C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 945–948

Théorie des groupes/*Group Theory*

Propriétés de l'intégrale de Cauchy Harish-Chandra pour certaines paires duales d'algèbres de Lie

Florent Bernon

Laboratoire analyse, géométrie et applications, UMR CNRS 7539, Département de mathématiques, Université Paris 13, 93430 Villetaneuse, France

Reçu le 18 février 2002 ; accepté le 22 mars 2002

Note présentée par Michel Duflo.

Résumé On considère un groupe symplectique *Sp* et une paire duale réductive et irréductible (G, G') de *Sp* au sens de R. Howe. On désigne par $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{g}'$) les algèbres de Lie de G (resp. G'). T. Przebinda définit une application appelée intégrale de Cauchy Harish-Chandra et notée **Chc** qui associe à toute fonction de $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ une fonction définie sur $\mathfrak{g}'^{\mathrm{reg}}$, l'ouvert des éléments semi-simples réguliers. Dans cette Note, on montre que ces fonctions sont des intégrales invariantes si la paire est de type II et elles possèdent les propriétés locales des intégrales invariantes si la paire est formée de groupes unitaires de même rang. Les relations de sauts sont alors obtenues à une constante multiplicative près. ***Pour citer cet article : F. Bernon, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 945–948.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Properties of the Cauchy Harish-Chandra integral for some dual pairs of Lie algebras

Abstract We consider a symplectic group *Sp* and an reductive and irreductible dual pair (G, G') in *Sp* in the sense of R. Howe. Let $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{g}'$) be the Lie algebra of G (resp. G'). T. Przebinda has defined a map **Chc**, called the Cauchy Harish-Chandra integral from the space of smooth compactly supported functions of $\mathfrak{g}$ to the space of functions defined on the open set $\mathfrak{g}'^{\mathrm{reg}}$ of semisimple regular elements of $\mathfrak{g}'$. We prove that these functions are invariant integrals if G and G' are linear groups and they behave locally like invariant integrals if G and G' are unitary groups of same rank. In this last case, we obtain the jump relations up to a multiplicative constant which only depends on the dual pair. ***To cite this article: F. Bernon, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 945–948.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Définition de Chc

Soit $(W, \langle\rangle)$ un espace symplectique ; on note *Sp* le groupe des isométries de cet espace et $\mathfrak{sp}$ l'algèbre de Lie de *Sp*. On désigne par $\mathrm{d}w$ une mesure de Lebesgue sur W. On considère une paire duale réductive irréductible (G, G') de *Sp* au sens de Howe (*cf.* [4]). Les algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ de ces groupes peuvent être considérées comme des sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{sp}$.

Adresse e-mail : bernon@math.univ-paris13.fr (F. Bernon).

S1631-073X(02)02380-4/FLA

Soit $\mathfrak{h}'$ une sous-algèbre de Cartan de G'. On note A' la partie déployée de H', le sous-groupe de Cartan de G' d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}'$. On désigne par A'' (resp. A''') le centralisateur de A' (resp. A'') dans Sp. On fixe une mesure de Haar sur A''' notée da et une mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{a}''$ (l'algèbre de Lie de A'') notée dx. Pour $x \in \mathfrak{a}''$ et $w \in W$, on pose $\chi_x(w) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\langle xw,w\rangle}$.

D'après le Lemme 1.7 de [5], il existe un ouvert dense $W_{A'''}$ de W tel que

$$\int_{A'''\backslash W_{A'''}} \left| \int_{\mathfrak{a}''} \phi(x)\chi_x(w)\,\mathrm{d}x \right| \mathrm{d}\dot{w} < \infty$$

pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathfrak{a}'')$ où d$\dot{w}$ désigne la mesure sur $A'''-$invariante sur $A'''\backslash W_{A'''}$ qui vérifie

$$\int_W \phi(w)\,\mathrm{d}w = \int_{A'''\backslash W_{A'''}} \int_{A'''} \phi(a\cdot w)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}\dot{w}$$

pour tout $\phi \in C_c(W_{A'''})$. Cela permet de donner la définition suivante :

DÉFINITION 1.1. – Pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathfrak{a}'')$, on pose :

$$Chc(\phi) = \int_{A'''\backslash W_{A'''}} \int_{\mathfrak{a}''} \phi(x)\chi_x(w)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\dot{w}.$$

Remarque 1. – Si $\mathfrak{h}'$ est une sous-algèbre de Cartan compacte de $\mathfrak{g}'$ alors *Chc* est la transformée de Fourier de la mesure de Liouville associée à une orbite nilpotente minimale de $\mathfrak{sp}$ à une constante multiplicative près.

