C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 989–994

Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*

Construction inconditionnelle de groupes de Galois motiviques

Yves André, Bruno Kahn

Institut de mathématiques de Jussieu, 175–179 rue du Chevaleret, 75013 Paris, France

Reçu le 9 novembre 2001 ; accepté après révision le 4 avril 2002

Note présentée par Christophe Soulé.

Résumé On associe à toute cohomologie de Weil « classique » sur un corps un groupe de Galois motivique, défini à un automorphisme intérieur près. On traite aussi de la spécialisation des motifs numériques, et du comportement des groupes de Galois motiviques par spécialisation. ***Pour citer cet article : Y. André, B. Kahn, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 989–994.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

An unconditional construction of motivic Galois groups

Abstract We attach to any "classical" Weil cohomology theory over a field a motivic Galois group, defined up to an inner automorphism. We also study the specialisation of numerical motives and the behaviour of motivic Galois group by specialisation. ***To cite this article: Y. André, B. Kahn, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 989–994.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Let k be a field, H a Weil cohomology over k and Mot_H the category of (pure) $\mathbf{Q}$-linear motives over k modulo H-equivalence. We denote by Mot_H^* the thick subcategory of Mot_H generated by those smooth projective varieties whose Künneth projectors are algebraic. Let $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}$ be the category of motives modulo numerical equivalence.

THEOREM 1. – *Suppose H classical (ℓ-adic, Betti, de Rham, or crystalline in characteristic p). Then*

(a) *For any $M \in \mathrm{Mot}_H$, $\mathrm{End}(M)$ is an extension of a semi-simple $\mathbf{Q}$-algebra by a nilpotent ideal. The full image $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}^*$ of Mot_H^* in $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}$ does not depend on the choice of H.*

(b) *The projection functor $\pi : \mathrm{Mot}_H^* \to \mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}^*$ has monoidal sections, and any two such sections are monoidally conjugate.*

By Jannsen [7], $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}$, hence $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}^*$, is Abelian semi-simple. Using the Künneth projectors, modify the commutativity constraint appropriately: then $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}^*$ becomes Tannakian, and any monoidal section s of π defines a fibre functor $H \circ s : \mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}^* \to \mathrm{Vec}_L$, where L is the field of coefficients of H. The corresponding Tannaka group G_H only depends on the choice of s up to inner automorphism: it deserves the name of *motivic Galois group* associated to H. It is a pro-reductive group over L, and the grading of H defines a central cocharacter $\mathbf{G}_m \to G_H$.

Adresses e-mail : andre@math.jussieu.fr (Y. André); kahn@math.jussieu.fr (B. Kahn).

S1631-073X(02)02384-1/FLA

THEOREM 2. – *Let K be a complete discrete valuation field with residue field k. Choose a pair of compatible classical Weil cohomologies (H_K, H_k) (ℓ-adic with $\ell \neq \operatorname{car} k$, or $H_K =$ de Rham cohomology, $H_k =$ crystalline cohomology in unequal characteristic). Let $\mathrm{Mot}^*_{H_K,b}$ be the full subcategory of $\mathrm{Mot}^*_{H_K}$ consisting of motives with good reduction, $\mathrm{Mot}^*_{\mathrm{num},b}$ its full image in $\mathrm{Mot}^*_{\mathrm{num}}$, and $G^b_{H_K}$ the quotient of G_{H_K} corresponding to $\mathrm{Mot}^*_{\mathrm{num},b}$. Then there exists a "cospecialisation" homomorphism $G_{H_k} \to G^b_{H_K}$, compatible with the specialisation of correspondences and well-defined up to inner automorphism.*

Proofs rely on the categorical results of [3].

---

1. Soient K un corps commutatif et $\mathcal{A}$ une catégorie K-linéaire monoïdale symétrique (une $\otimes$-catégorie ACU K-linéaire dans la terminologie de [10]) et rigide. Tout endomorphisme d'un objet de $\mathcal{A}$ possède alors une trace à valeurs dans $\mathrm{End}(\mathbf{1})$. On suppose de plus que $\mathrm{End}(\mathbf{1}) = K$. Pour deux objets $A, B \in \mathcal{A}$, définissons

$$\mathcal{N}(A,B) = \big\{ f \in \mathcal{A}(A,B) \mid \forall g \in \mathcal{A}(B,A),\ \operatorname{tr}(gf) = 0 \big\}.$$

La famille $\mathcal{N}$ des $\mathcal{N}(A,B)$ est un *idéal monoïdal de* $\mathcal{A}$: elle est stable par addition, multiplication scalaire, composition et produit à gauche et à droite [3, Lemme 6.4.1].

