l'ordre $\prod_i \rho_i^{h_i}$) tendent uniformément vers une même fonction, en fournissant dans U une approximation de l'ordre $\prod_i \rho_i^{h_i}$, $\rho_i < 1$ pour chaque i .
 Tout cela nous conduit à donner la définition suivante de f_U dans l'hypothèse où f est une fonction prolongeable analytique ou quasi analytique.

DÉFINITION 3.3. – Si f est une fonction prolongeable analytique ou quasi analytique on appelle prolongement de f en U , et on écrira \tilde{f}_U , la limite des polynômes $\sum_i L_{\underline{u}}(\underline{s}(\underline{i})) f(\underline{s}(\underline{i}))$ où $\{\underline{s}(\underline{i}) \in S_0 : \underline{i} \in \mathbb{N}^k\}$ est une suite dense de S_0 .

Cette définition de \tilde{f}_U se justifie de plusieurs façons. En particulier le fait que f soit analytique ou quasi analytique nous assure que :

- 1) le prolongement de f en U est unique, dans l'hypothèse qu'elle soit prolongeable ;
- 2) seules les fonctions analytiques ou quasi analytiques sont susceptibles d'une extrapolation stable (c'est à dire que l'introduction d'un noeud intérieur arbitraire au voisinage de l'extrémité de S_0 ne détruit pas la convergence d'extrapolation). Cette propriété nous assure qu'on peut choisir les noeuds suivant un critère d'optimalité statistique.

Pour chacune des trois définitions précédentes on déduit un modèle sur $\tilde{D} := D \cup S_0$ en posant :

$$\begin{cases} Y = f(\underline{v}) + \sigma E(Z) + \varepsilon, \\ f(\underline{v}) = \begin{cases} \overset{\circ}{f}(\underline{s}) & \text{pour } \underline{v} = \underline{s}, \\ \overset{\circ}{f}_U(\underline{u}) & \text{pour } \underline{v} = \underline{u}, \end{cases} \end{cases}$$

où suivant le cas, on aura $\overset{\circ}{f}_U = f_U$ (pour le Déf. 3.1) ou $\overset{\circ}{f}_U = \tilde{f}_U$ (pour le Déf. 3.2.) ou $\overset{\circ}{f}_U = \tilde{\tilde{f}}_U$ (pour la Déf. 3.3.). Observons que le modèle correspondant à la Définition 3.2. Dépend du multidegré \underline{h} alors que celui qui est associé à la Définition 3.3. est indépendant de \underline{h} .

4. Estimateurs de $f_U, \tilde{f}_U, \tilde{\tilde{f}}_U$ et leurs propriétés

Dans le paragraphe précédent on a précisé l'objet qu'on veut estimer.

On dispose donc de différents échantillons $\underline{Y}(\underline{i}), \underline{i} \in \times_{j=1}^k \{0, \dots, l_j\}$, observés, telle que :

- a) $\underline{Y}(\underline{i}) \perp \underline{Y}(\underline{j}), \forall \underline{i} \neq \underline{j}$,
- b) $\underline{Y}(\underline{i}) = \mathbf{X}(\underline{i}) \left(\frac{f(\underline{s}(\underline{i}))}{\sigma} \right) + \underline{\varepsilon}(\underline{i})$ pour chaque \underline{i} , avec :

$$\mathbf{X}(\underline{i}) := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ E(Z_{(1)}(n(\underline{i}))) & \dots & E(Z_{(n(\underline{i}))}(n(\underline{i}))) \end{pmatrix}', \quad \underline{\varepsilon}(\underline{i}) := (\varepsilon_1(\underline{i}) \dots \varepsilon_{n(\underline{i})}(\underline{i}))'$$

On a alors la proposition suivante.

PROPOSITION 4.1. – Notons $\Omega^{-1}(\underline{i}) := (\text{cov}(y_{(1)}(\underline{i}), y_{(j)}(\underline{i})))^{-1}$ en supposant $\Omega(\underline{i})$ de plein rang, et dans les hypothèses de convergence des estimateurs des moindres carrés (voir [2]) on a :

- 1) $\check{T}(n(\underline{i}), \underline{s}(\underline{i})) := (1 - E(Z))(X'(\underline{i})\Omega^{-1}(\underline{i})\underline{X}(\underline{i}))^{-1}(X'(\underline{i})\Omega^{-1}(\underline{i})\underline{Y}(\underline{i}))$ est un estimateur optimal convergent de $f(\underline{s}(\underline{i})) + \sigma E(Z)$
- 2) $\hat{T}(\underline{u}, n) := \sum_{\underline{i}} L_{\underline{u}}(\underline{s}(\underline{i}))\check{T}(n(\underline{i}), \underline{s}(\underline{i}))$ est un estimateur optimal convergent de $\overset{\circ}{f}(\underline{u}) + \sigma E(Z)$ dans les cas où $\overset{\circ}{f} \in \{f_U, \tilde{f}_U\}$. Si $\overset{\circ}{f} = \tilde{f}_U$ alors $\hat{T}(\underline{u}, n)$ est un estimateur biaisé convergent vers $\overset{\circ}{f}$.