Pour $x' \in \mathfrak{h}'^{\mathrm{reg}}$ (l'ouvert des éléments réguliers de $\mathfrak{h}'$), l'application $i_{x'} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}''$ définie par $i_{x'}(x) = x + x'$ est transverse au front d'onde de *Chc* d'après la Proposition 1.8 de [5]. On peut donc définir l'image réciproque $i_{x'}^*(Chc)$ de *Chc* par l'injection $i_{x'}$. Dans la suite, pour $\psi \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ et $x' \in \mathfrak{h}'^{\mathrm{reg}}$, on utilise la notation $\mathbf{Chc}(\psi)(x')$ pour désigner $i_{x'}^*(Chc)(\psi)$, ainsi $\mathbf{Chc}(\psi)$ est une fonction définie sur $\mathfrak{g}'^{\mathrm{reg}}$.

L'application moment :

$$\tau_{\mathfrak{g}} : W \longrightarrow \mathfrak{g}^* \text{ (le dual de } \mathfrak{g}) \; w \longmapsto \big(x \in \mathfrak{g} \mapsto \langle xw, w\rangle\big)$$

est G-invariante pour les actions naturelles de G sur W et $\mathfrak{g}^*$. De même, on peut définir l'application $\tau_{\mathfrak{g}'} : W \to \mathfrak{g}'^*$.

Soit (G, G') une paire dite « stable range » ([5], p. 307) avec $\dim(G') \leqslant \dim(G)$. On sait que $j = \tau_{\mathfrak{g}} \circ \tau_{\mathfrak{g}'}^{-1}$ induit une injection de l'ensemble des orbites nilpotentes de $\mathfrak{g}'^*$ dans l'ensemble des orbites nilpotentes de $\mathfrak{g}^*$. Pour une orbite nilpotente $\mathcal{O}$ de $\mathfrak{g}^*$ ou $\mathfrak{g}'^*$ notons $\hat{\mu}_{\mathcal{O}}$ la transformée de Fourier de la mesure de Liouville attachée à l'orbite $\mathcal{O}$. D'après le Théorème 1.19 de [5], à une constante multiplicative près, on a l'égalité :

$$\hat{\mu}_{\mathcal{O}}(\psi) = \sum \frac{1}{|W(H')|} \int_{\mathfrak{h}'^{\mathrm{reg}}} \hat{\mu}_{\mathcal{O}'}(x') \left|\det\big(\mathrm{ad}(x')_{\mathfrak{g}'/\mathfrak{h}'}\big)\right|^2 \mathbf{Chc}(\psi)(x')\,\mathrm{d}x', \tag{1}$$

où $\mathcal{O}'$ est une orbite nilpotente de $\mathfrak{g}'$, $\mathcal{O} = j(\mathcal{O}')$, $|W(H')|$ désigne le cardinal du groupe de Weyl de H'. La somme porte sur un système de représentants de sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}'$.

L'égalité (1) suggère, en comparaison avec la formule de H. Weyl, que la fonction $\mathbf{Chc}(\psi)$, convenablement normalisée, possède au moins localement les propriétés d'une intégrale invariante de Harish-Chandra. Nous montrons que c'est le cas pour les paires duales de type II, c'est-à-dire de la forme $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{D}), \mathrm{GL}_m(\mathbb{D}))$ avec $\mathbb{D} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ et $n, m \in \mathbb{N}$ et nous étudions le cas des paires de groupes unitaires de même rang.

2. Résultats

On munit les groupes G' et H' de mesures de Haar associées à une forme G'-invariante non dégénérée sur $\mathfrak{g}'$ (*cf.* [3]) et on munit l'espace G'/H' de la mesure quotient. On a le résultat suivant obtenu grâce à la Proposition 7.21 de [5] :

THÉORÈME 2.1 ([1]). – *Si la paire* (G, G') *est de type* II *avec* $\dim(G) \geqslant \dim(G')$, *pour* $\psi \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$, *il existe une fonction* $\phi \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}')$ *telle que*

$$\mathbf{Chc}(\psi)(x') = \int_{G'/H'} \phi(g \cdot x')\,\mathrm{d}\dot{g}.$$

Dans la suite de cette Note, on s'intéresse au cas où G et G' sont des groupes unitaires. Pour cela, on introduit les notations suivantes :