On dispose aussi d'un autre idéal de $\mathcal{A}$, le *radical* $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R}(A,B) = \big\{ f \in \mathcal{A}(A,B) \mid \forall g \in \mathcal{A}(B,A),\ 1_A - gf \text{ est inversible} \big\}.$$

Cet idéal n'est pas monoïdal en général (il l'est si et seulement si il coïncide avec $\mathcal{N}$, *cf.* [3, 6.4.5]). Enfin, on dit que $\mathcal{A}$ est *semi-primaire* si, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{R}(A,A)$ est un idéal nilpotent de l'anneau $\mathcal{A}(A,A)$ et l'anneau quotient $\mathcal{A}(A,A)/\mathcal{R}(A,A)$ est une K-algèbre semi-simple.

On suppose désormais K de *caractéristique nulle*. Soit L une K-algèbre semi-simple commutative.

THÉORÈME 1. – *Supposons qu'il existe un foncteur K-linéaire monoïdal symétrique fidèle H de $\mathcal{A}$ vers la catégorie $\mathcal{V} = \mathrm{Modf}^{\pm}_L$ (resp. $\mathcal{V} = \mathrm{Modf}_L$) des super-modules[1] (resp. modules) de type fini sur L. Alors $\mathcal{R} \subset \mathcal{N}$ (resp. $\mathcal{R} = \mathcal{N}$ et $\mathcal{A}$ est semi-primaire), et $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ est semi-simple (donc son enveloppe pseudo-abélienne $(\mathcal{A}/\mathcal{N})^\natural$ est abélienne semi-simple).*

Cela résulte de [3, 6.7.3]. Pour passer du cas $\mathbf{Z}/2$-gradué au cas non gradué, on dispose de :

PROPOSITION 2. – *Dans cette situation (avec $\mathcal{V} = \mathrm{Modf}^{\pm}_L$), considérons, pour tout $A \in \mathcal{A}$, la projection $p^+_A \in \mathrm{End}(H(A))$ sur le facteur $H^+(A)$. Soit $\mathcal{A}^{\pm}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$ formée des objets A tels que $p^+_A = H(\pi^+_A)$ pour un $\pi^+_A \in \mathcal{A}(A,A)$. On note $\mathcal{R}^{\pm}$, $\mathcal{N}^{\pm}$ la restriction de $\mathcal{R}$, $\mathcal{N}$ à $\mathcal{A}^{\pm}$.*

Alors $\mathcal{A}^{\pm}$ est une sous-catégorie monoïdale rigide de $\mathcal{A}$, stable par facteurs directs, et il existe sur $\mathcal{A}^{\pm}$ une contrainte de commutativité telle que le foncteur monoïdal composé

$$\mathcal{A}^{\pm} \to \mathcal{A} \xrightarrow{H} \mathrm{Modf}^{\pm}_L \to \mathrm{Modf}_L,$$

où le dernier foncteur est le foncteur d'oubli, soit symétrique.

Donc [par le théorème précédent] $\mathcal{A}^{\pm}$ est semi-primaire, $\mathcal{R}^{\pm} = \mathcal{N}^{\pm}$, $\mathcal{A}^{\pm}/\mathcal{N}^{\pm}$ est semi-simple (et abélienne si et seulement si $\mathcal{A}$ est pseudo-abélienne), et la projection $\mathcal{A}^{\pm} \to \mathcal{A}^{\pm}/\mathcal{N}^{\pm}$ est un foncteur conservatif.

Voir [3, 6.7.9 et 1.4.2.b].