5. Critère d’optimalité et définition du plan optimal

L’expérience décrite dans un paragraphe précédent définit à travers les données $\Pi := \{(n(\underline{i}), \underline{s}(\underline{i})) : \underline{i} \in \times_{j=1}^k \{0, \dots, l_j\}, \underline{s}(\underline{i}) \in S_0\}$ un plan factoriel complet. Il est évident que l’estimateur $\hat{T}(\underline{u}, n)$ dépend de Π et qu’il est donc raisonnable de choisir Π , c’est à dire $n(\underline{i})$ et $\underline{s}(\underline{i})$, de façon que l’estimateur $\hat{T}(\underline{u}, n)$ ait une quelque propriété d’optimalité. Le critère d’optimalité « plus naturel » est le *MSE*. Or dans les cas où $\overset{\circ}{f} \in \{f_U, \tilde{f}_U\}$ le *MSE* coïncide avec le critère à variance minimale. Si $\overset{\circ}{f} = \tilde{f}_U$ on déterminera le plan qui minimise la limite supérieure de l’erreur dans la valeur extrapolée de la fonction. Dans les cas où $\overset{\circ}{f} \in \{f_U, \tilde{f}_U\}$ le plan qui minimise la fonction $\sum_{\underline{i}} L_{\underline{u}}^2(\underline{s}(\underline{i}))g(\sigma^2, \Omega^{-1}(\underline{i}), n(\underline{i})) + (E(\hat{T}(\underline{u}, n)) - f(\underline{u}) - \sigma E(Z))^2$ où $g(\sigma^2, \Omega^{-1}(\underline{i}), n(\underline{i})) := \text{Var}(\check{T}(n(\underline{i}), \underline{s}(\underline{i})))$ est le même que celui pour minimiser : $\sum_{\underline{i}} L_{\underline{u}}^2(\underline{s}(\underline{i})) \cdot g(\sigma^2, \Omega^{-1}(\underline{i}), n(\underline{i}))$. La solution à ce problème est en général numérique. Il est cependant possible avoir une idée de la solution si on suppose que : $g(\sigma^2, \Omega^{-1}(\underline{i}), n(\underline{i})) = \frac{\sigma^2}{an(\underline{i})+b}(1 + o(1))$ pour $n(\underline{i}) \rightarrow \infty$. a et b sont des constantes qui dépendent seulement de la variable Z . Dans la suite on fera toujours cette hypothèse. Cette hypothèse est vérifiée dans plusieurs cas.

PROPOSITION 5.1. – Si $\overset{\circ}{f} \in \{f_U, \tilde{f}_U\}$ on a :

$$\text{Arg Min } \sum_{\underline{i}} L_{\underline{u}}^2(\underline{s}(\underline{i})) \frac{\sigma^2}{an(\underline{i}) + b} = \Pi^*, \left\{ n(\underline{i}) : \underline{i} \in \times_{j=1}^k \{0, \dots, l_j\} : \sum_{\underline{i}} n(\underline{i}) = n \right\}; \quad \underline{s}(\underline{i}) \in S_0, \forall \underline{i}; \underline{u} \in U,$$

où :

$$\Pi^* := \left\{ n^*(\underline{i}) := \left[\frac{1}{a} \left(\frac{|L_{\underline{u}}(\underline{s}(\underline{i}))|(an + b \prod_{j=1}^k (l_j + 1))}{\sum_{\underline{i}=0}^{\underline{l}} |L_{\underline{u}}(\underline{s}(\underline{i}))|} - b \right) \right], \right. \\ \left. \underline{s}^*(\underline{i}) = \left(\frac{\bar{v}_j + \underline{v}_j}{2} + \frac{\bar{v}_j - \underline{v}_j}{2} \cdot \cos\left(\frac{p_j - i_j \pi}{p_j}\right) \right)_{j=1, \dots, k}, i_j = 0, \dots, p_j, j = 1, \dots, h \right\},$$

et $[\cdot]$ indique la partie entière.

PROPOSITION 5.2. – Dans les conditions de convergence des estimateurs des moindres carrés, si $\overset{\circ}{f} = \tilde{f}_U$, le plan défini dans la proposition précédente est asymptotiquement *MSE*-optimal.

PROPOSITION 5.3. – Avec toutes les hypothèses faites dans les paragraphes précédents et $\overset{\circ}{f} = \tilde{f}_U$ on a que le plan Π^* minimise la limite supérieure de l’erreur dans la valeur extrapolée de la fonction.

Remerciements. Recherche financée par le CNRAgenzia2000-CNRC004890.

Références bibliographiques

[1] V. Bagdonavičius, M. Nikulin, Accelerated Life Models: Modeling and Statistical Analysis, Chapman & Hall, 2001.
 [2] T.L. Lai, H. Robbins, C.Z. Wei, Strong consistency of least squares estimates in multiple regression, J. Multivariate Anal. 9 (1979) 349–361.
 [3] W. Nelson, Accelerated Testing: Statistical Models, Test Plans, and Data Analysis, Wiley, New York, 1990.