Soient $n, p, q, r, s \in \mathbb{N}$ tels que $p + q = r + s = n$ et $n \geqslant 1$. On pose $G = U(p, q)$, $G' = U(r, s)$ et $\mathfrak{g}' = \mathfrak{u}(r, s)$. Pour un $\mathbb{R}$-espace vectoriel X, on Note $X_{\mathbb{C}}$ son compléxifié. On désigne par $\mathfrak{h}'$ la sous-algèbre de Cartan diagonale (compacte) de $\mathfrak{g}'$. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on note E_i la matrice élémentaire dont le seul coefficient non nul est sur la i-ème colonne et la i-ème ligne et vaut 1. La famille $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ constitue une base de $\mathfrak{h}'_{\mathbb{C}}$. On note $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base duale des $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et on considère la fonction polynomiale π sur $\mathfrak{h}'_{\mathbb{C}}$ suivante :

$$\pi' = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant \mathrm{n}} (f_i - f_j).$$

On désigne par Σ' l'ensemble des racines de $\mathfrak{h}'$ suivant $\{f_i - f_j \mid 1 \leqslant i \leqslant r < j \leqslant n\}$. On note Ω' l'ensemble des systèmes de racines fortement orthogonales de Σ'. Pour chaque élément $\mathcal{S}$ de Ω', on associe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}'_{\mathcal{S}}$; on note $c_{\mathcal{S}} : \mathfrak{h}'_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{h}'_{\mathcal{S},\mathbb{C}}$ la transformée de Cayley correspondante (*voir* [6]). Cette application induit un isomorphisme entre les algèbres symétriques $\mathrm{Sym}(\mathfrak{h}'_{\mathbb{C}})$ et $\mathrm{Sym}(\mathfrak{h}'_{\mathcal{S},\mathbb{C}})$ que l'on note aussi $c_{\mathcal{S}}$. L'ensemble $\mathcal{S}$ s'identifie à un sous-ensemble de racines réelles de $\mathfrak{h}'_{\mathcal{S}}$ via l'application $\alpha \mapsto \alpha \circ c_{\mathcal{S}}^{-1}$.

On considère aussi $\mathfrak{h}'^{\mathrm{nc}}_{\mathcal{S}}$ l'ensemble des éléments x de $\mathfrak{h}'_{\mathcal{S}}$ qui ne sont annulés pour aucune racine imaginaire non compacte de $\mathfrak{h}'_{\mathcal{S}}$.

Il existe sur l'espace $W = \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ une structure d'espace symplectique réelle telle que l'action de G (resp. G') sur la première (resp. la deuxième) composante induise une injection de G (resp. G') dans le groupe symplectique *Sp* associé à W et telle que la paire (G, G') constitue une paire duale de *Sp*.

Soient $\mathcal{S} \in \Omega'$, α une racine de $\mathfrak{h}'_{\mathcal{S}}$ telle que $\mathcal{S} \cup \{\alpha \circ c_{\mathcal{S}}^{-1}\} \in \Omega'$ et ϕ une fonction définie sur $\mathfrak{h}'^{\mathrm{reg}}_{\mathcal{S}}$ (l'ouvert des éléments réguliers de $\mathfrak{h}'_{\mathcal{S}}$). On désigne par H_α la coracine de α. Pour $X \in \mathfrak{h}'_{\mathcal{S}}$ semi-régulier tel que $\alpha(X) = 0$, si les limites

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \phi(X + \mathrm{i}tH_\alpha) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \phi(X + \mathrm{i}tH_\alpha)$$

existent, on note $\langle\phi\rangle_\alpha(X)$ la différence entre la première limite et la deuxième.

Soit $\mathcal{S} \in \Omega'$. Pour $\alpha \in \mathcal{S}$, on sait que $\bar{\alpha} \circ c_{\mathcal{S}}^{-1}$ est une racine réelle de $\mathfrak{h}'_{\mathcal{S}}$. On pose pour $x' \in \mathfrak{h}'^{\mathrm{reg}}_{\mathcal{S}}$:

$$\mathbf{e}_{\mathcal{S}}(x') = \mathrm{sign}\left(\prod_{\alpha\in\mathcal{S}} \bar{\alpha} \circ c_{\mathcal{S}}^{-1}(x')\right).$$

Par analogie avec la définition de l'intégrale invariante de Harish-Chandra, on considère la définition suivante :

DÉFINITION 2.2. – Pour $\mathcal{S} \in \Omega'$, on pose pour $x' \in \mathfrak{h}_{\mathcal{S}}'^{\mathrm{reg}}$:

$$\mathbf{Chc}(\phi)_{\mathcal{S}}(x') = \overline{\pi'}\big(c_{\mathcal{S}}^{-1}(x')\big)\mathbf{e}_{\mathcal{S}}(x')\,\mathbf{Chc}(\phi)(x').$$