Application. Soient k un corps commutatif et H une cohomologie de Weil sur k à coefficients dans une $\mathbf{Q}$-algèbre semi-simple L : formule de Künneth, dualité de Poincaré, application cycle. Soit $\mathcal{A} = \mathrm{Mot}_H = \mathrm{Mot}_H(k)$ la catégorie des motifs purs sur k à coefficients rationnels modulo l'équivalence homologique définie par H, munie de la contrainte de commutativité « naïve » donnée par l'échange des facteurs ; H

définit donc un foncteur $\mathbf{Q}$-linéaire monoïdal symétrique fidèle $\mathrm{Mot}_H \to \mathrm{Modf}_L^{\pm}$. Si l'on munit $\mathrm{Mot}_H^{\pm}$ de sa contrainte de commutativité modifiée (Proposition 2), on a de plus un foncteur $\mathbf{Q}$-linéaire monoïdal symétrique fidèle $H^* : \mathrm{Mot}_H^{\pm} \to \mathrm{Modf}_L^*$ vers la catégorie monoïdale symétrique des L-modules de type fini $\mathbf{Z}$-gradués (contrainte de commutativité sans signe).

L'idéal $\mathcal{N}$ s'identifie à l'idéal des correspondances *numériquement équivalentes à zéro* ; $(\mathrm{Mot}_H/\mathcal{N})^\natural$ n'est autre que la catégorie $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}$ des motifs modulo l'équivalence numérique. Les résultats précédents (avec $K = \mathbf{Q}$) entraînent alors :

COROLLAIRE 3. – (i) (Jannsen [7]) $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}$ *est abélienne semi-simple.*

(ii) $\mathrm{Mot}_H^{\pm}$ *est semi-primaire et pseudo-abélienne, son image* $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}^{\pm}$ *dans* $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}$ *est abélienne semi-simple,* $\mathcal{R}^{\pm} = \mathcal{N}^{\pm}$ *et le foncteur monoïdal* $\mathrm{Mot}_H^{\pm} \to \mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}^{\pm}$ *est conservatif.*

Remarque 1. – On peut aussi considérer la sous-catégorie pleine (monoïdale symétrique rigide) $\mathrm{Mot}_H^* \subset \mathrm{Mot}_H^{\pm}$ formée des objets tels que les projecteurs de Künneth sur chaque $H^i(X)$ soient algébriques, i.e. proviennent d'un endomorphisme $\pi_X^i \in \mathrm{Mot}_H(X, X)$. C'est encore une catégorie semi-primaire, et son image $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}^*$ dans $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}^{\pm}$ est abélienne semi-simple. En outre les π^i définissent une $\mathbf{Z}$-graduation sur le foncteur identique de $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}^*$, à laquelle $H^*_{|\mathrm{Mot}_H^*}$ est compatible.

DÉFINITION 4. – Une cohomologie de Weil H sur k est *classique* si
- $\mathrm{car}\, k = 0$ et H est la cohomologie de Betti relative à un plongement de k dans $\mathbf{C}$, la cohomologie de de Rham ou la cohomologie étale ℓ-adique relative à un nombre premier ℓ ;
- $\mathrm{car}\, k \neq 0, \ell$ et H est la cohomologie étale ℓ-adique ou la cohomologie cristalline.

Remarques 2. – (a) Si k est algébrique sur un corps fini et si H est classique, alors $\mathrm{Mot}_H^* = \mathrm{Mot}_H^{\pm} = \mathrm{Mot}_H$ (à la contrainte de commutativité près) puisqu'alors tous les projecteurs de Künneth sont algébriques [8].

(b) Si k est de caractéristique 0, les catégories Mot_H, $\mathrm{Mot}_H^{\pm}$ et Mot_H^* ne dépendent pas du choix de la cohomologie classique H : cela résulte des théorèmes de comparaison (réduction au cas où k est de type fini).

PROPOSITION 5. – *Pour H classique,* Mot_H *elle-même est semi-primaire. En particulier,* $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}} = \mathrm{Mot}_H/\mathcal{N}$ (*enveloppe pseudo-abélienne superflue*).

Démonstration. – D'après [3, 4.1.7 et 4.1.8], il suffit de voir que les polynômes caractéristiques des $H^i(a)$ sont à coefficients dans $\mathbf{Q}$. Si $\mathrm{car}\, k = 0$, cela résulte des théorèmes de comparaison. Sinon, on se réduit par spécialisation au cas d'un corps fini (dans le cas cristallin, *voir* [6]), et cela résulte alors de [8]. □

PROPOSITION 6. – *À isomorphisme canonique près, les catégories monoïdales symétriques* $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}^{\pm}$ *et* $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}^*$ *ne dépendent pas de la cohomologie classique choisie.*

Démonstration. – Si $\mathrm{car}\, k = 0$, cela résulte de la Remarque 2(b). En caractéristique p, traitons, pour fixer les idées, le cas de $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}^{\pm}$ et de deux cohomologies ℓ et ℓ'-adiques. Il s'agit de voir que si $p_{X,\ell}^+ := p_{X,H_\ell}^+ \in \mathrm{Mot}_\ell(X, X) := \mathrm{Mot}_{H_\ell}(X, X)$, alors $p_{X,\ell'}^+ \in \mathrm{Mot}_{\ell'}(X, X)$.

Si k est un corps fini, cela résulte de [8] : p_X^+ est donnée par un polynôme en Frobenius, le même pour ℓ et ℓ'. En général, notons $H_{\ell\ell'}$ la cohomologie de Weil $H_\ell \times H_{\ell'}$ (à valeurs dans $\mathrm{Modf}_{\mathbf{Q}_\ell \times \mathbf{Q}_{\ell'}}$) et $\mathrm{Mot}_{\ell\ell'}$ la catégorie associée : d'après la Proposition 5 appliquée avec $L = \mathbf{Q}_\ell \times \mathbf{Q}_{\ell'}$, elle est semi-primaire.

On peut supposer que k est de type fini sur $\mathbf{F}_q$: on raisonne par récurrence sur le degré de transcendance de k sur $\mathbf{F}_q$. Écrivons k comme corps de fonctions d'une variable sur un sous-corps k_0. On peut remplacer k_0 par sa clôture séparable. On choisit une place de k/k_0 où X a bonne réduction X_0. On a alors un isomorphisme canonique $H_{\ell\ell'}(X \times X) \cong H_{\ell\ell'}(X_0 \times X_0)$ compatible aux classes de cycles, cf. [4, 20.3]. Par récurrence, $p_{X_0,\ell\ell'}^+$ est un endomorphisme de $\mathrm{Mot}_{\ell\ell'}(k_0)$; c'est un idempotent central, d'image dans $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}(k_0)$ notée $\bar{p}_{X_0,\ell\ell'}^+$.

LEMME 7. – *Le noyau de* $\mathrm{Mot}_{\ell\ell'}(k)(X,X) \to \mathrm{Mot}_\ell(k)(X,X)$ *est un idéal nilpotent.*

En effet, ce noyau s'envoie injectivement dans $\mathcal{N}_{\ell'}(k)(X,X)$, et même dans $\mathcal{N}_{\ell'}(k_0)(X_0,X_0)$ par spécialisation. Par récurrence, $X_0 \in \mathrm{Mot}^{\pm}_{\ell'}(k_0)$. D'après le Corollaire 3(ii), $\mathcal{N}_{\ell'}(k_0)(X_0,X_0)$ est donc nilpotent.

Ce lemme entraîne que l'idempotent $p^+_{X,\ell} \in \mathrm{Mot}_\ell(X,X)$ se relève dans $\mathrm{Mot}_{\ell\ell'}(X,X)$ en un idempotent $\pi^+_{X,\ell\ell'} \in \mathrm{Mot}_{\ell\ell'}(X,X)$. L'image π'_0 de ce dernier dans $\mathrm{Mot}_{\ell\ell'}(X_0,X_0)$ est un idempotent, d'image dans $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}(X_0,X_0)$ égale à $\bar{p}^+_{X_0,\ell\ell'}$. Enfin, un raisonnement classique, utilisant la centralité de $p^+_{X_0,\ell\ell'}$ et la semi-primarité de $\mathrm{Mot}^{\pm}_{\ell\ell'}(k_0)$, montre que $\pi'_0 = p^+_{X_0,\ell\ell'}$. □

2. *Groupes de Galois motiviques.* Revenons à la situation générale d'une catégorie K-linéaire monoïdale symétrique rigide $\mathcal{A}$, avec $\mathrm{End}(\mathbf{1}) = K$ (de caractéristique nulle). D'après [3, 9.2.1, 9.7.3, 11.3.5] :

THÉORÈME 8. – (a) *Supposons en outre $\mathcal{A}$ semi-primaire et $\mathcal{R} = \mathcal{N}$. Alors le foncteur monoïdal symétrique canonique $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{N}$ admet une section monoïdale symétrique s, et deux telles sections sont conjuguées par un isomorphisme monoïdal.*

(b) *On peut en outre exiger que $s \circ \pi$ soit l'identité sur une quelconque sous-catégorie monoïdale* (*non pleine*) *semi-simple $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$, dès lors que tout objet de $\mathcal{A}$ est facteur direct d'un objet de $\mathcal{S}$.*