L'algèbre symétrique $\mathrm{Sym}(\mathfrak{h}'_{\mathcal{S},\mathbb{C}})$ s'identifie à l'espace des opérateurs différentiels à coefficients constants de $\mathfrak{h}'_{\mathcal{S}}$. Notre résultat principal est le :

THÉORÈME 2.3 ([1]). – *Pour $\mathcal{S} \in \Omega'$, il existe une constante $C_{\mathcal{S}} \in \mathbb{R}$ telle que pour $\psi \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$, on ait* :

(1) *La fonction $\mathbf{Chc}(\psi)_{\mathcal{S}}$ est lisse sur $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}'^{\mathrm{reg}}$.*
(2) *La fonction $\mathbf{Chc}(\psi)_{\mathcal{S}}$ est à support borné modulo $\mathfrak{t}'_{\mathcal{S}}$ (la partie compacte de $\mathfrak{h}'_{\mathcal{S}}$).*
(3) *Pour $w \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{h}'_{\mathcal{S},\mathbb{C}})$, la fonction $\partial(w)\,\mathbf{Chc}(\psi)_{\mathcal{S}}$ est localement bornée.*
(4) *Pour $w \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{h}'_{\mathcal{S},\mathbb{C}})$, la fonction $\partial(w)\,\mathbf{Chc}(\psi)_{\mathcal{S}}$ se prolonge par continuité sur $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}'^{\mathrm{nc}}$.*
(5) *Pour une racine α de $\mathfrak{h}'_{\mathcal{S}}$ vérifiant $\mathcal{S} \cup \{\alpha \circ c_{\mathcal{S}}\} \in \Omega'$, on a l'égalité* :

$$\big\langle \partial(w)\,\mathbf{Chc}(\psi)_{\mathcal{S}} \big\rangle_{\alpha}(X) = \mathrm{i}C_{\mathcal{S}}\,\partial(w')\,\mathbf{Chc}(\psi)_{\mathcal{S}\cup\{\alpha\circ c_{\mathcal{S}}\}}(X),$$

où X est un élément semi-régulier de $\mathfrak{h}'_{\mathcal{S}}$ tel que $\alpha(X) = 0$ et $w' = c_{\mathcal{S}\cup\{\alpha\circ c_{\mathcal{S}}\}}c^{-1}(w)$.

Les points (1), (3) et (4) sont communs avec les intégrales invariantes de Harish-Chandra (*cf.* [2]). Modulo les constantes $C_{\mathcal{S}}$, le point (5) montre que les relations de sauts sont vérifiées. On espère pouvoir montrer que les constantes $C_{\mathcal{S}}$ valent 1. Alors que les intégrales invariantes de Harish-Chandra sont à support borné sur chaque sous-algèbre de Cartan, on peut montrer que pour la paire $(U(1), U(1))$, $\mathbf{Chc}(\psi)_{\emptyset}$ n'est pas à support compact. Le point (2) précise ce que l'on peut dire sur le support de la fonction $\mathbf{Chc}(\psi)_{\mathcal{S}}$.

La démonstration de ce théorème se déroule en deux étapes principales. Tout d'abord, on étudie les propriétés de **Chc** pour les paires duales (G, G') avec $\dim(V) = \dim(V') = 2$. On obtient les résultats en effectuant de nombreux développements asymptotiques. Dans un deuxième temps, on procède par induction.

Remerciements. Je tiens à remercier le Professeur A. Bouaziz pour m'avoir proposé ce sujet et pour de très utiles conversations pendant l'élaboration de ce travail. Je remercie également le Professeur T. Przebinda pour son aide.

Références bibliographiques

[1] F. Bernon, Propriétés de l'intégrale de Cauchy Harish-Chandra pour les paires duales d'algèbres de Lie réductives, Thèse de l'Université de Poitiers, 2001.
[2] A. Bouaziz, Intégrales orbitales sur les algèbres de Lie réductives, Invent. Math. 115 (1994) 163–207.
[3] M. Duflo, M. Vergne, La formule de Plancherel des groupes de Lie semi-simples réels, in: Representations of Lie Groups, Kyoto, Hiroshima, 1986, Adv. Stud. Pure. Math., Vol. 14, 1988, pp. 289–336.
[4] R. Howe, Transcending invariant theory, J. Amer. Math. Soc. 2 (1989) 535–552.
[5] T. Przebinda, A Cauchy Harish-Chandra integral for a reductive dual pair, Invent. Math. 141 (2000) 299–363.
[6] W. Schmid, On the character of the discrete series, the Hermitian symmetric case, Invent. Math. 30 (1975) 47–144.