En appliquant ceci à $\mathcal{A} = \mathrm{Mot}^{\pm}_H$, et en posant $\omega^*_H = H^* \circ s$, on obtient par la théorie tannakienne :

COROLLAIRE 9. – *À toute cohomologie classique H* (*à coefficients dans L*)*, on peut associer un foncteur $\mathbf{Q}$-linéaire monoïdal symétrique exact fidèle $\omega^*_H : \mathrm{Mot}^{\pm}_{\mathrm{num}} \to \mathrm{Vec}^*_L$, bien défini à isomorphisme monoïdal près, et appelé H-réalisation de $\mathrm{Mot}^{\pm}_{\mathrm{num}}$; d'où un foncteur fibre ω_H par oubli de la graduation. En particulier, le schéma en groupes d'automorphismes $\mathbf{Aut}(\omega_H)$ est un L-groupe affine pro-réductif, bien défini à automorphisme intérieur près, et muni d'un homomorphisme $\mathbf{G}_m \to \mathbf{Aut}(\omega_H)$.*

Il mérite le nom de *groupe de Galois motivique* (attaché à $\mathrm{Mot}^{\pm}_{\mathrm{num}}(K)$ et à H).

Remarques 3. – (a) Pour tout $M \in \mathrm{Mot}^{\pm}_{\mathrm{num}}$, l'image de $\mathbf{Aut}(\omega_H)$ dans $\mathrm{GL}(H(M))$ se décrit en termes de ses invariants tensoriels ; c'est le groupe qui fixe les images par H des endomorphismes de $M^{\otimes n}$ qui sont dans l'image de la section s sur $\mathrm{Mot}^{\pm}_{\mathrm{num}}(M^{\otimes n}, M^{\otimes n})$, $n \geqslant 0$.

(b) Le quotient de $\mathbf{Aut}(\omega_H)$ correspondant à la sous-catégorie tannakienne $\mathrm{Mot}^*_{\mathrm{num}}$ de $\mathrm{Mot}^{\pm}_{\mathrm{num}}$ n'est autre que le plus grand quotient de $\mathbf{Aut}(\omega_H)$ dans lequel l'image de $\mathbf{G}_m$ est centrale (*cf.* [10, ch. IV, cor. 1.2.2.1 et 1.2.2.2]). Ce cocaractère central décrit la « graduation par le poids » de $\mathrm{Mot}^*_{\mathrm{num}}$.

(c) On peut d'autre part introduire pour tout schéma projectif X (non nécessairement connexe) le sous-groupe algébrique G_X de $\prod \mathrm{GL}(H^i(X))$ qui fixe $\mathrm{Mot}_H(M,N) \subset \mathrm{Hom}_L(H(M), H(N))$ pour tous M, N dans la sous-catégorie tannakienne $\langle X \rangle$ de Mot_H engendrée par le motif de X. Si k est de caractéristique nulle, on peut montrer que ce groupe n'est autre que le groupe des « cycles motivés modelés sur $\langle X \rangle$ » au sens de [2] ; d'après loc. cit., c'est donc un groupe réductif. Si π^+_X existe, ce groupe est contenu dans le groupe réductif image de $\mathbf{Aut}(\omega_H)$ dans $\mathrm{GL}(H(X))$, et ils coïncident si et seulement si l'équivalence numérique est l'équivalence homologique sur les puissances de X.

PROPOSITION 10. – (a) *Le foncteur ${}^{\spadesuit}H^*(X) = \omega^*_H(h_{\mathrm{num}}(X))$, défini sur les K-schémas projectifs lisses X pour lesquels π^+_X existe, possède les propriétés* (1) *à* (4) *des six propriétés attribuées à une « cohomologie de Weil » dans* [9, §3]. *De plus, l'équivalence ${}^{\spadesuit}H$-homologique n'est autre que l'équivalence numérique.*

(b) *Soit L l'opérateur de Lefschetz associé à une section hyperplane lisse de X* (*comme en* (a))*. Alors la propriété* (6) *de loc. cit.* (*théorème de Lefschetz fort*) *pour ${}^{\spadesuit}H$ équivaut à la conjecture standard de type Lefschetz $B(X)$ pour H* (*cf.* [9, §4]).

(c) *Si de plus k est un corps fini, ces propriétés sont impliquées par la propriété* (5) *de loc. cit.* (*théorème de Lefschetz faible*) *pour ${}^{\spadesuit}H$, X et ses sections hyperplanes.*

Démonstration. – (a) (1) est évident, puisque $^{\spadesuit}H^*(X) = H^*(X)$ pour tout X en tant qu'espace vectoriel gradué. Cette identification est du reste compatible à la dualité (2) (dualité de Poincaré). Pour X de pure dimension d, $h(X)$ et $h(X)(d)$ sont duaux dans $\mathrm{Mot}^{\pm}_{\mathrm{num}}$, donc leur images par le foncteur monoïdal symétrique ω^*_H sont duales dans Vec^*_L. (3) (formule de Künneth) découle de même de l'identité $h_{\mathrm{num}}(X \times Y) = h_{\mathrm{num}}(X) \otimes h_{\mathrm{num}}(Y)$. Enfin, pour (4), on définit l'application cycle $^{\spadesuit}\gamma_X : C^i(X) \to {}^{\spadesuit}H^{2i}(X)(i)$ à partir de l'homomorphisme fonctoriel $A^i_{\mathrm{num}}(X) = \mathrm{Mot}^{\pm}_{\mathrm{num}}(\mathbf{1}, h_{\mathrm{num}}(X)(i)) \xrightarrow{\omega^0_H} \mathrm{Hom}(\omega^0_H(\mathbf{1}), \omega^0_H(h_{\mathrm{num}}(X)(i))) = {}^{\spadesuit}H^{2i}(X)(i)$, et les conditions (i)–(iii) de loc. cit. sont alors automatiquement vérifiées. La dernière assertion est évidente.

(b) On sait que $B(X)$ entraîne l'algébricité des projecteurs de Künneth, et peut donc se traduire par : pour tout $i \leqslant d = \dim X$, le morphisme $L^{d-i} : h^i(X) \to h^{2d-i}(X)(d-i)$ est inversible dans Mot^*_H. Son image dans $\mathrm{Mot}^*_{\mathrm{num}}$ est donc inversible, et on conclut en appliquant ω_H. Réciproquement, la propriété (6) de loc. cit. pour $^{\spadesuit}H$ se traduit par : pour tout $i \leqslant d = \dim X$, l'image par le foncteur ω^i_H du morphisme L^{d-i} de $\mathrm{Mot}^{\pm}_{\mathrm{num}}$ est inversible. Soit M^i (resp. $M^{2d-i}(d-i)$) la somme des constituants irréductibles du morif numérique de X (resp. $X(d-i)$) sur lesquelles ω^i_H ne s'annule pas. Alors ω^i_H est conservatif sur la sous-catégorie pleine (semi-simple) de $\mathrm{Mot}^{\pm}_{\mathrm{num}}$ formée des facteurs des sommes de copies de M^i et $M^{2d-i}(d-i)$. On en déduit que L^{d-i} envoie M^i isomorphiquement sur $M^{2d-i}(d-i)$. Tout relevé dans $\mathrm{Mot}^{\pm}_H(h(X)(d-i), h(X))$ de cet isomorphisme induit un isomorphisme $H^{2d-i}(X)(d-i) \to H^i(X)$, ce qui est une forme de la conjecture standard $B(X)$.

(c) La formule cohomologique pour la fonction zêta de X vaut pour toute cohomologie de Weil, en particulier $^{\spadesuit}H^*$. On déduit alors de [8, cor. 1 b), th. 2] que « Lefschetz faible implique Lefschetz fort » pour $^{\spadesuit}H$, X et ses sections hyperplanes. $\square$

Remarque 4. – (k fini) Le « Frobenius géométrique » définit un automorphisme F du foncteur identique de $\mathrm{Mot}^*_H = \mathrm{Mot}_H$. Comme Mot_H est semi-primaire, on peut écrire de manière unique $F = F^{ss} \circ F^u = F^u \circ F^{ss}$ avec, pour tout $M \in \mathrm{Mot}_H$, $F^u_M \in 1 + \mathcal{R}(M, M)$, F^{ss}_M engendrant une sous-algèbre semi-simple de $\mathrm{End}(M)$ et F^u_M, F^{ss}_M donnés par des polynômes en F_M. Pour toute section monoïdale s de $\pi : \mathrm{Mot}_H \to \mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}$ et pour tout M, on a $s \circ \pi(F_M) = F^{ss}_M$ puisque F_M est central. Tant F^{ss} que F^u peuvent être vus comme des éléments de $\mathbf{Aut}(\omega_H)(L)$, et F^{ss} y est central.

3. *Spécialisation des motifs numériques.* Soient $\mathfrak{o}$ un anneau de valuation discrète, K son corps des fractions, k son corps résiduel. On désigne par H la cohomologie ℓ-adique ($\ell \neq \mathrm{car}\, k$) tant sur K que sur k (autre choix en inégale caractéristique : la cohomologie de De Rham sur K et la cohomologie cristalline sur k, cf. [5, B.3.1]).

On dit qu'une K-variété projective lisse X *a bonne réduction* s'il existe un $\mathfrak{o}$-schéma projectif $\mathcal{X}$ lisse de fibre générique X. La fibre spéciale $\bar{\mathcal{X}}$ de $\mathcal{X}$ n'est pas uniquement déterminée, mais son motif de Chow l'est, à isomorphisme unique près.

Notons $\mathrm{Mot}_H(K)_b$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mot}_H(K)$ formée des motifs (X, p, n) tels que X ait bonne réduction : ce sont les *motifs homologiques à bonne réduction*. On a des catégories analogues $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}(K)_b$, $\mathrm{Mot}^{\pm}_H(K)_b$, $\mathrm{Mot}^{\pm}_{\mathrm{num}}(K)_b$.

Ces catégories sont pseudo-abéliennes et stables par produit tensoriel (prendre le produit fibré des modèles sur $\mathfrak{o}$). Il résulte de ce qui précède que $\mathrm{Mot}^{\pm}_H(K)_b$ est semi-primaire et vérifie $\mathcal{R} = \mathcal{N}$, et $\mathrm{Mot}^{\pm}_H(K)_b/\mathcal{N} = \mathrm{Mot}^{\pm}_{\mathrm{num}}(K)_b$ est abélienne semi-simple.

D'autre part, la théorie de la spécialisation des cycles algébriques [4, 20.3] et la compatibilité de H sur K et k fournissent aussi des foncteurs $\mathbf{Q}$-linéaires monoïdaux symétriques fidèles « fibre spéciale »

$$\mathrm{sp}_H : \mathrm{Mot}_H(K)_b \to \mathrm{Mot}_H(k), \quad \mathrm{Mot}^{\pm}_H(K)_b \to \mathrm{Mot}^{\pm}_H(k)$$

définis à isomorphisme monoïdal unique près et munis d'un isomorphisme monoïdal canonique $H \circ \mathrm{sp}_H \approx H$ (changement de base propre et lisse, dans le cas ℓ-adique). Ces foncteurs ne passent pas, *a priori*, à l'équivalence numérique. On a toutefois :

THÉORÈME 11. – *Il existe un foncteur* $\mathbf{Q}$*-linéaire monoïdal symétrique fidèle « fibre spéciale »* sp : $\mathrm{Mot}^{\pm}_{\mathrm{num}}(K)_b \to \mathrm{Mot}^{\pm}_{\mathrm{num}}(k)$*, bien défini à isomorphisme monoïdal près, tel que, une fois choisis les foncteurs fibres* ω_H^K *sur* K *et* ω_H^k *sur* k *comme ci-dessus, le diagramme de foncteurs*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mot}^{\pm}_{\mathrm{num}}(K)_b \arrow[r, "\mathrm{sp}"] \arrow[d] & \mathrm{Mot}^{\pm}_{\mathrm{num}}(k) \arrow[d, "\omega_H^k"'] \\
\mathrm{Mot}^{\pm}_{\mathrm{num}}(K) \arrow[r, "\omega_H^K"] & \mathrm{Vec}_L
\end{tikzcd}$$

commute à isomorphisme monoïdal près.

Démonstration. – Notons $\pi_K : \mathrm{Mot}^{\pm}_H(K) \to \mathrm{Mot}^{\pm}_{\mathrm{num}}(K)$ et $\pi_k : \mathrm{Mot}^{\pm}_H(k) \to \mathrm{Mot}^{\pm}_{\mathrm{num}}(k)$ les foncteurs de projection. Le choix d'une section monoïdale symétrique s_K de π_K fixe le choix de ω_H^K et permet de définir $\mathrm{sp} = \pi_k \circ \mathrm{sp}_H \circ s_{K,b}$, où $s_{K,b}$ est la restriction de s_K à $\mathrm{Mot}^{\pm}_{\mathrm{num}}(K)_b$. Notons $\mathrm{Mot}^{\pm}_{\mathrm{num}}(\mathfrak{o}, k)$ la sous-catégorie pleine pseudo-abélienne de $\mathrm{Mot}^{\pm}_{\mathrm{num}}(k)$ engendrée par les objets de $\mathrm{sp}(\mathrm{Mot}^{\pm}_{\mathrm{num}}(K)_b))$; c'est une catégorie abélienne semi-simple. Grâce au Théorème 8(b), choisissons maintenant une section $s_{\mathfrak{o},k}$ partielle : $\mathrm{Mot}^{\pm}_{\mathrm{num}}(\mathfrak{o}, k) \to \mathrm{Mot}^{\pm}_H(k)$ de π_k respectant la sous-catégorie (non pleine) semi-simple $\mathrm{sp}_H(s_{K,b}(\mathrm{Mot}^{\pm}_{\mathrm{num}}(K)_b))$ dans $\mathrm{Mot}^{\pm}_H(k)$. On a alors $s_{\mathfrak{o},k} \circ \mathrm{sp} = \mathrm{sp}_H \circ s_K$. Comme toute autre section s'_K de π_K (resp. s_k de π_k) est isomorphe à s_K (resp. est de restriction à $\mathrm{Mot}^{\pm}_{\mathrm{num}}(\mathfrak{o}, k)$ isomorphe à $s_{\mathfrak{o},k}$) d'après le Théorème 2, le diagramme de la proposition est bien commutatif à isomorphismes monoïdaux près. □

COROLLAIRE 12. – *On a une chaîne d'homomorphismes de groupes de Galois motiviques* (*vus comme « groupes pro-réductifs à conjugaison près »*)

$$\mathbf{Aut}\big(\omega_H^K\big) \twoheadrightarrow \mathbf{Aut}\big(\big(\omega_H^K\big)_{|\,\mathrm{Mot}^{\pm}_{\mathrm{num}}(K)_b}\big) \leftarrow \mathbf{Aut}\big(\omega_H^k\big).$$

Remarque 5. – Le Théorème 11 s'applique à l'étude des relations algébriques entre valeurs p-adiques de fonctions hypergéométriques généralisées, cf. [1] (ces dernières étant vues comme coefficients de matrices de comparaison entre deux foncteurs fibres dont l'un est défini via sp).

Remerciements. Les auteurs remercient Ofer Gabber de leur avoir signalé une erreur dans la démonstration initiale de la Proposition 6.

[1] Considérée comme catégorie monoïdale symétrique au moyen de la règle de Koszul.

Références bibliographiques

[1] Y. André, Théorie des motifs et interprétation géométrique de valeurs p-adiques de G-fonctions, in: S. David (Ed.), Séminaire de théorie des nombres de Paris 92/93, London Math. Soc. Lecture Note Ser., Vol. 215, Cambridge University Press, 1995.
[2] Y. André, Pour une théorie inconditionnelle des motifs, Publ. Math. IHES 83 (1996) 5–49.
[3] Y. André, B. Kahn, Nilpotence, radicaux et structures monoïdales, Prépublication de l'Institut de Mathématiques de Jussieu, 2001; Version revue et augmentée, disponible à http://arXiv.org/abs/math.CT/0203273.
[4] W. Fulton, Intersection Theory, Springer, 1984.
[5] H. Gillet, W. Messing, Cycle classes and Riemann–Roch for crystalline cohomology, Duke Math. J. 55 (3) (1987) 501–538.
[6] L. Illusie, Report on cristalline cohomology, in: Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 24 (Arcata), American Mathematical Society, 1975, pp. 473–475.
[7] U. Jannsen, Motives, numerical equivalence and semi-simplicity, Invent. Math. 107 (1992) 447–452.
[8] N. Katz, W. Messing, Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields, Invent. Math. 23 (1974) 73–77.
[9] S. Kleiman, The standard conjectures, in: Motives, Proc. Sympos. Pure Math. 55 (I), pp. 3–20.
[10] N. Saavedra Rivano, Catégories tannakiennes, Lect. Notes in Math., Vol. 265, Springer, 1972.